

高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

复变函数

胡家延 彭旭麟 编



高等教育出版社

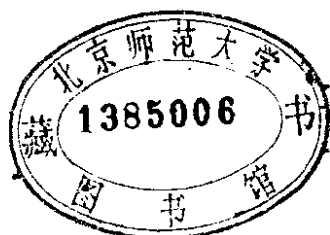
高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

复 变 函 数

胡家延 彭旭麟 编

741/210/26



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据1981年12月教育部审订的高等工业学校《工程数学函授教学大纲(草案)》编写的。

全书共分七章,包括复数、复变函数、解析函数、积分、台劳级数与罗朗级数、留数、保角映射。

每章开头有学习要点,指出该章的主要内容。每章之末有小结,包括该章的基本内容与基本要求,学习方法,解题方法的指导,也谈到相关内容的对比、联系与区别。

本书还安排了适量的思考题、练习题、复习思考题,综合题及阶段测验题。思考题、练习题、阶段测验题和综合题大部分给了答案或提示,便于读者复习和自我检查。

本书在编排上循序渐进,由浅入深;在叙述上讲解清楚,层次分明,通俗易懂。另外,除了在正文中有例题外,在小结后的演题示例中,还安排了适量的例题,它们对阐明基本概念,帮助理解重点内容,培养解题技能等方面会有所裨益。

本书可作为高等工业学校函授教材兼作高等教育自学用书。

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

复 变 函 数

胡家廷 彭旭麟 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张9.5 字数228,000

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数 00,001—7,200

书号 13010·01259 定价1.55元

701/210/26

前 言

本书系遵照1981年12月教育部审订的高等工业学校《工程数学函授教学大纲(草案)》编写的,由彭旭麟主编、胡家延编写。

本书可作为高等工业学校函授教材兼作高等教育自学用书。

本书在福州审稿会议上由西安交通大学陆庆乐教授主审,福州大学王启泰和郭有龙、西安交通大学叶维平、北方交通大学曾贻德、北京钢铁学院姚宗贤、北京邮电学院函授分院彭绍明、中南矿冶学院曹德德、哈尔滨建筑工程学院胡适丽等老师参加了审阅。与会者提出了不少宝贵意见和建议,在此我们表示衷心感谢。限于编者水平,难免还有谬误之处,请读者批评指正。

编者

1985年7月

说 明

十六世纪中叶,意大利的卡丹诺(G. Cardano)在求解三次方程时,首先引入了负数开平方的形式记号. 十七世纪,笛卡尔(R. Descartes)把负数开平方的形式记号取名为“虚数”,意思是“虚假的数”,以和“真正的数”——实数相区别.

十八世纪初,随着微积分的建立和发展,挪威的威塞尔(C. Wessel)、法国的阿尔甘(J.R. Argand)以及德国数学家高斯(K. F. Gauss)等人对复数给以几何解释,并把复数与平面矢量对应起来. 瑞士数学家欧拉(L. Euler)于1777年系统地建立了复数理论,用“ i ”作为虚数单位的记号,发现了复指数函数与实的三角函数之间的关系,给出了复变函数论的一些定理,并运用于水力学、地图制图学上. 至此,复数才得到了人们的承认. 以后又经柯西(A. Cauchy)、黎曼(B. Riemann)、维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)等人的工作,复变函数的理论便日趋完善,它不仅应用于理论物理、流体力学、弹性理论、天体力学、电磁学等学科中,而且在数学的其它分支中也得到广泛的应用,成为数学科学中的一个独立分支.

《复变函数论》研究的对象是复变量的复值函数,它是在复数域上来研究的. 本书除讨论函数、极限、连续、微分、积分和级数外,还着重讨论重要的一类复变函数——解析函数的分析性质和几何性质. 复变函数与实变量函数有许多共同点,但也有不同之处,有的甚至有很大差异. 学习时要注意联系对比实变量函数中有关概念和方法,注意它们之间的相同点,同时更要分清它们的不同点,以帮助理解和掌握复变函数论的知识.

书中带有星号*或排小号字的内容可根据需要选学.

