

现代数学丛书

袁亚湘 著

非线性规划 数值方法

NUMERICAL
METHODS FOR
NONLINEAR
PROGRAMMING

YA—XIANG YUAN

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

JY11177/28

非线性规划数值方法

袁亚湘 著

上海科学技术出版社

责任编辑 赵序明

现代数学丛书

非线性规划数值方法

袁亚湘 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/20 印张 18 插页 4 字数 225,000

1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷

印数 1—1,500

ISBN 7-5323-3012-5/O·165

定价: 10.20元

(沪)新登字 108号

内 容 提 要

本书介绍非线性规划的主要数值方法与理论。书中许多章节是基于作者的博士论文及作者近年来的科研成果。它包括无约束优化、二次规划、非线性约束优化以及非光滑优化等方法的最新成果。书中着重介绍了近年来的新方法及结果,如:信赖域方法、既约海色阵方法的收敛特征、拟牛顿法的收敛性、Barzilai-Borwein 梯度法的收敛速度等等。书中也介绍了非线性规划的主要经典方法,如:梯度法、共轭梯度法、牛顿法、拟牛顿法、逐步二次规划法、既约梯度法等等以及这些常用方法的最新进展。

本书是一部学术性专著,介绍了当今国际上非线性规划前沿的研究成果,引用了大量近期的、较新的参考文献,以方便希望进一步研究的同行们。

本书可作为广大非线性规划研究人员以及从事实际应用的工程技术人员的参考书,也可作为研究生和大学高年级学生的教材。

Modern Mathematics Series

**NUMERICAL METHODS FOR
NONLINEAR PROGRAMMING**

Ya-xiang Yuan

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Numerical Methods For Nonlinear Programming

Abstract

This book discusses numerical methods for nonlinear programming. Its contents include recent results on unconstrained optimization, quadratic programming, nonlinearly constrained optimization and nonsmooth optimization. Newly developed numerical methods such as trust region algorithms, interior point methods and sequential quadratic programming methods are discussed. Many recent results such as one step fast one step slow convergence of reduced Hessian algorithms, super-linear convergence of Barzilai-Borwein gradient method, and global convergence of quasi-Newton algorithms are given. Classical methods including steepest descent method, Newton's method, quasi-Newton method, reduced gradient method are discussed and recent advances of these methods are also presented.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔划为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series

Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua	Chen Hanfu
Chen Xiru	Cheng Minde
Ding Xiaqi	Feng Keqin
Hu Hesheng	Jiang Boju
Li Tatsien	Liang Youdong
Liu Yingming	Shi Zhongci
Wang Zikun	Wu Fang
Yan Zhida	Yang Le
Ye Yanqian	Zhang Gongqing

出版说明

从六十年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在外国出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，十八位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

前 言

非线性规划是计算数学和运筹学交叉的学科。它在工程、国防、经济等许多重要领域有着广泛的应用。近二十多年来,非线性规划一直是一个十分活跃的研究领域。本书总结了作者近年来的科研成果(研究工作曾得到国家自然科学基金资助),且系统地介绍了国际上主要的非线性规划计算方法及其理论。

非线性规划从七十年代起就是数学规划中最受重视的分支之一。特别是变尺度算法的兴起使国际上涌现出来如 Powell、Fletcher、Dennis 等一批著名的非线性规划专家。近年来,求解大规模优化问题的 SQP 方法的成功应用,使得非线性规划计算方法成为大规模科研与工程计算的一个重要方向。八十年代初期兴起的信赖域法已是非线性规划的一个十分热门的研究课题,它进一步促进了非线性规划的研究与应用。

我国关于非线性规划的研究起始于 1970 年。当时,由华罗庚教授领导的中国科学院数学研究所运筹研究室对优化方法进行研究、应用和推广。尔后,吴方、桂湘云、席少霖、郑权、俞文猷等教授对非线性规划进行了大量的科研。目前我们已有一大批从事非线性规划研究的专业人员。在应用方面,继华罗庚教授推广优选法之后,钱令希、张可村、周济等教授又做了许多工作,已取得不少优秀的成果。

