數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

RELATION MAPPING INVERSION METHOD

關係映射反演方法

徐利治 鄭毓信 著

数学方法论丛书

关系映射反演方法

徐利治　郑毓信

江苏教育出版社

1988·南京

数学方法论丛书

关系映射反演方法

徐利治　郑毓信

出版发行：江苏教育出版社

经　　销：江苏省新华书店

印　　刷：淮阴新华印刷厂

开本 850×1168 毫米 1/28 印张 3.625　字数 67,000

1989 年 5 月第 1 版　　1989 年 5 月第 1 次印刷

印数 1-3,000 册

ISBN 7-5343-0671-X

G·588　　定价：1.55 元(贴塑)

出版说明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔（*Descartes*）、莱布尼兹（*Leibniz*）、庞加莱（*Poincare*）、克莱因（*Klein*）、希尔伯特（*Hilbeit*）和阿达玛（*Hadamard*）等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚（*Polya*）为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学

生以寻找真理和发现真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》(以下简称《丛书》)，并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月：我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问，我们深信，在《丛书》全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年1月

前 言

这本小册子的主要意图，就是希望通过各类例子的分析讲解，由浅入深地向读者介绍数学中的“关系映射反演方法”，因为这种方法的实质就是矛盾转移法，那就是把较困难的问题（不易处理的矛盾）转化为较易处理的问题以求得解决的方法。所以这是一种非常普遍的思想方法，其应用范围远不限于数学领域。

来到20世纪80年代，人们越来越明白：数学可以看成为研究关系结构形式的科学（19世纪恩格斯所描述的数学对象定义自然已包括在这一发展了的普遍范畴中）。一般所谓数学问题无非是指有待确定的、或需要探求的某种未知关系。“映射”作广义讲，就是指实现“化难为易”的某种对应方法或变换手段。所谓“反演”就是把变换后求得的解答再转换成原来问题所要求的答案。这样一联想，就不难理解“关系映射反演方法”的一般含义了。

显然上段所述方法的命名是一个复合名词，不免有点冗长，因此为简便计，不妨称它为 RMI 方法或 RMI 原则，这里 R 表示关系(Relationship)，M 代表映射(Mapping)，I 即表示反演(Inversion)，后一个名称主要是突出它在方法论上的原则性意义。事实上，这样一种方法原则在现代科技领域里也是普遍使用的。例如，某种信息（如影象）经过特定过程（如录象）转化为适当的信号后，再经过某种技术处理（如传输）重新反转为原来的信息并发送出来（如播象）。这一程序就符合 RMI 原则，因为信号可以理解为信息

（原象）的映象，从原象转化为信号的过程便是映射，而逆转为信息的过程就是反演。

本书作者之一曾在1983年初版的《数学方法论选讲》一书的第三讲中通过一批例子释明了 RMI 原则在数学中的各种应用。后来，在朱梧槚、郑毓信各自编著的《数学方法论ABC》与《数学方法论入门》两本书中又补充讲解了许多属于初等数学的有趣例子。事实上，这本小册子中的有些例子就是参照上述各书写成的。

本书内容分四章，前两章讲解的例子大多属于初等数学范围，后两章的题材内容多半涉及高等数学诸分支。由于各章的内容题材有着相对独立性，所以读者完全可以根据自己需要去选读书中的部分章节，而不致于有何困难。但是需要提醒读者，由于这本书以探讨数学思想方法为主，所以它和一般数学教材的写法上有着很大区别。例如有关一些定理或命题证明中的技术性细节，在无关要旨的情况下往往一带而过。这时就要求勇于钻研的读者去查阅专书（即数学参考书或专著）。

看来有一种比较理想的情况是，如果读者已经初步了解或具备本书涉及的某些问题的有关知识（即使是很局部的知识），那末专从方法论角度来阅读本书中的题材，无疑就会获得更深刻的体会。这种体会对帮助读者进一步运用RMI原则去解决其它各种数学问题或科技问题应该是很起作用的。