目 录

第一章 复数	1
第一节 复数的概念	1
§ 1.1 复数的定义	1
§ 1.2 复数的几何表示	2
第二节 复数的代数运算	5
§ 2.1 复数的加、减法	5
§ 2.2 复数的乘、除法	7
§ 2.3 积、商的模与辐角	11
§ 2.4 复数的开方	17
第三节 复球面	21
小 结	22
复习思考题	23
综合题	24
第二章 复变函数	26
第一节 复变量	26
§ 1.1 曲线	26
§ 1.2 区域	31
第二节 复变函数的概念	36
§ 2.1 复变函数的定义	36
§ 2.2 复变函数的几何意义	37
第三节 复变函数的极限和连续性	45
§ 3.1 复变函数的极限	45
§ 3.2 复变函数的连续性	48
小 结	50
复习思考题	54
综合题	55

第三章 解析函数	57
第一节 解析函数的概念	57
§ 1.1 复变函数的导数	57
§ 1.2 解析函数的定义	61
第二节 函数解析的充分必要条件	62
第三节 解析函数与调和函数	67
§ 3.1 调和函数的概念	67
§ 3.2 共轭调和函数	69
§ 3.3 解析函数与调和函数的关系	69
第四节 初等解析函数	73
§ 4.1 指数函数	74
§ 4.2 对数函数	80
§ 4.3 三角函数	84
§ 4.4 反三角函数	87
§ 4.5 幂函数	88
§ 4.6 双曲函数与反双曲函数	91
小 结	92
复习思考题	100
综合题	100
第四章 积分	103
第一节 复变函数积分的概念	103
§ 1.1 有向曲线	103
§ 1.2 复变函数积分的定义	104
§ 1.3 积分存在的充分条件	105
§ 1.4 复变函数积分的性质	108
§ 1.5 积分的计算	110
第二节 柯西积分定理	117
§ 2.1 柯西基本定理	117
§ 2.2 原函数	118

§ 2.3 柯西基本定理在复合闭路上的推广	121
第三节 柯西积分公式及高阶导数公式	125
§ 3.1 柯西积分公式	125
§ 3.2 高阶导数公式	129
小 结	135
复习思考题	140
综合题	141
第一阶段测验题(一、二、三、四章)	143
第五章 台劳级数与罗朗级数	145
第一节 复数项级数	145
§ 1.1 复数项级数的概念	145
§ 1.2 复变函数项级数	150
§ 1.3 幂级数	151
第二节 解析函数的台劳级数	157
§ 2.1 解析函数的台劳展开式	157
§ 2.2 解析函数的零点	165
第三节 解析函数的罗朗级数	167
§ 3.1 含正、负整次幂的级数	167
§ 3.2 解析函数的罗朗展开式	170
第四节 孤立奇点	178
§ 4.1 孤立奇点及其分类	178
§ 4.2 孤立奇点类型的判别	179
§ 4.3 极点与零点的关系	183
小 结	185
复习思考题	191
综合题	192
第六章 留数	195
第一节 留数概念及基本定理	195
§ 1.1 留数的概念	195

§ 1.2	留数基本定理	199
§ 1.3	函数在极点上的留数	201
*第二节	应用留数计算实积分	207
§ 2.1	有理式 $R(\cos \theta, \sin \theta)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的定积分	207
§ 2.2	既有有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分	209
§ 2.3	$\frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分	212
小 结		213
复习思考题		221
综合题		221
第七章	保角映射	223
第一节	保角映射的概念	223
§ 1.1	导数的几何意义	223
§ 1.2	保角映射的定义	228
§ 1.3	保角映射的两个基本问题	231
第二节	分式线性映射	235
§ 2.1	线性映射	236
§ 2.2	倒数映射	238
§ 2.3	分式线性映射的特性	241
§ 2.4	唯一确定分式线性映射的条件	242
§ 2.5	分式线性映射的应用	246
第三节	指数函数及幂函数所确定的映射	253
§ 3.1	指数函数确定的映射	253
§ 3.2	幂函数确定的映射	256
小 结		260
复习思考题		264
综合题		265
第二阶段测验题(五、六、七章)		267
答 案		269

第一章 复数

【学习要点】

- 1 复数和复平面的概念
- 2 复数的六种代数运算
- 3 复球面和扩大复平面的概念

第一节 复数的概念

§ 1.1 复数的定义

在实数范围内, 方程

$$x^2 + 1 = 0$$

是没有根的. 为研究这类方程, 引入一个记号 i , 规定

$$i^2 = -1,$$

则知 i 是上述方程的一个根. 这里, 我们称 i 为虚数单位.

