高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

复变函数

胡家延　彭旭麟　编

高等教育出版社

高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

复变函数

胡家延　彭旭麟　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据 1981 年 12 月教育部审订的高等工业学校《工程数学函授教学大纲(草案)》编写的。

全书共分七章，包括复数、复变函数、解析函数、积分、台劳级数与罗朗级数、留数、保角映射。

每章开头有学习要点，指出该章的主要内容。每章之末有小结，包括该章的基本内容与基本要求，学习方法，解题方法的指导，也谈到相关内容的对比、联系与区别。

本书还安排了适量的思考题、练习题，复习思考题，综合题及阶段测验题。思考题、练习题，阶段测验题和综合题大部分给了答案或提示，便于读者复习和自我检查。

本书在编排上循序渐进，由浅入深，在叙述上讲解清楚，层次分明，通俗易懂。另外，除了在正文中有例题外，在小结后的演题示例中，还安排了适量的例题，它们对阐明基本概念，帮助理解重点内容，培养解题技能等方面会有所裨益。

本书可作为高等工业学校函授教材兼作高等教育自学用书。

高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

复 变 函 数

胡家延 彭旭麟 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张 9.5 字数 228,000

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数 00,001—7,200

书号 13010·01259 定价 1.55元

前　言

本书系遵照1981年12月教育部审订的高等工业学校《工程数学函授教学大纲(草案)》编写的．由彭旭麟主编、胡家延编写．

本书可作为高等工业学校函授教材兼作高等教育自学用书．

本书在福州审稿会议上由西安交通大学陆庆乐教授主审，福州大学王启泰和郭有龙、西安交通大学叶维平、北方交通大学曾贻德、北京钢铁学院姚宗贤、北京邮电学院函授分院彭绍明、中南矿冶学院曹德濂、哈尔滨建筑工程学院胡适丽等老师参加了审阅．与会者提出了不少宝贵意见和建议，在此我们表示衷心感谢．限于编者水平，难免还有谬误之处，请读者批评指正．

编者

1985年7月

说　明

十六世纪中叶，意大利的卡丹诺(G. Cardano)在求解三次方程时，首先引入了负数开平方的形式记号．十七世纪，笛卡尔(R. Descartes)把负数开平方的形式记号取名为“虚数”，意思是“虚假的数”，以和“真正的数”——实数相区别．

十八世纪初，随着微积分的建立和发展，挪威的威塞尔（C. Wessel)、法国的阿尔甘(J.R.Argand)以及德国数学家高斯(K.F. Gauss）等人对复数给以几何解释，并把复数与平面矢量对应起来．瑞士数学家欧拉（L. Euler）于1777年系统地建立了复数理论，用“i”作为虚数单位的记号，发现了复指数函数与实的三角函数之间的关系，给出了复变函数论的一些定理，并运用于水力学、地图制图学上．至此，复数才得到了人们的承认．以后又经柯西(A.Cauchy)、黎曼(B.Riemann)、维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)等人的工作，复变函数的理论便日趋完善，它不仅应用于理论物理、流体力学、弹性理论、天体力学、电磁学等学科中，而且在数学的其它分支中也得到广泛的应用，成为数学科学中的一个独立分支．

《复变函数论》研究的对象是复变量的复值函数，它是在复数域上来研究的．本书除讨论函数、极限、连续、微分、积分和级数外，还着重讨论重要的一类复变函数——解析函数的分析性质和几何性质．复变函数与实变量函数有许多共同点，但也有不同之处，有的甚至有很大差异．学习时要注意联系对比实变量函数中有关概念和方法，注意它们之间的相同点，同时更要分清它们的不同点，以帮助理解和掌握复变函数论的知识．

书中带有星号＊或排小号字的内容可根据需要选学．

目　录

第一章　复　　数

[学习要点]