作为一种普遍思想方法和解题程序，RMI原则在数学教学中的意义和作用显然也是不容忽视的。于是，能否把RMI方法原则作成一条主线（或主线之一）贯穿到数学教学与教材中去的问题，看来也将是数学教师们值得研究的一项课题。在本书之末，我们还提出了相应的建议，谨供教师同志们参考。

我们很高兴地提到，江苏教育出版社的负责同志们主动倡议并组织了这套“数学方法论丛书”，以便为国内数学教育界提供一批可供参考的读物；这无疑是很有远见卓识的。但愿这套丛书全部出版后将对国内数学教育改革事业起到一定的促进作用。相信这也将是丛书的全体作者们和译者们共同抱有的愉快愿望！但本书仓促成稿，考虑不周之处敬希读者指正。最后，要感谢朱梧槚、孙革两位同志，前者曾帮助订正了第四章中的个别例题，后者曾代为加工并誊清了第一、第二两章的原稿。我们还要对本书的责任编辑同志付出的细致劳动表示诚挚谢意。

徐利治　郑毓信

1989年2月

目录

一、引论——从化归原则谈起

1.1. 化归原则及其应用

什么是数学的特点？对此即使是一些并不具有很多专门数学知识的人，往往也能略举一二的。如"数学是十分严密的"、"数学是高度抽象的"等等。苏联著名数学家 А.Д. 亚历山大洛夫曾在《数学——它的内容、方法和意义》一书中，对数学的特点作了这样的概述："第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性，最后是它的应用的极端广泛性。"

亚历山大洛夫的这一论述是较为全面的。但是，从另一角度讲，这里还存在这样的问题，即我们应当把数学看成是一种知识的汇集、还是看成是一种实际的（研究）活动？或者说，我们应当对此去实行静态的、逻辑的分析（例如研究数学概念的逻辑定义、数学定理的逻辑证明、数学理论的逻辑构造等），还是应当去从事动态的、历史的研究（例如，研究某一数学概念是如何产生的、某一数学定理是如何发现的、某一数学理论是如何发展的等等）？显然，所说的这两个方面是互相依赖、密切相关的。例如，数学中的概念和结论、乃至各个具体的数学理论都是数学家实际研究活动的产物；另外，促使数学家们去积极从事自己的研究活动、并为之提供具体目标和必要动力的，又正是对于数学知识的追求。但是，数学的这两个侧面毕竟又是有所不同的。特殊地，就数学方法论的研究而言，我们无疑地应当是从"动态"

的角度去进行分析的。因为，数学方法论正是这样的一门学问，其中所研究的主要是数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新的法则等，而又只有通过对于数学家的研究活动及数学的历史发展的具体考察和分析，我们才能由此而总结出"数学的发展规律，以及数学中的发现、发明与创新的法则等。"从而，在这样的意义上，就数学特点的讨论而言，我们也就不能局限于"概念的高度的抽象性"、"结论的逻辑的严格性"这样一些结论上，而应进一步去探索数学家的思维方式及其特点：正是通过无数数学家的辛勤耕耘，数学这一已经具有几千年历史的科学分支才能永葆青春，并不断挥发出新的光辉和活力。

那么，什么是数学家的思维特点呢？对此匈牙利的著名数学家路沙·彼得在其名著《无穷的玩意》一书中曾作过如下的论述。她指出：这样的推理过程对于数学家的思维过程来说是十分典型的，即"他们往往不是对问题实行正面的攻击，而是不断地将它变形，直至把它转化成能够得到解决的问题"。

现在用二元一次方程组的求解问题为例来对此进行说明。

为了求解如下的二元一次方程组：

$$3x+y=14 \tag{1}$$

$$2x-y=6 \tag{2}$$

可以首先通过"加减"或"代入"实现所谓的"消元"，即

或者可以(1)+(2)得　　$5x=20$；

或者可以由(1)得　　$y=14-3x$　　(3)