定义 1 设 x 和 y 是实数, 则称 $x + iy$ (或写成 $x + yi$) 为复数, 常用 z 表记, 即

$$z = x + iy,$$

其中 x 称为复数 z 的实部, 记为 $\operatorname{Re}(z)$, y 称为复数 z 的虚部, 记为 $\operatorname{Im}(z)$, 即

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

当 $\operatorname{Im}(z) = y = 0$ 时, 规定复数 $z = x + 0 \cdot i = x$, 此时复数 z 取实数值, 因而实数是复数的一部分 (即虚部为零的那一部分复数). 特别, $0 + 0 \cdot i = 0$, 即当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零.

当 $\operatorname{Im}(z) = y \neq 0$ 时, 把复数 $z = x + iy$ 叫做 **虚数**, 特别当 $\operatorname{Im} z = y \neq 0$ 而 $x = 0$ 时, 规定 $z = 0 + iy = iy$, 这时把它叫做**纯虚数**.

定义 2 设复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$, 如果它们的实部与虚部分别相等: $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, 则称这两个复数相等, 记为

$$z_1 = z_2.$$

定义 3 实部相等, 虚部符号相反的两个复数叫做**共轭复数**. 如果其中一个复数记为 z , 则将其共轭复数记为 $\bar{z}$.

例如, $2 + 3i$ 和 $(-1)i$ 的共轭复数分别是 $2 + (-3)i$ 和 $1 \cdot i$ (记作 i).

显然, 由定义 3 知 $\bar{\bar{z}} = z$. 特别, 实数的共轭复数是该实数本身(为什么?); 反之, 如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等, 则这复数便是一个实数. 这是由于当设 $z = a + ib$ 时(其中 a, b 均为实数), 如果

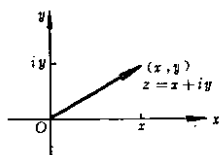


图 1

$$a + bi = a + (-b)i,$$

则由两复数相等的定义知

$$b = -b,$$

所以

$$b = 0.$$

即 $z = a$ 是实数.

练习 1 化简 i^3, i^4, i^6, i^7, i^n .

练习 2 已知 $x + yi = (2x - 1) + y^2i$, 求 $z = x + iy$ 及 $\bar{z}$.

§ 1.2 复数的几何表示

由定义知道, 复数 $z = x + iy$ 由实部 x 与虚部 y 唯一确定, 因此它与有序实数对 (x, y) 成一一对应. 而有序实数对 (x, y) 又与平面直角坐标系中的点一一对应, 从而可用平面上的点 $M(x, y)$ 作为复数 $z = x + iy$ 的几何表示. 实部 x 对应于点 M 的横坐标, 虚部 y 对应于点 M 的纵坐标(图 1). 因此, 若用平面上的点来

表示复数, 则把 x 轴称为实轴, y 轴称为虚轴, 并把这平面叫做复平面。由于复数与复平面上的点是一一对应的, 以后把“点 z ”和“复数 z ”作为同义词而不加区别。如果把复数 $z = x + iy$ 的实部 x 与虚部 y 作为平面矢量在两坐标轴上的投影, 那末复数 $z = x + iy$ 又可用平面矢量 $\{x, y\}$ 来表示, 这里的矢量是自由的, 即一个矢量经过平移后所得的矢量跟原来的矢量看作是相等的矢量。因而凡是在坐标轴上的两投影分别相等的矢量都代表同一个复数, 从而复数 $z = x + iy$ 又与矢量 $\{x, y\}$ 一一对应。特别, 当把任一矢量 $\{x, y\}$ 的起点移至原点时, 所得矢量之终点坐标 x 与 y 恰好就是复数 $z = x + iy$ 的实部与虚部。今后把“复数 z ”对应的矢量叫做“矢量 z ”, 且把二者也看作同义词。

大家知道, 平面上的点还可用极坐标 (r, θ) 来确定。如果在复平面上引入极坐标, 且使极点与原点 O 重合, 极轴与正实轴重合。这时我们可引入如下概念:

定义 4 点 z ($z \neq 0$) 到原点 O 的距离 r 叫做复数 z 的模(也称为 z 的绝对值), 矢量 Oz 与极轴的夹角 θ 叫做复数 z 的辐角。 z 的模和辐角分别记为 $|z|$ 和 $\text{Arg}z$, 即

$$r = |z|, \quad \theta = \text{Arg}z.$$

复数 0 的模为零, 即 $|0| = 0$, 其辐角是不确定的。

任何不为零的复数 z 的辐角 $\text{Arg}z$ 均有无穷多个值, 彼此之间相差 2π 的整数倍。通常把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\text{Arg}z$ 的主值, 记为 $\arg z$ 。于是

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

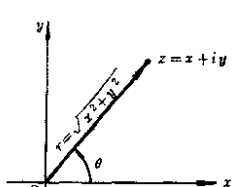
显然, 虚部异于零的复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 关于实轴对称, 它们的模相等而辐角主值互为相反数, 即

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

任何非零实数作为一个复数都有辐角, 正实数的辐角的主值是 0 , 而负实数的辐角的主值是 π 。

思考题 1 “任何复数都有一个确定的模和辐角”，“两个复数相等的充分必要条件是它们的模和辐角分别相等”。这两句话对不对？

由直角坐标与极坐标的关系(图 2)，立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系：



$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.1)$$

及

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad (1.2)$$

图 2

于是复数 z 又可表示为

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.3)$$

式(1.3)中的 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 通常称为复数 z 的三角表示式。而复数 z 在直角坐标下的表示式 $x + iy$ 叫做 z 的代数表示式。

例 1 将复数 $z = \sqrt{3} + (-1)i$ 化为三角表示式。

解 因为 $x = \sqrt{3}$, $y = -1$, 所以

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2.$$

又 z 在第四象限内，于是

$$\theta = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6},$$

所以

$$z = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

由于辐角的多值性，亦可表为

$$z = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right], (k \text{ 为整数}).$$

思考题 2

(1) $\arg[-\sqrt{3} + (-1)i]$ 与 $\operatorname{arctg} \frac{-1}{-\sqrt{3}}$ 是否相等? 为什么?

(2) 能否由 $\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}$ 得出 $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ 和 $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$? 为什么?

练习 3 在复平面上作出与复数

$$-3 + (-\sqrt{3})i, -1 + \sqrt{3}i, 3 + 4i$$

对应的点, 然后指出各复数的实部、虚部及模、辐角的主值, 再写出相应的三角表示式.

练习 4 写出 $1 + \sin \varphi + i \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 的三角表示式.

第二节 复数的代数运算

§ 2.1 复数的加、减法

1 加法

定义 5 复数 $(x_1 - x_2) + i(y_1 + y_2)$ 叫做复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的**和**, 记作 $z_1 + z_2$, 即

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.4)$$

这样规定的运算叫做**加法**. 可以验证复数加法满足交换律:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

及结合律:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

2 减法

定义 6 设复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$, 若复数 $z = x + iy$ 满足等式 $z_2 + z = z_1$, 则把复数 z 叫做复数 z_1 与复数 z_2 的**差**, 记作 $z_1 - z_2$, 即

$$z = z_1 - z_2.$$

由此规定的运算叫做减法。可以验证：

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.5)$$

根据复数减法定义， $x + iy$ 的共轭复数 $x + i(-y)$ 可以写成

$$x - iy.$$

3 几何意义

由复数与平面矢量的一一对应关系，以及复数加、减法则与矢量的加、减法则的一致性，通过两矢量的和与差的几何作图法，在复平面中可以求出相应两复数的和 $z_1 + z_2$ 与差 $z_1 - z_2$ 的对应点。

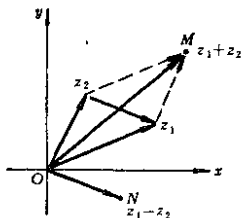


图 3

在图 3 中，以矢量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 、 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两边的平行四边形的两条对角线矢量 $\overrightarrow{OM}$ 及 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 就分别对应于复数 $z_1 + z_2$ 及 $z_1 - z_2$ 。由于 $\overrightarrow{OM}$ 的起点为原点 O ，因而终点 M 所对应的复数就是 $z_1 + z_2$ ；而矢量 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 的起点不是原点，经平移得起点为原点 O 的矢量 $\overrightarrow{ON}$ ，则终点 N 所对应的复数就是 $z_1 - z_2$ 。