1 复数和复平面的概念

2 复数的六种代数运算

3 复球面和扩大复平面的概念

第一节　复数的概念

§ 1.1　复数的定义

在实数范围内，方程

$$x^2+1=0$$

是没有根的．为研究这类方程，引入一个记号 i，规定

$$i^2=-1,$$

则知 i 是上述方程的一个根．这里，我们称 i 为**虚数单位**．

定义 1　设 x 和 y 是实数，则称 $x+iy$(或写成 $x+yi$)为**复数**，常用 z 表记，即

$$z=x+iy;$$

其中 x 称为复数 z 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}(z)$，y 称为复数 z 的**虚部**，记为$\mathrm{Im}(z)$，即

$$\mathrm{Re}(z)=x,\qquad \mathrm{Im}(z)=y.$$

当 $\mathrm{Im}(z)=y=0$时，规定复数 $z=x+0\cdot i=x$，此时复数 z 取实数值，因而实数是复数的一部分(即虚部为零的那一部分复数)．特别，$0+0\cdot i=0$，即当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零．

当 $\mathrm{Im}(z)=y\neq 0$ 时，把复数 $z=x+iy$ 叫做**虚数**，特别当 $\mathrm{Im}z=y\neq 0$ 而 $x=0$ 时，规定 $z=0+iy=iy$，这时把它叫做**纯虚数**.

定义 2 设复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$，如果它们的实部与虚部分别相等：$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，则称这两个复数**相等**，记为

$$z_1=z_2.$$

定义 3 实部相等，虚部符号相反的两个复数叫做**共轭复数**. 如果其中一个复数记为 z，则将其共轭复数记为 $\bar{z}$.

例如，$2+3i$ 和 $(-1)i$ 的共轭复数分别是 $2+(-3)i$ 和 $1\cdot i$（记作 i）.

显然，由定义 3 知 $\bar{\bar{z}}=z$. 特别，实数的共轭复数是该实数本身(为什么？)；反之，如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等，则这复数便是一个实数. 这是由于当设 $z=a+ib$ 时(其中 a,b 均为实数)，如果

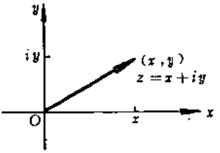

图 1

$$a+bi=a+(-b)i,$$

则由两复数相等的定义知

$$b=-b,$$

所以

$$b=0.$$

即 $z=a$ 是实数.

练习 1 化简 i^3, i^4, i^6, i^7, i^n.

练习 2 已知 $x+yi=(2x-1)+y^2i$，求 $z=x+iy$ 及 $\bar{z}$.

§ 1.2 复数的几何表示

由定义知道，复数 $z=x+iy$ 由实部 x 与虚部 y 唯一确定，因此它与有序实数对 (x,y) 成一一对应. 而有序实数对 (x,y) 又与平面直角坐标系中的点一一对应，从而可用平面上的点 $M(x,y)$ 作为复数 $z=x+iy$ 的几何表示. 实部 x 对应于点 M 的横坐标，虚部 y 对应于点 M 的纵坐标(图 1). 因此，若用平面上的点来

表示复数，则把 x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，并把这平面叫做**复平面**. 由于复数与复平面上的点是一一对应的，以后把“点 z”和“复数 z”作为同义词而不加区别. 如果把复数 $z=x+iy$ 的实部 x 与虚部 y 作为平面矢量在两坐标轴上的投影，那末复数 $z=x+iy$ 又可用平面矢量 $\{x,y\}$ 来表示，这里的矢量是自由的，即一个矢量经过平移后所得的矢量跟原来的矢量看作是相等的矢量. 因而凡是在坐标轴上的两投影分别相等的矢量都代表同一个复数，从而复数 $z=x+iy$ 又与矢量 $\{x,y\}$ 一一对应. 特别，当把任一矢量 $\{x,y\}$ 的起点移至原点时，所得矢量之终点坐标 x 与 y 恰好就是复数 $z=x+iy$ 的实部与虚部. 今后把“复数 z”对应的矢量叫做“矢量 z”，且把二者也看作同义词.

