

高等学校教材

数学分析讲义

下 册

(本科用)

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

下 册

(本科用)

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

本书第一版是吉林师大数学系数学分析教研室编《数学分析讲义》，是为高等函授院校数学系开设数学分析课编写的。此次修订，编者署名改为刘玉珪、傅沛仁；并参照1980年5月理科数学、力学教材编委会审订的高等师范院校《数学分析大纲》，对第一版内容作了小量增删；在体例、格式、叙述等方面变动较大；在每节后增配了练习题，较难题作了提示，书末附有计算题的答案。

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学。可作高等师范本科与专科的教材（上册本科与专科共用，下册分本科用本与专科用本两种），也可作高等理科院校的函授教材及高等教育自学用书。

为了更好地保证教学效果，未经我社和编者同意，请不要为本书习题配备题解公开出版。

第二版修订稿经四川大学秦卫平副教授审查。

数学分析讲义

下 册

刘玉珪 傅沛仁 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.25 字数 340,000

1966年3月第1版 1982年6月第2版 1986年4月第6次印刷

印数115,531—129,830

书号 13010·0739 定价 2.40元

目 录

第九章 级数	(1)
§ 9.1. 数值级数	(1)
一、收敛与发散概念(1) 二、收敛级数的性质(6) 三、同号级数(9)	
四、变号级数(19) 五、绝对收敛级数的性质(31) 练习题 9.1(38)	
§ 9.2. 函数级数	(42)
一、函数级数的收敛域(42) 二、一致收敛概念(44) 三、一致收敛判别法(49)	
四、和函数的分析性质(56) 五、极限函数的分析性质(65) 练习题 9.2(67)	
§ 9.3. 幂级数	(70)
一、幂级数的收敛域(71) 二、幂级数和函数的分析性质(75) 三、泰勒级数	
(80) 四、例(84) 五、指数函数与三角函数的分析定义(89) 练习题 9.3(97)	
§ 9.4. 傅立叶级数	(100)
一、傅立叶级数(100) 二、几个引理(104) 三、收敛定理(109) 四、奇偶函	
数的傅立叶级数(115) 五、以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数(121) 六、傅立	
叶级数的一致收敛(123) 练习题 9.4(129)	
第十章 多元函数微分学	(132)
§ 10.1. 多元函数	(132)
一、平面点集(132) 二、坐标平面的连续性(136) 三、多元函数概念(139)	
练习题 10.1(143)	
§ 10.2. 二元函数的极限与连续	(144)
一、二元函数的极限(144) 二、二元函数的连续性(149) 练习题 10.2(154)	
§ 10.3. 多元函数微分法	(156)
一、偏导数(156) 二、中值定理(160) 三、复合函数微分法(161) 四、全微	
分(165) 五、空间曲线的切线与曲面的切平面(I)(169) 六、方向导数(174)	
练习题 10.3(177)	
§ 10.4. 二元函数的泰勒公式	(180)
一、高阶偏导数(180) 二、二元函数的泰勒公式(185) 三、二元函数的极值	
(189) 练习题 10.4(197)	
第十一章 隐函数	(201)
§ 11.1. 隐函数的存在性	(201)
一、隐函数概念(201) 二、由一个方程确定的隐函数(204) 三、由方程组确	
定的隐函数(210) 练习题 11.1(218)	
§ 11.2. 函数行列式	(221)

一、函数行列式(221) 二、函数行列式的性质(223) 三、空间曲线的切线与曲面的切平面(II)(226) 练习题 11.2(229)	
§ 11.3. 条件极值	(230)
一、条件极值(230) 二、拉格朗日乘数法(232) 三、例(237) 练习题 11.3 (241)	
第十二章 广义积分与含参变量的积分	(243)
§ 12.1. 无穷积分	(243)
一、无穷积分的收敛与发散概念(243) 二、无穷积分与级数(247) 三、无穷积分的性质(249) 四、无穷积分的收敛判别法(252) 练习题 12.1(258)	
§ 12.2. 瑕积分	(260)
一、瑕积分收敛与发散概念(260) 二、瑕积分的收敛判别法(263) 练习题 12.2(267)	
§ 12.3. 含参变量的积分	(269)
一、含参变量的有限积分(269) 二、例(I)(274) 三、含参变量的无穷积分(279) 四、例(II)(287) 五、 Γ 函数与 B 函数(291) 六、例(III)(295) 练习题 12.3(297)	
第十三章 重积分	(302)
§ 13.1. 二重积分	(302)
一、曲顶柱体的体积(302) 二、二重积分概念(304) 三、二重积分的性质(308) 四、二重积分的计算(310) 五、二重积分的变量替换(320) 六、曲面的面积(327) 练习题 13.1(333)	
§ 13.2. 三重积分	(337)
一、三重积分概念(337) 二、三重积分的计算(339) 三、三重积分的变量替换(342) 四、简单应用(349) 练习题 13.2(353)	
第十四章 曲线积分与曲面积分	(357)
§ 14.1. 曲线积分	(357)
一、第一型曲线积分(357) 二、第二型曲线积分(365) 三、第一型与第二型曲线积分的关系(373) 四、格林公式(375) 五、曲线积分与路线无关的条件(383) 练习题 14.1(389)	
§ 14.2. 曲面积分	(393)
一、第一型曲面积分(393) 二、第二型曲面积分(397) 三、奥高公式(404) 四、斯托克斯公式(409) 练习题 14.2(416)	
§ 14.3. 场论初步	(420)
一、梯度(420) 二、散度(423) 三、旋度(427) 四、微分算子(434) 练习题 14.3(435)	
练习题答案	(437)