从图 3 还可以看到：

(1) $|z_1 - z_2|$ 表示复平面上两点 z_1 与 z_2 之间的距离。事实上，

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \end{aligned}$$

这正是平面上两点距离的表达式。

(2) 由三角形三边的关系，有

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (\text{分析证明参看例 8})$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

思考题 3 上述两式中的等号何时成立？

练习 5 当 $z = x + iy$ 时，说明

$$|z| \leq |x| + |y|, |z| \geq |x| \text{ 及 } |z| \geq |y|$$

的几何意义.

练习 6 设 $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -4 - i$.

- (1) 求 z_1, z_2 的和与差;
- (2) 在复平面上作出 $z_1, z_2, z_1 + z_2$ 及 $z_1 - z_2$ 对应的点;
- (3) 求 z_1 与 z_2 之间的距离.

练习 7 设 $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -4 - i, z_3 = -3i, z_4 = 5$.

- (1) 用几何作图法求 $z_1 + z_2 - z_3 + z_4$ 在平面上所对应的点;
- (2) 求 $|z_4 - z_1|$.

练习 8 验证:

- (1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
- (2) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2 \operatorname{Re}(\bar{z})$;
- (3) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) = -2i \operatorname{Im}(\bar{z})$.

练习 9 z 满足等式 $|z - z_0| = r (r > 0, z_0 \text{ 为常复数})$, 问点 z 在复平面上的轨迹是什么?

§ 2.2 复数的乘、除法

1 乘法

定义 7 复数 $(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$ 叫做两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的积, 记为 z_1z_2 , 即

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \quad (1.6)$$

由 (1.6) 规定的运算叫做乘法. 可以验证复数的乘法满足交换律:

$$z_1z_2 = z_2z_1,$$

结合律:

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$$

及乘法对于加法的分配律:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

求两复数 $x_1 + iy_1$ 与 $x_2 + iy_2$ 的积, 不必死记定义式 (1.6). 可

以认为它是两个二项式按分配律进行运算并注意到 $i^2 = -1$ 所得的结果, 请读者验证. 由乘法定义还可验证 $a \cdot i = ai$ (a 为实数)

例 2 计算 $(2+3i)(2+3i) - (4-3i)^2$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & (2+3i)(2+3i) - (4-3i)^2 \\ &= (2+3i)(2-3i) - (16-24i+9) \\ &= 4+9-7+24i-6+24i.\end{aligned}$$

例 3 已知 $z = x + iy$, x, y 为实数, 试用复数的代数式表示下列各式:

$$(1) (z+1)(z-1) - 3(z-2i)^2; \quad (2) zx^2 - 2z^2x + z^3.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad & (z+1)(z-1) - 3(z-2i)^2 \\ &= z^2 - 1 - 3(z^2 - 4iz - 4) \\ &= -2z^2 + 12iz + 11 \\ &= -2(x+iy)^2 + 12i(x+iy) + 11 \\ &= (-2x^2 + 2y^2 - 12y + 11) + i(12x - 4xy). \\ (2) \quad & zx^2 - 2xz^2 + z^3 \\ &= z(x^2 - 2xz + z^2) \\ &= z(x-z)^2 \\ &= (x+iy)(-iy)^2 \\ &= (x+iy)(-y^2) = -xy^2 - iy^3.\end{aligned}$$

练习 10 计算:

$$\begin{aligned}(1) \quad & (2+3i)(1+4i); \quad (2) \quad (1+i)(3+4i)(3+5i); \\ (3) \quad & (1+i)^3 - i(1-i)^3.\end{aligned}$$

练习 11 已知 $z = x + iy$, x, y 为实数, 求 $\operatorname{Re}(z - 2z^2 + z^3)$ 及 $\operatorname{Im}(zx - z^2)$.

练习 12 证明: 如果 z_1, z_2 中至少有一个为零, 那末它们的乘积 $z_1 z_2 = 0$.

练习 13 证明:

$$(1) \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \quad (2) \quad z \bar{z} = |z|^2.$$