高等学校教材

数学分析讲义

下册

（本科用）

刘玉琏　傅沛仁　编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

下 册

（本科用）

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

本书第一版是吉林师大数学系数学分析教研室编《数学分析讲义》，是为高等函授院校数学系开设数学分析课编写的。此次修订，编者署名改为刘玉琏、傅沛仁；并参照1980年5月经理科数学、力学教材编委会审订的高等师范院校《数学分析大纲》，对第一版内容作了小量增删；在体例、格式、叙述等方面变动较大；在每节后增配了练习题，较难题作了提示，书末附有计算题的答案。

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学。可作高等师范本科与专科的教材（上册本科与专科共用，下册分本科用本与专科用本两种），也可作高等理科院校的函授教材及高等教育自学用书。

为了更好地保证教学效果，未经我社和编者同意，请不要为本书习题配备题解公开出版。

第二版修订稿经四川大学秦卫平副教授审查。

数学分析讲义

下　册

刘玉琏　傅沛仁　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 14.25　字数 340,000

1966年3月第1版　1982年6月第2版　1986年4月第6次印刷

印数113,531—129,830

书号 13010·0739　定价 2.40元

目　　录

第九章 级　　数

级数是研究函数的一个重要工具．在抽象理论与应用学科中，级数都处于重要的地位．这是因为，一方面能够借助级数表示很多有用的非初等函数，例如，有些微分方程的解不是初等函数，但其解可用级数表示出来，等等；另一方面又可将函数表为级数，从而能够借助于级数研究这些函数，例如，用幂级数研究初等超越函数与非初等函数，以及实数的近似计算，等等．

§9.1. 数 值 级 数

一、收敛与发散概念

如果有数列$\{u_n\}$，即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来，即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \tag{2}$$

或简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

称为**数值级数**，简称**级数**．u_1，u_2，…，u_n，…都称为级数(2)的项，u_n 称为级数(2)的**第 n 项**或**通项**．

级数(2)是无限多个数的和．我们只会计算有限个数的和，不仅不会计算无限多个数的和，甚至不知道何谓无限多个数的和．因此，无限多个数的和是一个未知的新概念．这个新概念也不是孤立的，它与我们已知的有限个数的和联系着．不难想到，由有限个

数的和转化到"无限多个数的和"可以借助极限这个工具来实现。

设级数(2)前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

或
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**. 显然，对给定级数(2)，其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是，级数(2)对应着一个部分和数列 $\{S_n\}$，即

$$\begin{aligned}&S_1=u_1,\\&S_2=u_1+u_2,\\&S_3=u_1+u_2+u_3,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

定义 如果级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，设

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

称级数(2)**收敛**，并称 S 是级数(2)的**和**，表为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ **发散**，称级数(2)**发散**，此时级数(2)没有和.

由此可知，级数的收敛与发散是借助于级数的部分和数列的收敛与发散定义的. 于是，讨论级数的各种性质都是借助于讨论该级数的部分和数列进行. 因此，研究级数及其和数只不过是研究数列及其极限的一种新形式. 这个新形式并不是数列极限的简单重复，它使我们在处理多种不同形式的极限问题中，具有更大的灵活性.

例 1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

的敛散性①. 其中 $a\neq 0$, r 是公比.

解 1) 当 $|r|\neq 1$ 时, 已知几何级数的 n 项部分和 S_n 是

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}.$$

(i) 当 $|r|<1$ 时, 极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}②=\frac{a}{1-r}.$$

因此, 当 $|r|<1$ 时, 几何级数收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

(ii) 当 $|r|>1$ 时, 极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\infty.$$

因此, 当 $|r|>1$ 时, 几何级数发散.

2) 当 $|r|=1$ 时, 有两种情况:

(i) 当 $r=1$ 时, 几何级数是

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots.$$

$$S_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{ 个}}=na.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} na=\infty\quad(a\neq 0),$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

(ii) 当 $r=-1$ 时, 几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

---

① 敛散性是指收敛与发散. 下同.

② 见 §2.1 例 4, 当 $|r|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$.

$$S_n=\begin{cases}0, & 当 n 是偶数,\\ a, & 当 n 是奇数,\end{cases}$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

因此,当$|r|=1$时,几何级数发散.

综上所述,几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$,当$|r|<1$时收敛,其和是$\dfrac{a}{1-r}$;当$|r|\geqslant 1$时发散.

例 2. 证明,级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项u_n可改写为

$$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的n项部分和S_n是

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是$\frac{1}{5}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3． 证明，调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的．

证明 因为调和级数的每项都是正数，所以部分和数列$\{S_n\}$是严格增加的．讨论子数列$\{S_{2^m}\}$：

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\ \cdots,\ S_{2^m},\ \cdots.$$

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2^1\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{2^2\text{项}}+\cdots+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1}\text{项}},$$

其中每个括号内的和数都大于$\frac{1}{2}$．事实上，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}>2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$S_{2^m}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{个}}=1+\frac{m}{2}.$$

$$\lim_{m\to\infty}S_{2^m}\geqslant\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty,$$

即$\lim\limits_{m\to\infty}S_{2^m}=+\infty$．对任意自然数$n\geqslant 2$，总存在唯一的自然数$m$，使$2^{m-1}\leqslant n<2^m$，且有

$$S_{2^{m-1}} \leqslant S_n < S_{2^m},$$

当 $n \to \infty$ 时,有 $m \to \infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$,即调和级数是发散的.