第九章 级数

级数是研究函数的一个重要工具。在抽象理论与应用学科中,级数都处于重要的地位。这是因为,一方面能够借助级数表示很多有用的非初等函数,例如,有些微分方程的解不是初等函数,但其解可用级数表示出来,等等;另一方面又可将函数表为级数,从而能够借助于级数研究这些函数,例如,用幂级数研究初等超越函数与非初等函数,以及实数的近似计算,等等。

§ 9.1. 数值级数

一、收敛与发散概念

如果有数列 $\{u_n\}$,即

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (2)$$

或简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

称为数值级数,简称级数。 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 都称为级数(2)的项, u_n 称为级数(2)的第 n 项或通项。

级数(2)是无限多个数的和。我们只会计算有限个数的和,不仅不会计算无限多个数的和,甚至不知道何谓无限多个数的和。因此,无限多个数的和是一个未知的新概念。这个新概念也不是孤立的,它与我们已知的有限个数的和联系着。不难想到,由有限个

数的和转化到“无限多个数的和”可以借助极限这个工具来实现。

设级数(2)前 n 项的和是 S_n , 即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

或

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

称为级数(2)的 n 项部分和。显然, 对给定级数(2), 其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的。于是, 级数(2)对应着一个部分和数列 $\{S_n\}$, 即

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

定义 如果级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

称级数(2)收敛, 并称 S 是级数(2)的和, 表为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 称级数(2)发散, 此时级数(2)没有和。

由此可知, 级数的收敛与发散是借助于级数的部分和数列的收敛与发散定义的。于是, 讨论级数的各种性质都是借助于讨论该级数的部分和数列进行。因此, 研究级数及其和数只不过是研究数列及其极限的一种新形式。这个新形式并不是数列极限的简单重复, 它使我们在处理多种不同形式的极限问题中, 具有更大的灵活性。

例1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性^①。其中 $a \neq 0$, r 是公比。

解 1) 当 $|r| \neq 1$ 时, 已知几何级数的 n 项部分和 S_n 是

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

(i) 当 $|r| < 1$ 时, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

因此, 当 $|r| < 1$ 时, 几何级数收敛, 其和是 $\frac{a}{1 - r}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

(ii) 当 $|r| > 1$ 时, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \infty.$$

因此, 当 $|r| > 1$ 时, 几何级数发散。

2) 当 $|r| = 1$ 时, 有两种情况:

(i) 当 $r = 1$ 时, 几何级数是

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ 个}} = na.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty \quad (a \neq 0),$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散。

(ii) 当 $r = -1$ 时, 几何级数是

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots.$$

① 敛散性是指收敛与发散。下同。

② 见 § 2.1 例 4, 当 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 。

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ a, & \text{当 } n \text{ 是奇数,} \end{cases}$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

因此, 当 $|r|=1$ 时, 几何级数发散.

综上所述, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 当 $|r| < 1$ 时收敛, 其和是

$\frac{a}{1-r}$; 当 $|r| \geq 1$ 时发散.

例 2. 证明, 级数

$$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$$

收敛, 并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right).$$

级数的 n 项部分和 S_n 是

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}.$$

于是, 级数收敛, 其和是 $\frac{1}{5}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}.$$

例 3. 证明, 调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的.

证明 因为调和级数的每项都是正数, 所以部分和数列 $\{S_n\}$ 是严格增加的. 讨论子数列 $\{S_{2^m}\}$:

$$S_2, S_4, S_8, \cdots, S_{2^m}, \cdots.$$

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2^1 \text{ 项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ 项}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ 项}},$$

其中每个括号内的和数都大于 $\frac{1}{2}$. 事实上,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

.....

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m} > 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}.$$

于是

$$S_{2^m} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m \uparrow} = 1 + \frac{m}{2}.$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2^m} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{2}\right) = +\infty,$$

即 $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2^m} = +\infty$. 对任意自然数 $n \geq 2$, 总存在唯一的自然数 m , 使 $2^{m-1} \leq n < 2^m$, 且有

$$S_{2^{m-1}} \leq S_n < S_{2^m},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $m \rightarrow \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 即调和级数是发散的.