本书的许多章节是基于作者的博士论文以及作者近年来的科研成果。第二章给出的一个不需要计算二阶导数的平方收敛方法;第三章给出的 Barzilai-Borwein 梯度法的超线性收敛性和关于共轭梯度法的线性收敛速度的上界估计;第四章给出的精确搜索下变尺度方法的最小收敛阶、Broyden 族自对偶修正公式的导

出以及整个 Broyden 凸族(DFP 方法除外)的整体收敛性;第八章的求解线性约束问题的信赖域法;第九章提出的一个 SQP 方法(第 9.3 节)和一个信赖域方法(第 9.5 节)以及关于既约海色阵方法的一快一慢收敛特征(第 9.5 节)以及第十章给出的关于非光滑优化信赖域法的一系列结果都是作者或作者与 Powell、Byrd 和 Nocedal 等教授合作完成的研究结果。

本书是一本学术性专著,介绍了当今国际上非线性规划前沿的研究成果,引用了大量的较新的参考文献,以提供希望进一步研究的同行们参考。本书可作为广大非线性规划研究人员以及从事实际应用的工程技术人员的参考书,也可作为研究生或大学高年级学生的教材。

由于作者长期在国外,本书对国内的优秀工作介绍不多,但愿在以后再版时能弥补这一不足。另外,限于作者的水平,书中可能有不妥或错误之处,敬请广大读者批评指正。

我想借此机会对我的博士论文指导导师、英国皇家学会会员、剑桥大学的 M. J. D. Powell 教授表示衷心的感谢,我在非线性规划方面所取得的科研成果都和他的指导与鼓励是分不开的。我非常感谢中国科学院学部委员、中国科学院计算中心名誉主任冯康教授多年来对我的关心和培养;感谢中国科学院计算中心石钟慈、赵风治等老师对我写这本书的鼓励。本书的部分书稿是作者于 1990 年 9 月至 1991 年 8 月访问美国完成的,所以我还感谢美国科罗拉多大学 Boulder 分校的 Richard H. Byrd 教授和美国西北大学的 Jorge Nocedal 教授在我访问他们学校期间提供的良好工作条件以及友好的很有成效的科研合作。北京计算机学院席少霖教授审阅了本书,提出了宝贵的意见和建议。我向他表示深切的谢意。最后,我感谢我的爱人也是我的同事王慧娟多年来给我的鼓励、帮助和支持。

袁亚湘

1992 年 3 月于

中国科学院计算中心

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
§ 1.1 问题	1
§ 1.2 最优性条件	3
§ 1.3 方法概述	9
§ 1.4 收敛性与收敛速度	11
第 2 章 一维优化方法	15
§ 2.1 牛顿法	15
§ 2.2 割线法	20
§ 2.3 多项式插值法	29
§ 2.4 区间分割法	36
§ 2.5 线搜索	41
第 3 章 梯度法和共轭梯度法	48
§ 3.1 梯度法	48
§ 3.2 共轭梯度法	57
§ 3.3 共轭梯度法的线性收敛性	65
§ 3.4 共轭梯度法的进一步改进	72
§ 3.5 一个一般性收敛定理	75
第 4 章 拟牛顿法	77
§ 4.1 牛顿法	77
§ 4.2 拟牛顿法的导入	81
§ 4.3 几个重要的拟牛顿法	83
§ 4.4 不变性和二次终止性	91
§ 4.5 最小变化性质	96
§ 4.6 收敛性	100

