线性代数

复习与解题指导

王者生　周文海　编

石油大学出版社

X·X·D·S·F·X·Y·J·T·Z·D

线 性 代 数

复习与解题指导

王者生　周文海　编

石油大学出版社

内 容 简 介

本书共分六章，即n阶行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性与矩阵的秩，线性方程组，相似矩阵及二次型，线性空间与线性变换。每章包含基本内容概述、典型例题、练习题三个部分，书后附有练习题答案。全书通过典型例题分析，总结、归纳了线性代数常见题型和解题、证题方法与技巧，指出必须注意的事项。书后分类编辑、收录了1987—1997年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷一至试卷五中的全部线性代数试题与解答。

本书适宜于高等工科院校、电大、函大、职大师生，以及非数学专业研究生报考者学习、参考，也可供工程技术人员与自学青年使用。

线 性 代 数
复习与解题指导
王耆生 周文海 编
*
石油大学出版社出版
山东省东营市
新华书店发行
石油大学出版社照排室排版
济南新华印刷厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 8.75 印张 226 千字
1993年8月第1版 1998年4月第3次印刷
印数 6001—9000 册
ISBN 7-5636-0335-2/O₁·13
定价：9.50 元

前　言

线性代数是各类高等工科院校的一门重要基础课，是学习现代科学技术与现代管理方法所必备的数学知识和工具。但初学者颇感内容抽象，习题难做，而一般教材言简意赅，实例较少，难以对其内容和方法详细介绍，因此在学习和复习过程中很需要有这样一本参考书：对线性代数内容有一个简要复习，对解题、证题方法和技巧有全面系统的指导。本书正是作者为此目的，集多年积累的教学经验而编写的。

本书各章编排分为三个部分。首先总结、概述线性代数每章的基本内容，然后通过典型例题对解题、证题思路与方法进行分析和归纳，力争帮助读者正确地理解概念，牢固地掌握基本理论，熟练地运用解题的基本方法和技巧，提高读者分析问题与解答问题的能力。为了使读者有指导地做些练习，在每章后边都有相应内容的练习题，帮助读者达到巩固熟练、举一反三的目的。

书中例题的选择符合国家教委课程指导委员会规定的“线性代数课程教学基本要求”，不管读者使用什么样的工科类教材，都能使用此书。全书例题与 1987 年至 1997 年全国攻读硕士学位研究生入学考试线性代数试题解答 200 多道。

本书已在石油大学校内使用过两年，受到学生们普遍的欢迎与好评。这次重新修改编写正式出版前，由我国著名学者、中国科学技术大学数学系李炯生教授对全书进行了详尽、全面地审阅，他对本书给予了较高评价，并指出应考虑到当前科学技术发展的趋势。根据他提出的许多宝贵意见，我们在内容上又作了较大的充实提高，在原版的基础上增补了线性空间与线性变换一章的内容。在此谨向李炯生教授致以衷心的感谢。

本书第一、二、三、六章和附录由王者生编写，第四、五章由周

文海编写。我们在编写本书过程中曾学习、参考了兄弟院校许多教师编写的有关书籍，吕巍然、曹建胜、钟谭卫、刘奋、海进科、仝登科、周生田、谭尚旺等同志对本书提出了宝贵意见，我们在此一并向他们表示衷心的感谢。由于编者水平所限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评、指正。

编　者

1993年1月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　n 阶行列式

一、内容提要

1. 排列与逆序

(1) n.元排列

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组，称为一个 n 元排列. n 元排列共有 $n!$ 个.

(2) 逆序

在一个排列中，如果一个大数排在一个小数之前，就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数. 用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 或 τ 表示排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数.

若 τ 为奇数，称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列. 若 τ 为偶数，则称此排列为偶排列.

(3) 对换

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换.

对换改变排列的奇偶性.

任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序，并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

2. n 阶行列式的定义

n 行 n 列的数阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的 n 阶行列式定义如下：

$$D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots\ a_{nj_n}$ 的代数和. 其中 $j_1j_2\cdots\ j_n$ 是 $1,2,\ \cdots\ ,n$ 的一个排列. 每一项的正负号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数. 即当 $j_1j_2\cdots\ j_n$ 为偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots\ j_n$ 为奇排列时取负号.