大家知道，平面上的点还可用极坐标 (r,θ) 来确定. 如果在复平面上引入极坐标，且使极点与原点 O 重合，极轴与正实轴重合. 这时我们可引入如下概念：

定义 4 点 z ($z\neq0$) 到原点 O 的距离 r 叫做复数 z 的**模**(也称为 z 的绝对值)，矢量 Oz 与极轴的夹角 θ 叫做复数 z 的**辐角**. z 的模和辐角分别记为 $|z|$ 和 $\mathrm{Arg}z$，即

$$r=|z|,\qquad \theta=\mathrm{Arg}z.$$

复数 0 的模为零，即 $|0|=0$，其辐角是不确定的.

任何不为零的复数 z 的辐角 $\mathrm{Arg}z$ 均有无穷多个值，彼此之间相差 2π 的整数倍. 通常把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，记为 $\arg z$. 于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

显然，虚部异于零的复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 关于实轴对称，它们的模相等而辐角主值互为相反数，即

$$|\bar{z}|=|z|,\arg\bar{z}=-\arg z.$$

任何非零实数作为一个复数都有辐角，正实数的辐角的主值是 0，而负实数的辐角的主值是 π.

思考题 1 “任何复数都有一个确定的模和辐角”，“两个复数相等的充分必要条件是它们的模和辐角分别相等”. 这两句话对不对？

由直角坐标与极坐标的关系(图 2)，立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系：

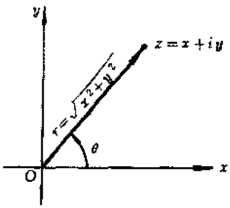

图 2

$$\begin{cases} r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\operatorname{Arg}z)=\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{1.1}$$

及

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases} \tag{1.2}$$

于是复数 z 又可表示为

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{1.3}$$

式(1.3)中的 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 通常称为复数 z 的**三角表示式**. 而复数 z 在直角坐标下的表示式 $x+iy$ 叫做 z 的**代数表示式**.

例 1 将复数 $z=\sqrt{3}+(-1)i$ 化为三角表示式.

解 因为 $x=\sqrt{3}$，$y=-1$，所以

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2.$$

又 z 在第四象限内，于是

$$\theta=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6},$$

所以

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

由于辐角的多值性，亦可表为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right],(k\text{ 为整数}).$$

思考题 2

(1) $\arg[-\sqrt{3}+(-1)i]$ 与 $\operatorname{arctg}\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}$是否相等?为什么?

(2) 能否由 $\operatorname{tg}(\operatorname{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$ 得出 $\operatorname{Arg}z=\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$ 和$\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$? 为什么?

练习 3 在复平面上作出与复数

$$-3+(-\sqrt{3})i,\ -1+\sqrt{3}i,\ 3+4i$$

对应的点，然后指出各复数的实部、虚部及模、辐角的主值. 再写出相应的三角表示式.

练习 4 写出 $1+\sin\varphi+i\cos\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$的三角表示式.

第二节 复数的代数运算

§2.1 复数的加、减法

1 加法

定义 5 复数$(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$叫做复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的和,记作 z_1+z_2,即

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \tag{1.4}$$

这样规定的运算叫做**加法**. 可以验证复数加法满足交换律:

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

及结合律:

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

2 减法

定义 6 设复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$,若复数 $z=x+iy$满足等式$z_2+z=z_1$,则把复数 z 叫做复数 z_1 与复数 z_2 的差,记作 z_1-z_2,即

$$z=z_1-z_2.$$

由此规定的运算叫做减法．可以验证：

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.5}$$

根据复数减法定义，$x+iy$ 的共轭复数 $x+i(-y)$ 可以写成 $x-iy$.

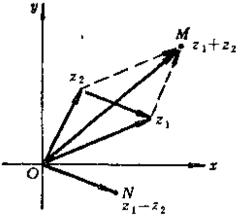

图 3

3 几何意义

由复数与平面矢量的一一对应关系，以及复数加、减法则与矢量的加、减法则的一致性，通过两矢量的和与差的几何作图法，在复平面中可以求出相应两复数的和 z_1+z_2 与差 z_1-z_2 的对应点．在图 3 中，以矢量 $\overrightarrow{Oz_1}$、$\overrightarrow{Oz_2}$ 为两边的平行四边形的两条对角线矢量 $\overrightarrow{OM}$ 及 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 就分别对应于复数 z_1+z_2 及 z_1-z_2．由于 $\overrightarrow{OM}$ 的起点为原点 O，因而终点 M 所对应的复数就是 z_1+z_2；而矢量 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 的起点不是原点，经平移得起点为原点 O 的矢量 $\overrightarrow{ON}$，则终点 N 所对应的复数就是 z_1-z_2.

