钣壳的弯曲与稳定

王俊奎　张志民　编

国防工业出版社

钣壳的弯曲与稳定

王俊奎　张志民　编

国防工业出版社

内 容 简 介

全书内容主要分为四大部分：第一～四章钣的应力分析；第六～九章壳体应力分析；第十章钣的稳定性；第十一章壳体稳定性。此外，在第五章中结合钣的弯曲理论讲解了两种近代数值解法——有限差分法与有限单元法。

本书作为航空高等院校教学用书，着重于基本理论的阐述，讲解力求深入浅出，取材注重联系实际。尚可作为高等院校力学、土木、原子反应堆以及船舶、汽车、化工等机械专业师生、科技人员和工程设计人员的参考书。

钣壳的弯曲与稳定

王俊奎　张志民　编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850 \times 1168^{1}/_{32}$　印张 $9^{9}/_{16}$　241千字

1980年11月第一版　1980年11月第一次印刷　印数：0,001— 3,400册

统一书号：15034·2103　　定价：1.20元

序

薄钣和薄壳结构，很早以前就为人们所采用，并对它们的承力分析逐渐有了极为丰富的经验。到十九世纪初叶以来，著名数学力学家柯西、波桑、纳维尔、拉格伦日和克希荷夫等人，又创造性地建立了数学模型和分析理论。在近代飞行器、船舶、桥梁、建筑等出现后，对固体力学工作者又提出了新结构中的新要求。近三十多年以来电子计算机的诞生和发展，又促进了力学领域中新理论和新方法的产生。经典力学与近代力学的理论与计算方法是密切关联和相互促进的，在很多方面又是难以分开的。因此，经典与近代力学的理论和方法是力学工作的基础，都必须予以重视。

在今日的工程应用中，钣壳的力学分析越来越重要，在我国大学的固体力学教学中，很需要有一本钣壳教材。为了满足大学师生、研究人员和工程技术人员的要求，我们仓促地写了这本书，从而不可避免地会因为考虑不周而带来某些缺陷甚至错误。随着时间的推移，我们还想以后再加以补充和修订。

本教材共分为十一章。前五章论述了薄钣的弯曲问题，随后四章论述了薄壳的无矩理论和有矩理论问题，最后两章论述了薄钣和薄壳的稳定性问题。在这个比例分配中，第一章讨论了矩形薄钣横向小变形的弯曲微分方程和边界条件。它们的受力条件主要是横向载荷，但也讨论了钣中面受载和受热因素对弯曲的影响。对于矩形薄钣由横向弯曲所引起的位移、应变和应力，均用挠度函数形式表示出来并且示范性地作了一些演算。第二章讨论了圆形薄钣的小挠度弯曲，讨论的思路与第一章相似。第三章讨论了矩形薄钣的大挠度弯曲问题。第四章讨论了正交各向异性钣和夹

层钣的弯曲问题。这就在第一章的基础上又向前推进了一步，并为一些新型结构（如加劲和夹层结构）和新型材料(如复合材料)的力学分析，准备了一些基本知识。在第五章里，我们还介绍了有限差分法和有限单元法。在电子计算机迅速发展的今天，这两种方法已成为计算力学中的有利工具。第六章到第九章主要讨论了筒壳和一些典型旋转壳体在不同外载荷作用下的无矩理论和有矩理论，并且也作了一些数值演算。第十章和第十一章讨论了典型薄钣和薄壳的稳定性问题。这些问题是工程设计中的重要问题，并且在今天仍在继续发展着。

本书是一本大学教材，因此论述的内容只能局限在基本概念、基本理论和基本方法方面。同时它又是一本合编教材，所以在使用时其讲授内容还可以根据各校的专业情况，适当地加以取舍。

本教材的编写大纲和编写后的全部书稿，都经过了西北工业大学陈百屏和张志镇同志的详细审阅，并提出了许多有益的修改和补充意见，特在此表示衷心的谢意。今后还希望读者对本书的缺陷或者错误给予及时的批评和指正。