再把(3)代入(2)得　　$2x-(14-3x)=6$

由于一元一次方程的求解问题是已经解决了的，即有$x=4$，

再把$x=4$代入(1)并化简而得　　$y=2$。

这样，我们就通过把所要解决的问题（求解二元一次方程组）转化成能够解决的问题（求解一元一次方程），从而实现了原来的目标。

罗沙·彼得并以如下的比拟对数学家的思维方式作了生动的描绘：

有人提出了这样一个问题："假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，你想烧开水，应当怎样去做？"对此，某人回答说："在壶中灌上水，点燃煤气，再把壶放到煤气灶上。"提问者肯定了这一回答；但是，他又追问道："如果其它的条件都没有变化，只是水壶中已经有了足够多的水，那你又应当怎样去做？"这时被提问者往往会很有信心地说："点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上。"但是，提问者指出，这一回答并不能使他感到满意。因为，更好的回答应是这样的："只有物理学家才会这样做；而数学家们则会倒掉壶中的水，并声称我已把后一问题化归成原先的问题了。"

从而，如果把"化归"理解为"由未知到已知、由难到易、由复杂到简单的转化"，那么，我们就可以说，数学家思维的重要特点之一，就是他们特别善于使用化归的方法来解决问题。从方法论的角度说，这也就是所谓的"化归原则"。

在历史上曾有不少数学家从各种不同的角度对化归原则进行过论述。例如，可以同时称为数学家和哲学家的笛卡儿就曾提出过如下的"万能方法"（一般模式）：

第一，把任何问题化归为数学问题；

第二，把任何数学问题化归为代数问题；

第三，把任何代数问题化归为方程式的求解。

由于求解方程的问题被认为是已经能解决的（或者说，是较为容易解决的），因此，在笛卡儿看来，我们就可利用这样的方法去解决各种类型的问题。当然笛卡儿的这一结论

是不正确的，因为，任何方法都必然具有一定的局限性，从而所谓的“万能方法”是根本不存在的；但是，笛卡儿所给出的这一模式毕竟又可视为化归原则的一个具体运用，从而也就曾产生过具有重要意义的成果。例如，这事实上就是笛卡儿所赖以建立解析几何的最基本的思想原则，而后者则被认为是由初等数学阶段向变量数学时代发展的“第一个决定性步骤”。

在笛卡儿以后，英国哲学家霍布斯也曾从十分一般的角度论述了如下的“方法论原则”：

“从一个愿望联想起我们曾经看到过的某些方法与手段，借助于这些方法和手段，我们可以得到如所求之目标那样一类东西。再从这些方法或手段出发，我们又联想到别的一些通向它们的方法或手段，这样继续下去，直到某个我们能力所及的起点为止。”您可别把霍布斯的这一论述看成是一种毫无实际价值的“哲学空谈”；恰恰相反，霍布斯本人就曾依据这样的原则提出了“思维即计算”的重要思想，即认为可以把推理看成是词语和符号的加减。他写道：“借推理我意谓计算。计算或者是汇集那被加在一起的许多事物的总和，或者是知道当一个事物从另一个事物被取走，什么仍然存留。因而推理同于相加和相减。……如经常可能的那样，以致所有的推理都可理解为这两种心智的运算，即相加和相减。”从历史的角度看，霍布斯的这一思想对于后来的数理逻辑的发展是具有重大的启示意义的。又由于他所提出的方法论原则，也可看成是对于化归原则的一种具体阐述，因而也就从另一角度表明了化归原则的重要意义。

最后，美国著名数学家、数学教育家G．波利亚在他的《数学的发现》一书中所给出的下述论述，可以看成是对于如何去实现由未知（难、复杂）向已知（易、简单）的化归的

具体说明。

在面临所要解决的问题时，我们应当去考虑："这是什么类型的问题？它与某个已知的问题有关吗？它象某个已知的问题吗？"