显然二阶、三阶行列式的展开是符合这个定义的.

3. 行列式的性质

性质 1 行列互换，行列式的值不变.

注意：该性质表明了行列式中行、列地位的对称性，也就是说行列式中有关行的性质对列也同样成立. 为此下面仅叙述有关行的性质.

性质 2 对换行列式的两行，行列式变号.

推论 如果行列式有两行完全相同，则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行，等于以数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面.

性质 4 行列式中，如果有两行的对应元素成比例，则行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行的元素都是两个数之和，则行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式某一行的若干倍加到另一行上去，行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开

(1) 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，去掉元素 a_{ij} 所在第 i 行与第 j 列后得到的 $n-1$ 阶行列式，称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按某一行(或列)展开

n 级行列式等于它的任一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和.

n 级行列式中某一行(列)的每个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

设 $D=|a_{ij}|$，则有

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} D & 当\ k=i, \\ 0 & 当\ k\neq i, \end{cases} 或 \sum_{s=1}^{n} a_{si}A_{sj} = \begin{cases} D & 当\ i=j, \\ 0 & 当\ i\neq j. \end{cases}$$

5. 几种特殊行列式的计算

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$
(1)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
$$

$$
(2)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.
$$

6. 行列式的计算方法

(1) 基本方法

1) 直接利用行列式定义或行列式性质算得结果；

2) 化成三角形行列式；

3) 按某一行(或列)展开.

(2) 常用方法

1) 递推法；

2) 数学归纳法；

3) 利用一些已知结论.

① 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

② $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

二、典型例题

例1 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性：

(1) 5 4 2 1 6 3；(2) $n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1$；

(3) $1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n)$.

解 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后边比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后边的比 j_2 小的数的个数

$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+ j_{n-1}$后边比 j_{n-1}小的数的个数.

(1) $\tau(5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 3) = 4+3+1+0+1=9$；

(2) $\tau(n\ (n-1)\cdots 2\ 1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

由于$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性根据 n 而定，故需对 n 进行讨论.

当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{4k(4k-1)}{2}=2k(4k-1)$是偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$是偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$是奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$是奇数.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$\begin{aligned}\tau(1\ 3\ 5\cdots(2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n))&=0+1+2\cdots+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

奇偶性情况同(2)题.

例 2 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$

解 方法一：由行列式定义，

$D_n=(-1)^t b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n$，其中 $t=\tau(2\ 3\cdots n\ 1)=n-1$，这里列标为自然顺序，故计算行标的逆序数，所以 $D_n=(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n$；或由行列式定义

$D_n=(-1)^{\tau(n12\cdots(n-1))}a_nb_1b_2\cdots b_{n-2}b_{n-1}=(-1)^{n-1}a_nb_1b_2\cdots b_{n-2}b_{n-1}$，

这里行标为自然顺序，故计算列标的逆序数.

方法二：按最后一列展开

$$D_n = a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}.$$

例 3　计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \\ ka+mp & kb+mq & kc+mr & kd+ms \end{vmatrix}$

解　方法一：

$$D = k\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \\ a & b & c & d \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \\ p & q & r & s \end{vmatrix}$$

$$= k\cdot 0 + m\cdot 0 = 0.$$

方法二：

$$D \xlongequal{r_4 - kr_1 - mr_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

例 4　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解　方法一：用性质及按行展开的公式

$$D \xlongequal{c_4 + c_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 3 行展开}} 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 31$$

方法二:化成三角形行列式

$$D \xlongequal[r_4 - r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 3r_2]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) \times (-31) = 31.$$

例 5　求证

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

证明　当 $x=0$ 时,结论显然成立,故设 $x \neq 0$.

方法一:化成(下)三角形行列式

$$D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_{i+1}+c_i \div x} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1}+\dfrac{a_n}{x} & \cdots & \cdots & \cdots & x+a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{a_k}{x^{k-1}} \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}\left(x+a_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{x^{k-1}}\right)$$

$$= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

方法二：按第 n 行展开

$$D_n \xlongequal{\text{按第 } n \text{ 行展开}} (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+2}a_{n-1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+(n-1)}a_2 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com