王俊奎

目　　录

引　言

在航空、宇航的飞行器和航海的船舶、潜艇以及其它领域，如桥梁、建筑、化工机械、原子反应堆等工程结构的力学分析中，经常遇到钣壳这类典型的结构问题。一般而言，工程结构都是三维物体，而钣与壳这类结构的特征，是其中有一维，即它们的厚度要比其它二维小得多。

人类很早就使用钣壳结构到各种器物上，早期的原始房屋和各类石器以及而后的陶器、铜器、铁器等都采用了钣壳结构，并且根据实践的经验也粗略地能估计它们的强度与刚度。但是钣壳结构作为用数学来分析的一门学科，恐怕只能上溯到1800年前后。从那时起，钣壳理论与分析方法逐渐得到建立和发展，一直持续到今天。从早期发展起来的应用弹性理论以及到了今天还在沿着这条道路继续发展的钣壳理论，人们经常叫作钣壳经典理论。这一理论作为近代新理论新方法的基础，仍是很有用的，它还在继续发展。特别是近年来新型材料的出现，例如复合材料以及采用它所形成的复合结构，更使经典钣壳理论扩大了研究范围，充实了使用内容。近三十年来，由于电子计算机的出现和迅速发展，在计算工程结构所使用的新的分析方法，如差分法和有限单元法等逐渐发展、形成和完善起来，并且愈来愈显示出它们的重要性。特别是有限单元法，最近的理论发展和在大型、复杂结构和细微分析的应用中，更显得突出而有前途。但是不能忘记，经典的钣壳理论仍然是探索这些新理论新方法所不可缺少的重要基础，并且经典理论的基本原理和分析方法在新理论新方法中仍然占着很重要的地位。本教材的讨论范围仅限于钣壳经典理论与分析方法的主要内容以及差分法和有限单元法的一些基础知识。至于钣壳理论的详尽论述可参见其它有关专著，至于有限单元法的详细讲述将单独另开一门课程。

在钣壳理论中，最普遍而简便的方法是位移法。用正交坐标与极坐标描述薄钣与薄壳中面的横向挠度和面向位移所表示的基本微分方程及各类边界条件，在经典理论中很早以前就比较完善地建立起来了。同时也相应地建立了广义位移、广义应变与广义应力的各种关系式。因此根据基本微分方程所求得的位移和挠度解，为尔后计算广义应变和广义应力创造了条件。由于这种情况，所以本教材的着重点是放在各种形状钣壳和不同的边界条件下，求钣与壳的面向位移和横向挠度的解。特别是横向挠度的适宜解。

在薄钣壳的经典理论中，横向剪切应变的影响一般是忽略不计的。在这种简化的基础上，薄钣的基本方程推导成四阶的偏微分方程和薄壳的基本方程推导成八阶的偏微分方程，并且相应沿每一边缘上的边界条件应该是二个。对于大多数的工程应用问题，经典理论将给出足够精确的结果。然而当钣和壳的厚度增加，或者载荷密度变化率增加，或者边缘上支持的刚度增加到超过某个限度时，用经典薄钣和薄壳理论所求出的结果的精确度就要减小。特别是在高度集中载荷的作用区，用经典理论所求出的内力分布将会有很大的误差。对于这些情况，在推导基本微分方程和边界条件时，横向剪切应变的影响就不能省略掉而必须适当地考虑进去。从而出现了所谓经典理论的修正理论。限于篇幅，本教材对这种修正理论不准备予以讨论。

本教材是航空院校的统编教材，不限于某个院校使用，从而对内容的要求上可能不完全一样。为了适应这种情况，本教材的内容份量似乎稍微多了一些，因此每个院校可以根据不同需要，在教师授课时做一些适当的取舍。