从图 3 还可以看到：

(1) $|z_1-z_2|$ 表示复平面上两点 z_1 与 z_2 之间的距离．事实上，

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|&=|(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)|\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},\end{aligned}$$

这正是平面上两点距离的表达式．

(2) 由三角形三边的关系，有

$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，　　(分析证明参看例 8)

$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

思考题 3　上述两式中的等号何时成立？

练习 5　当 $z=x+iy$ 时，说明

$|z|\leqslant|x|+|y|$，$|z|\geqslant|x|$ 及 $|z|\geqslant|y|$

的几何意义.

练习 6 设 $z_1=2+3i, z_2=-4-i$。

(1) 求 z_1, z_2 的和与差;

(2) 在复平面上作出 z_1、z_2、z_1+z_2 及 z_1-z_2 对应的点;

(3) 求 z_1 与 z_2 之间的距离.

练习 7 设 $z_1=2+3i, z_2=-4-i, z_3=-3i, z_4=5$.

(1) 用几何作图法求 $z_1+z_2-z_3+z_4$ 在平面上所对应的点;

(2) 求 $|z_4-z_1|$.

练习 8 验证:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

(2) $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)=2\,\mathrm{Re}(\bar{z})$;

(3) $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)=-2i\,\mathrm{Im}(\bar{z})$.

练习 9 z 满足等式 $|z-z_0|=r$ ($r>0$, z_0 为常复数), 问点 z 在复平面上的轨迹是什么?

§ 2.2 复数的乘、除法

1 乘法

定义 7 复数 $(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$ 叫做两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的积, 记为 z_1z_2, 即

$$\begin{aligned} z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

由 (1.6) 规定的运算叫做**乘法**. 可以验证复数的乘法满足交换律:

$$z_1z_2=z_2z_1,$$

结合律:

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$$

及乘法对于加法的分配律:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

求两复数 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 的积, 不必死记定义式(1.6). 可

以认为它是两个二项式按分配律进行运算并注意到 $i^2=-1$ 所得的结果，请读者验证．由乘法定义还可验证 $a\cdot i=ai$（a 为实数）

例 2 计算 $(2+3i)(\overline{2+3i})-(4-3i)^2$．

解 $(2+3i)(\overline{2+3i})-(4-3i)^2$

$$=(2+3i)(2-3i)-(16-24i-9)$$

$$=4+9-7+24i=6+24i.$$

例 3 已知 $z=x+iy$，x、y 为实数，试用复数的代数式表示下列各式：

(1) $(z+1)(z-1)-3(z-2i)^2$；　　(2) $zx^2-2z^2x+z^3$．

解 (1) $(z+1)(z-1)-3(z-2i)^2$

$$=z^2-1-3(z^2-4iz-4)$$

$$=-2z^2+12iz+11$$

$$=-2(x+iy)^2+12i(x+iy)+11$$

$$=(-2x^2+2y^2-12y+11)+i(12x-4xy).$$

(2) $zx^2-2xz^2+z^3$

$$=z(x^2-2xz+z^2)$$

$$=z(x-z)^2$$

$$=(x+iy)(-iy)^2$$

$$=(x+iy)(-y^2)=-xy^2-iy^3.$$

练习 10 计算：

(1) $(2+3i)(1+4i)$；　　(2) $(1+i)(\overline{3+4i})(3+5i)$；

(3) $(1+i)^2-i(1-i)^3$．

练习 11 已知 $z=x+iy$，x、y 为实数，求 $\mathrm{Re}(z-2z^2+z^3)$ 及 $\mathrm{Im}(zx-z^2)$．

练习 12 证明：如果 z_1、z_2 中至少有一个为零，那末它们的乘积 $z_1z_2=0$．

练习 13 证明：

(1) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；　　(2) $z\bar{z}=|z|^2$．