更具体地说，我们可以从所要追求的具体目标（未知元素、待证命题）出发去进行考虑："这里所谓的关键事实是什么？有一个具有同样类型的未知量的问题（特别是过去解过的问题）吗？有一个具有同样结论的定理（特别是过去证明过的定理）吗？"

另外，从更为一般的角度来说，我们又可考虑："你知道一个相关的问题吗？你能设想出一个相关的问题吗？你知道或你能设想出一个同一类型的问题、一个类似的问题、一个更一般的问题、一个更特殊的问题吗？"

这样，就可由原来的问题引出"可用的相关问题"，而这也就为实现由未知（难、复杂）向已知（易、简单）的转化提供了现实的可能性。

利用化归原则解决问题的一般模式可以表示如下：

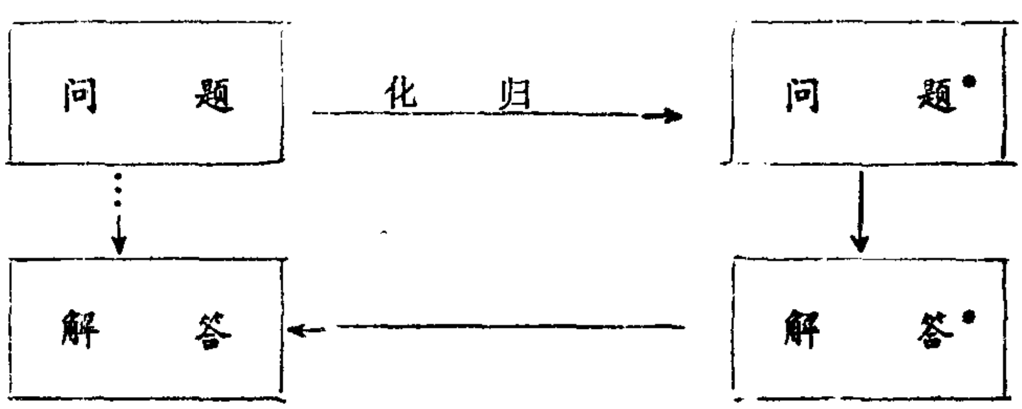

图 1-1

另外，利用化归原则解决问题的必要条件是：与原来的问题相比，化归后所得出的问题*必须是已经解决了的，或者是较为容易、较为简单的。

化归原则在数学中有着十分广泛的应用。事实上，打开

任何一本数学书，我们都可以从中找到这种应用的大量实例。以下就是一些较为典型的例子。

【例1】 为了求得如图1-2，左边图形的面积，可以采取如下的分割法：

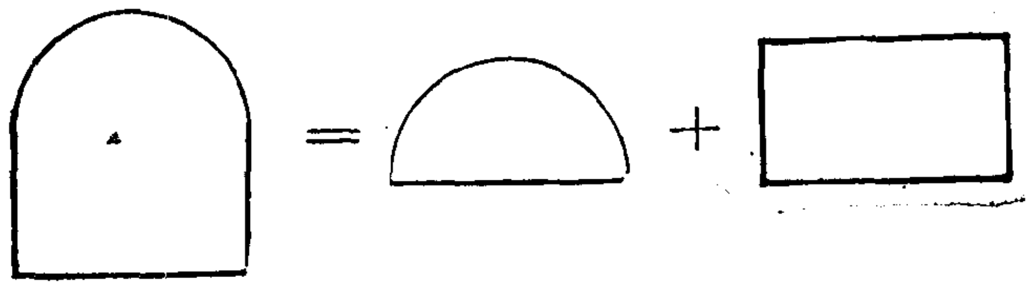

图 1-2

显然，这一分割事实上就是把一个较为复杂的图形的求积问题转化成较为简单图形的求积问题，从而也就可以看成化归原则的一个具体运用。

在此还可提出如下的更为一般的“分割方法”，也即如笛卡儿所说：“把你所考虑的每一个问题，按照可能和需要，分成若干部分，使它们更易于求解。”这种一般的“分割方法”可以表示为：