关于弹性理论和能量原理的一些基本知识在弹性理论及其它有关的先修课程中讲述，本教材不再重复。还有，初学本课程的大学生，一般还没有学过张量数学，所以这里几乎没有采用张量符号和相应的表达式。

第一章　矩形薄钣的小挠度弯曲

§1-1　薄钣的基本概念与假设

一、基本概念

在结构分析中，我们常常碰到一个方向的尺寸(称为厚度 t)比其它方向的尺寸小得很多的结构元件，如图 1-1 所示。通常把这种类型的结构元件叫做钣。这种钣式结构在航空和其它结构中是很多的。如飞机的翼面、座舱的底钣，受内压作用的整体油箱的壁钣以及建筑物的屋顶、桥梁的钣面等比比皆是。

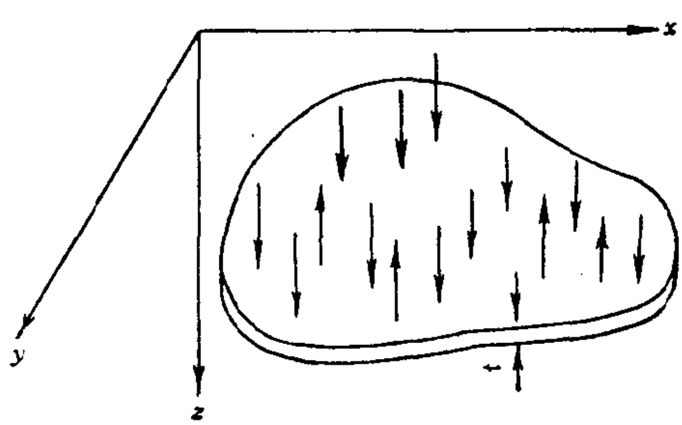

图1-1　钣

在十八世纪初开始的关于钣的最重要的分析，有很大一部分工作应归之于柯西（Cauchy),波桑(Poisson),纳维尔（Navier),拉格伦日（Lagrange）和克希荷夫（Kirchhoff)。早先这些“工程师”们所做的研究工作是很有意义的，甚至在近代的工程分析中，仍然沿用着他们所提出的许多方法。但是近三十年来，由于数字计算机的出现，像有限差分法和有限单元法已变为更有实用价值的数值解题工具，特别是有限单元法已成为对钣进行分析的最新的和最有潜力的方法之一。

如将钣的各维尺寸作比较时，钣的弯曲性能在很大程度上取决于它的厚度。为此，在今后的讨论中大致将钣分为：（1）具有

小挠度的薄钣，（2）具有大挠度的薄钣和（3）厚钣等三种类型。

由于厚度相当大的钣在航空结构中比较少见，而厚钣理论又是把钣的问题当作三维弹性问题来考虑，其应力分析甚为复杂，问题的解决甚为困难，在本教材中不予以讨论，而只讨论薄钣的问题。

在许多文献资料中，所讨论薄钣的弯曲问题，涉及到承受着各种不同形式的载荷。在本教材中所研究的只限于薄钣在横向载荷即垂直于钣平面的载荷作用下的变形与内力的问题，如图 1-1 所示。

另外钣在边缘上的支持情况，对钣的挠度和应力状况影响很大。如钣在边缘上由于有支持，当受横向载荷而发生弯曲变形时，钣平面内所产生的位移就受到限制，因而在钣的横截面上就产生沿厚度均匀分布的应力。通常我们把这种应力称作为薄膜应力。如图 1-2 所示的 σ_m。

一般来说，钣承受的载荷，部分由其弯曲刚度平衡，部分由钣的薄膜应力来平衡。也就是说，钣受载荷弯曲后，既产生弯曲应力，也产生薄膜应力。但由于钣厚和载荷大小不同，所引起的弯曲应力和薄膜应力的相对比例关系也不相同。所以也有依照弯曲应力与薄膜应力相对大小的原则，将钣分成：硬钣、软钣和理想软钣（薄膜）三类，即：