二、收敛级数的性质

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的.

因此, 数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件. 回忆数列 $\{S_n\}$ 的柯西收敛准则: “数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 对任意自然数 p , 有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.” 由于 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和, 而

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

于是, 有下面级数的柯西收敛准则:

定理 1. (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 对任意自然数 p , 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

根据定理 1 的必要性, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 特别是当 $p=1$ 时, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|u_{n+1}| < \varepsilon$. 于是, 有

推论 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

推论 1 的等价命题是, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如, 级数

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \cdots + \frac{n}{100 \cdot n + 1} + \cdots$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1} = \frac{1}{100} \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1}$ 发散.

注 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散. 例如, 调和级数(见例 3)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 1 指出, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的充分远 (即 $n > N$) 的任意片段 (即对任意 p , $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$) 的绝对值可以任意小. 由此可见, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关, 而与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 任意指定的有限个项无关. 于是, 又有

推论 2. 若去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项, 则不改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

例如, 去掉发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前面 100 项, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100+n} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{100+n} + \cdots$$

也是发散的.

根据数列的极限运算定理可得到级数的运算定理:

定理 2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛, 其和是 cS , 其中 c 是常数.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与 S'_n , 有

$$\begin{aligned} S'_n &= cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n \\ &= c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \\ &= cS_n. \end{aligned}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = cS,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 其和是 cS . \square

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)具有分配性.

定理 3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 其和分别是 A 与 B ,

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛, 其和是 $A \pm B$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的 n 项部分和分别

是 A_n, B_n 与 C_n , 有

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) \\ &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 其和是 $A \pm B$. \square

三、同号级数

同号级数是指级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的每一项 u_n 的符号是非负或非正. 如果 $u_n \geq 0 (n=1, 2, \cdots)$, 称级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**正项级数**; 如果 $u_n \leq 0 (n=1, 2, \cdots)$, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**负**

项级数.

将负项级数每项乘以 -1 , 负项级数就变成了正项级数, 由定理 2 知, 负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是, 讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此, 下面我们只讨论正项级数敛散性的判别方法.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 则此级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的, 即

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots.$$

根据 § 2.2 公理, 我们有判别正项级数收敛性的定理:

定理 4. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件是, 它的部分

和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 4. 证明, 正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

是收敛的.

证明 已知 $\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-1 \text{ 个}}} = \frac{1}{2^{n-1}}, n=2, 3, \dots$.

于是, 对任意 n , 有

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 是收敛的.

例 5. 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性, 其中 p 是任意实数. 此级数称为**广义调和级数**, 亦称 p -级数.

解 广义调和级数的敛散性与数 p 有关, 下面分三种情况讨论:

1) 当 $p=1$ 时, 广义调和级数就是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 已知调和级数发散, 即广义调和级数发散.

2) 当 $p < 1$ 时, 对任意自然数 n , 总有

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}.$$

设广义调和级数与调和级数的 n 项部分和分别是 S'_n 与 S_n ,
有

$$S'_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n.$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = +\infty$, 即广义调和级数发散.

3) 当 $p > 1$ 时, 不难证明下列不等式

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] \textcircled{1}.$$

有

$$\begin{aligned} S'_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} \right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < 1 + \frac{1}{p-1} \\ &= \frac{p}{p-1}, \end{aligned}$$

① 应用微分中值定理, 函数 $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ 在区间 $[n-1, n]$ 上 ($p > 1, n > 2$), 有

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{p-1}{(n-1+\theta)^p}, \quad 0 < \theta < 1$$

或

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} > \frac{p-1}{n^p},$$

即

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right].$$

即广义调和级数的部分和数列 $\{S'_n\}$ 有上界, 于是广义调和级数收敛.

综上所述, 广义调和级数, 当 $p \leq 1$ 时发散; 当 $p > 1$ 时收敛.

从上述二例看到, 判别正项级数的敛散性, 常将其通项与某个已知的正项级数的通项进行比较, 再应用定理 4 判别其敛散性. 于是, 有下面的正项级数比较原则:

定理 5. (比较判别法) 对两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 若存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时, 有

$$u_n \leq c v_n,$$

其中 c 是正常数. 1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明 根据定理 1 的推论 2, 改变级数前面有限个项并不改变级数的敛散性. 因此, 不妨设对任意自然数 n 都有

$$u_n \leq c v_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的 n 项部分和分别是 A_n 与 B_n , 由不等式(3), 有

$$\begin{aligned} A_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq c v_1 + c v_2 + \dots + c v_n \\ &= c(v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ &= c B_n. \end{aligned} \quad (4)$$

1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 根据定理 4 的必要性, 数列 $\{B_n\}$ 有上界. 由不等式(4), 数列 $\{A_n\}$ 也有上界, 再根据定理 4 的充分性, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.