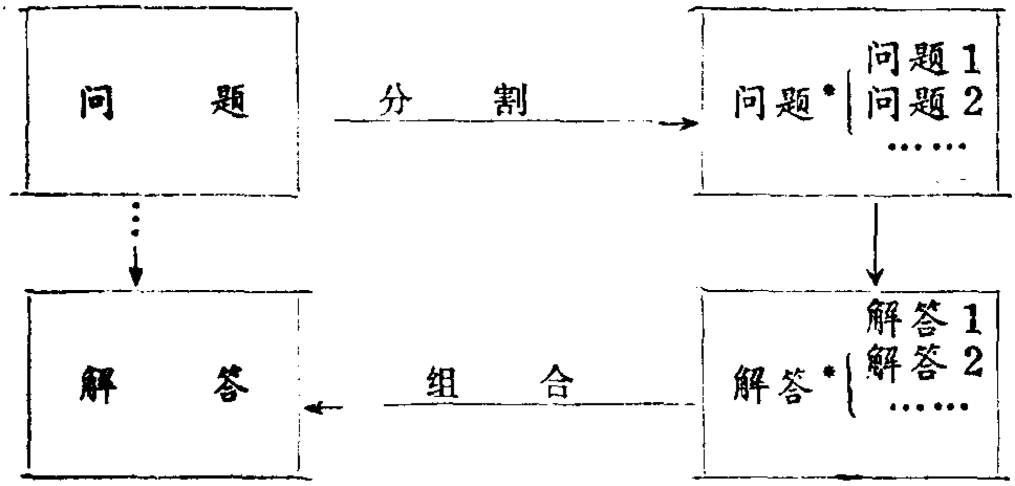

图 1-3

显然，上述的“图形分割”就可看成这一模式的特殊例子。

从思想方法的角度看，分割方法的核心在于："首先求得局部的解决，再进而求得整体的解决。"由于这是一个一般的思维原则，因此在数学中就有着更为广泛的应用。例如，因式分解中的分组分解法就可看成这样的实例：

$$
\begin{aligned}
& x^2-xy+y^3-xy^2 \\
\overset{(分)}{=}\ & (x^2-xy)-(xy^2-y^3) \\
=\ & x(x-y)-y^2(x-y) \\
\overset{(合)}{=}\ & (x-y)(x-y^2).
\end{aligned}
$$

另外，几何作图中经常用到的"轨迹交会法"也可看成"由局部到整体"的思维原则的具体运用。具体地说，为了求得满足指定条件的对象（例如，点），我们可以首先对所说的条件进行分割；然后，只要分别求得了满足各个"部分条件"的对象的集合（即相应的"轨迹"），通过求其公共部分（即所谓的"交会"），也就立即可以求得满足原来条件的对象。

例如，为了求得三角形 ABC 的外接圆的圆心，即满足条件 $OA=OB=OC$ 的点 O。可以首先把这一条件分割为 $OA=OB$ 和 $OB=OC$，然后，只要分别作出满足这两个部分条件的轨迹，即线段 AB 及线段 BC 的垂直平分线，其交点就

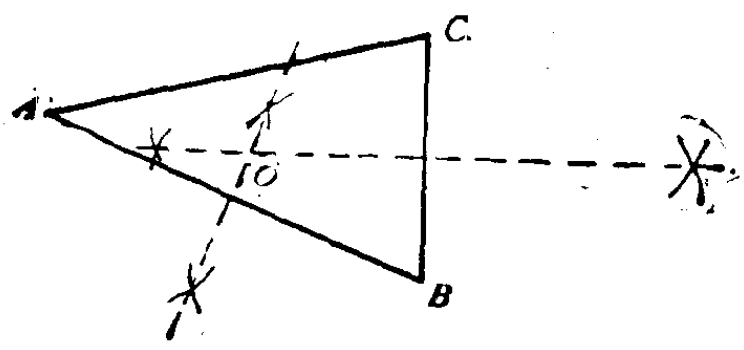

图 1-4