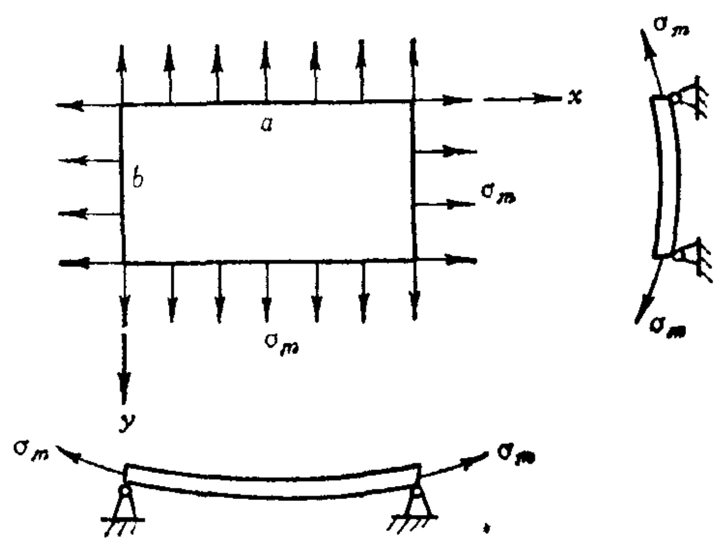

图1-2　钣的薄膜应力

（1）硬钣——薄膜应力远小于弯曲应力者，则薄膜应力可

以忽略不计。硬钣又习惯称为小挠度薄钣。

（2）软钣——薄膜应力与弯曲应力属同一数量级，则二者均不可忽略。软钣又习惯称为大挠度薄钣。

（3）理想软钣（薄膜）——弯曲应力远小于薄膜应力者，则弯曲应力可以忽略不计。

本教材以研究小挠度薄钣弯曲问题为主，并对大挠度薄钣弯曲问题以及正交异性钣，夹层钣等问题也作了适当的介绍。

为了得出承受横向载荷的薄钣小挠度弯曲方程式，可以用不同的方法来推导。第一种方法是从弹性力学的三维基本方程式中消去一些不重要的项，例如考虑到钣的厚度与其它尺寸相比较为小量等因素。即使作了这样的简化处理，求解过程还是相当复杂的。第二种方法是不拘泥于数学上的严谨，而要求有清晰的物理概念的阐述，它利用梁理论的基本假设，直接地去导出薄钣的方程式。两种方法可以得到同一结果。本教材采取了第二种推导方法，因为它在工程上有着更大的直观性。

如果从数量级的概念出发定义“小挠度薄钣”，则钣的挠度w应远小于钣的厚度t，亦即$w_{max}/t \cong 20 \sim 25\%$左右。

二、基本假设

与简单梁的理论相类似，对于承受横向载荷的小挠度薄钣来说，可以下面的四个假设为基础，建立起一套比较有效的钣弯曲的近似理论。

假设1 在弯曲时，钣的中面不产生任何变形，即，中面是一个中性面。

如果除了横向载荷，还有外力作用在钣的中面内时，该假设就不再成立。这时需要进一步考虑作用在钣的中面内的应力对钣弯曲的影响。

假设2 弯曲变形前垂直于钣中面的直线，在变形后仍作为直线垂直于变形后的中曲面，而且线段长度也保持不变，如图1-3中的线段$m-n$。这个假设和研究梁的弯曲时所作的平剖面