二、收敛级数的性质

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列$\{S_n\}$的收敛是等价的. 因此,数列$\{S_n\}$收敛的必要充分条件也就是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要充分条件. 回忆数列$\{S_n\}$的柯西收敛准则:"数列$\{S_n\}$收敛的必要充分条件是,对任意 $\varepsilon>0$,总存在自然数 N,当 $n>N$ 时,对任意自然数 p,有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$."由于 S_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的 n 项部分和,而

$$S_{n+p}-S_n = u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

于是,有下面级数的柯西收敛准则:

定理 1. (柯西收敛准则) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要充分条件是,对任意 $\varepsilon>0$,总存在自然数 N,当 $n>N$ 时,对任意自然数 p,有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

根据定理 1 的必要性,若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,特别是当 $p=1$ 时,则对任意 $\varepsilon>0$,总存在自然数 N,当 $n>N$ 时,有$|u_{n+1}|<\varepsilon$. 于是,有

推论 1. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

推论 1 的等价命题是,如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

例如,级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100\cdot n+1}+\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}=\frac{1}{100}\neq0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}$发散.

注 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$仅是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件而不是充分条件，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也可能发散. 例如，调和级数(见例3)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却是发散的.

定理1指出，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛等价于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的充分远(即$n>N$)的任意片段(即对任意$p$，$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$)的绝对值可以任意小. 由此可见，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关，而与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$任意指定的有限个项无关. 于是，又有

推论2. 若去掉、增添或改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的有限项，则不改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

例如，去掉发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的前面100项，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+n}+\cdots$$

也是发散的.

根据数列的极限运算定理可得到级数的运算定理:

定理 2. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,其和是 S,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛,其和是 cS,其中 c 是常数.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$的 n 项部分和分别是 S_n 与 S'_n,有

$$\begin{aligned}S'_n&=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n\\&=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)\\&=cS_n.\end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,有

$$\lim_{n\to\infty}S'_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$收敛,其和是 cS. □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cS=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)具有分配性.

定理 3. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,其和分别是 A 与 B,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也收敛,其和是 $A\pm B$.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的 n 项部分和分别

是 A_n, B_n 与 C_n, 有

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k) \\ &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, 有

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛, 其和是 $A \pm B$. □

三、同号级数

同号级数是指级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的每一项 u_n 的符号是非负或非正. 如果 $u_n \geqslant 0 (n=1, 2, \cdots)$, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**正项级数**; 如果 $u_n \leqslant 0 (n=1, 2, \cdots)$, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**负项级数**.

将负项级数每项乘以 -1, 负项级数就变成了正项级数, 由定理 2 知, 负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是, 讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此, 下面我们只讨论正项级数敛散性的判别方法.

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 则此级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的, 即

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots.$$

根据 § 2.2 公理, 我们有判别正项级数收敛性的定理:

定理 4. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件是，它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 4. 证明，正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

是收敛的.

证明 已知 $\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\leqslant\frac{1}{\underbrace{1\cdot2\cdot2\cdots2}_{n-1\text{个}}}=\frac{1}{2^{n-1}}$, $n=2, 3, \cdots$.

于是，对任意 n，有

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 是收敛的.

例 5. 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性，其中 p 是任意实数. 此级数称为**广义调和级数**，亦称 ***p*-级数**.

解 广义调和级数的敛散性与数 p 有关，下面分三种情况讨论:

1) 当 $p=1$ 时，广义调和级数就是调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，已知调和级数发散，即广义调和级数发散.

2) 当 $p<1$ 时，对任意自然数 n，总有

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}.$$

设广义调和级数与调和级数的 n 项部分和分别是 S'_n 与 S_n，有

$$S'_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n.$$

已知 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} S'_n = +\infty$，即广义调和级数发散。

3) 当 $p>1$ 时，不难证明下列不等式

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right]^{①}.$$

有

$$\begin{aligned}
S'_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}}\right) + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1} \\
&= \frac{p}{p-1},
\end{aligned}$$

---

① 应用微分中值定理，函数 $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ 在区间 $[n-1, n]$ 上 $(p>1, n>2)$，有

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{p-1}{(n-1+\theta)^p}, \quad 0<\theta<1$$

或

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} > \frac{p-1}{n^p},$$

即

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right].$$

即广义调和级数的部分和数列 $\{S'_n\}$ 有上界，于是广义调和级数收敛.

综上所述，广义调和级数，当 $p\leqslant 1$ 时发散；当 $p>1$ 时收敛.

从上述二例看到，判别正项级数的敛散性，常将其通项与某个已知的正项级数的通项进行比较，再应用定理 4 判别其敛散性. 于是，有下面的正项级数比较原则:

定理 5.（比较判别法） 对两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$u_n\leqslant cv_n,$$

其中 c 是正常数. 1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；2）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

证明 根据定理 1 的推论 2，改变级数前面有限个项并不改变级数的敛散性. 因此，不妨设对任意自然数 n 都有

$$u_n\leqslant cv_n,\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{3}$$

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的 n 项部分和分别是 A_n 与 B_n，由不等式(3)，有

$$\begin{aligned}A_n&=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant cv_1+cv_2+\cdots+cv_n\\&=c(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\&=cB_n.\end{aligned} \tag{4}$$

1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，根据定理 4 的必要性，数列 $\{B_n\}$ 有上界. 由不等式(4)，数列 $\{A_n\}$ 也有上界，再根据定理 4 的充分性，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.