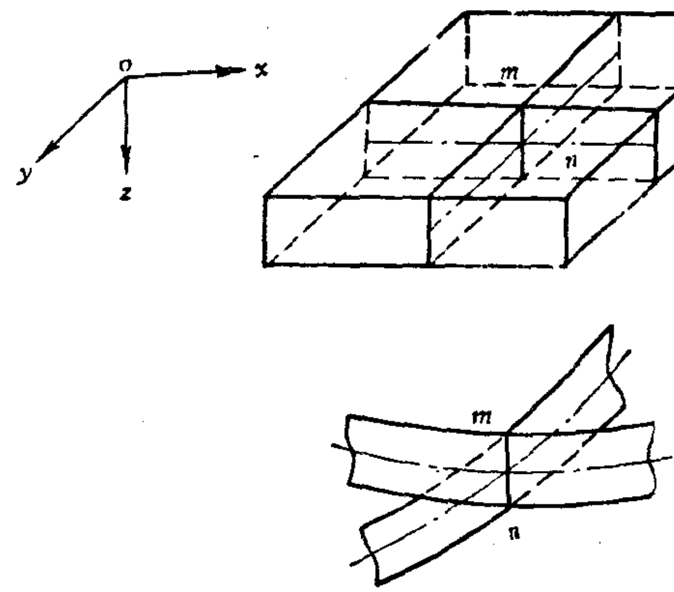

图1-3　直法线假设

假设相类似，我们称此假设为直法线假设或几何假设。

该假设可以进一步表明：

1. 它是与不考虑横剪力对钣的影响相等价的，即等于假设剪应变 γ_{xz} 和 γ_{yz} 等于零。但这在理论上将会引起某些矛盾。所以，我们可以把它看作并不意味着横向剪应变必定等于零，而把横剪力看作是个足够小的量，以致由于横向剪应变的存在，而引起的横剖面的任何变形都是可忽略的。应当注意到在某些边缘区域，例如靠近拐角或靠近直径与钣厚为同一数量级的圆孔的地方，即使对薄钣来说，该假设带来的误差仍将导致不可靠的结果。因为这时剪切的影响已变得很重要，需要对薄钣理论作一些修正。

2. 由于认为垂直于中面的线段 $m-n$ 的长度保持不变，这就是说，该线段沿着厚度 z 方向无伸缩，即

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

也就是说，挠度 w 与 z 无关，它只是钣平面内两个坐标 x 和 y 的函数，即

$$w = w(x, y)。$$

假设 3　钣的横向正应力 σ_z 远小于其它应力，因此可以忽略

不计。但是，在高度集中的横向载荷的附近，即使对于薄钣来说，该假设带来的误差也将导致不可靠的结果。

假设 4 钣的材料是均质，各向同性，连续和线弹性的。该假设把材料特性完全理想化了，并准许使用通过两个弹性常数 E 和 ν 表示的应力-应变关系式（虎克定律）。但是对于在第四章中要讨论的正交各向异性钣而言，本假设将不适用。

当我们准备去研究薄钣的大挠度弯曲时，应当注意到，大挠度通常会引起过大的中面应变，这就与中面不变形的假设相违背了。只有在中面能够被弯曲成可展曲面的钣才是例外的，因为这时，即使对于大挠度来说，中面也仍可保持不变。所谓的可展曲面，就是指在平面上能够向外滚动而曲面上任意两点之间的距离仍保持不变的那样一个曲面。如柱形面和锥形面等。

§1-2 矩形薄钣的基本计算式

在本节主要导出位移、应变、应力和应力合量的各个计算式。

一、位移

令钣内一点 A 在 x，y 和 z 方向的位移分量，分别为 u，v 和 w。在横向载荷作用下，中面变成一个由式 $w=f(x, y)$ 确定的曲面。在这里，称 w 为中面从 $x-y$ 平面算起、在 z 方向的横向挠度，如图 1-4 所示。

在图中表示出中面在变形以前和变形以后的位置。依照假设 2，变形前垂直于中面的直线，在变形以后仍保持与中面垂直。这时，距离中面为 z 的一点 A，在 x 和 y 方向的位移分量分别为 u 和 v。如果考虑有横向剪应变存在时，既使这个剪应变与其它别的应变相比是个小量，在变形前垂直于中面的直线，实际上不会仍然垂直于变形后的中面。而要从它的垂直位置存在一个受横向剪应变限定的小的角变形。这个变形在图 1-4 中用虚线表示出，并用 u_s 和 v_s 代表这个变形在 x 和 y 方向引起的位移。但是，在这里可以认为 u_s 和 v_s 很小，并且是可忽略的。

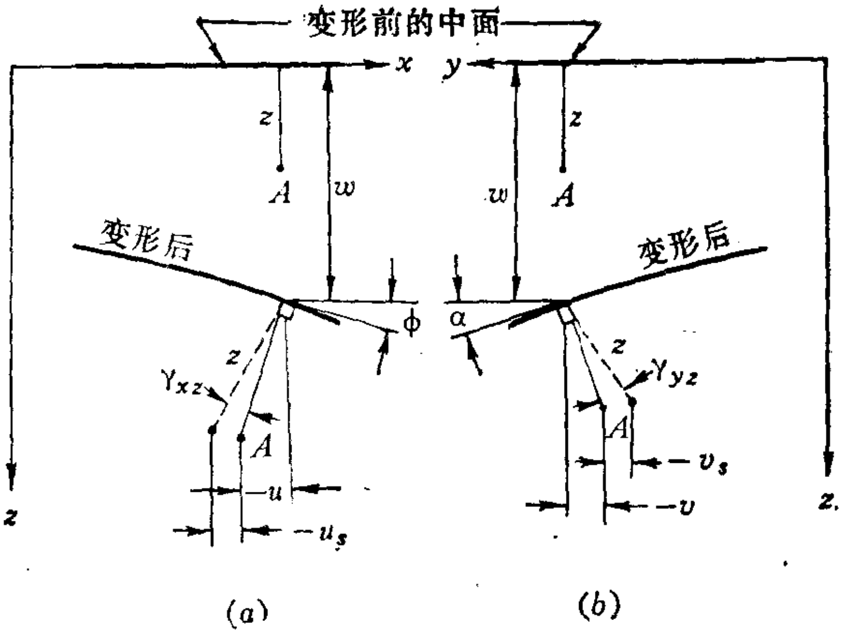

图1-4 在钣上距离中面为z一点的位移

（a）在x方向的位移u（不计由γ_{xz}引起的u_s）；（b）在y方向的位移v（不计由γ_{yz}引起的v_s）。

从几何关系中，可以确定用中面挠度w表示的位移u和v的表达式如下：

$$u=-z\sin\phi;$$
$$v=-z\sin\alpha。$$

因为挠度很小，所以

$$\sin\phi\simeq\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\sin\alpha\simeq\frac{\partial w}{\partial y}。$$

因此位移

$$\left.\begin{aligned}u&=-z\frac{\partial w}{\partial x};\\ v&=-z\frac{\partial w}{\partial y}。\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

从上式中可以看出，位于中面处所有点x，y方向的位移均等于零，这和假设1是完全一致的。

另外，通过假设忽略掉γ_{xz}和γ_{yz}，也可以直接导出用中面

挠度w表示的位移u和v的表达式（1-1）。

二、应变

根据假设1和假设2，则弹性理论几何方程中的六个应变分量，只剩下位于与中面为距离z的平面中的三个应变分量ε_x、ε_y和γ_{xy}不等于零，即：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}。$$

如将式（1-1）直接代入后，即可得到用中面挠度w表示的表达式，即：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-z\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\\
\gamma_{xy}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-z\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。
\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

三、应力

在这里所用的应力-应变关系式，即虎克定律的表达式，它们可以通过两个独立的物理常数（弹性模量E和波桑比ν）建立起联系。因此，导出这些关系式，实际上也是依照着把材料特性完全理想化了的假设。

根据假设3，考虑到正应力σ_z可以忽略不计，所以应力-应变关系式可简化成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y);\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x);\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}。
\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$