§ 4.7	有限内存 BFGS 方法	110
§ 4.8	修正公式的几种计算形式	114
第 5 章	直接方法	117
§ 5.1	交替方向法	117
§ 5.2	单纯形法	121
§ 5.3	共轭方向法	124
§ 5.4	差分拟牛顿法	131
第 6 章	二次规划	136
§ 6.1	基本性质	136
§ 6.2	等式约束	142
§ 6.3	积极集法	147
§ 6.4	对偶方法	152
§ 6.5	线性互补问题	155
§ 6.6	内点算法	157
第 7 章	罚函数法	161
§ 7.1	早期罚函数	161
§ 7.2	乘子罚函数	170
§ 7.3	非光滑精确罚函数	176
第 8 章	线性约束规划	178
§ 8.1	等式约束	178
§ 8.2	积极集法	183
§ 8.3	投影梯度法	189
§ 8.4	信赖域法	193
§ 8.5	ϵ -积极集法	197
第 9 章	非线性约束优化	200
§ 9.1	可行方向法	200
§ 9.2	Lagrange-Newton 法	203
§ 9.3	逐步二次规划法	207
§ 9.4	既约海色阵方法	217
§ 9.5	信赖域法	223
第 10 章	非光滑优化	228
§ 10.1	方法概述	228

§ 10.2	复合 NDO 的基本性质	233
§ 10.3	信赖域法	236
§ 10.4	线性收敛的例子	242
§ 10.5	一个超线性收敛算法	245
参考文献	252

CONTENTS

Chapter 1 Introduction	1
§ 1.1 The problem	1
§ 1.2 Optimal conditions	3
§ 1.3 Descriptions of numerical methods	9
§ 1.4 Convergence and rate of convergence	11
Chapter 2 One-dimensional optimization	15
§ 2.1 Newton Method	15
§ 2.2 Secant method.....	20
§ 2.3 Polynomial interpolation methods	29
§ 2.4 Interval sectioning method	36
§ 2.5 Line searches	41
Chapter 3 Gradient method and conjugate gradient method	48
§ 3.1 Gradient method	48
§ 3.2 Conjugate gradient method	57
§ 3.3 Linear convergence of Conjugate gradient method	65
§ 3.4 Further improvements of conjugate gradient method.....	72
§ 3.5 A general convergence theorem	75
Chapter 4 Quasi-Newton Methods	77
§ 4.1 Newton method	77
§ 4.2 Derivation of quasi-Newton methods	81
§ 4.3 Some important quasi-Newton methods.....	83
§ 4.4 Invariance and quadratic termination.....	91
§ 4.5 Least change properties	96
§ 4.6 Convergence results	100

§ 4.7	Limited memory BFGS method	110
§ 4.8	Calculations of updating matrices	114
Chapter 5	Direct methods	117
§ 5.1	Alternating direction method	117
§ 5.2	Simplex method	121
§ 5.3	Conjugate direction method.....	124
§ 5.4	Finite difference quasi-Newton method.....	131
Chapter 6	Quadratic Programming	136
§ 6.1	Basic properties	136
§ 6.2	Equality constraints	142
§ 6.3	Active set method	147
§ 6.4	Dual method	152
§ 6.5	Linear Complementarity Problem.....	155
§ 6.6	Interior point methods.....	157
Chapter 7	Penalty Function Methods	161
§ 7.1	Early penalty functions	161
§ 7.2	Multiplier penalty functions	170
§ 7.3	Nonsmooth exact penalty functions	176
Chapter 8	Linearly Constrained Problems	178
§ 8.1	Equality constraints.....	178
§ 8.2	Active set method.....	183
§ 8.3	Projected gradient methods.....	189
§ 8.4	Trust region method.....	193
§ 8.5	ϵ -active set method	197
Chapter 9	Nonlinearly Constrained Problems	200
§ 9.1	Feasible direction methods	200
§ 9.2	Lagrange-Newton method	203
§ 9.3	Sequential quadratic programming method	207
§ 9.4	Reduced Hessian methods	217
§ 9.5	Trust region method.....	223
Chapter 10	Nonsmooth Optimization	228
§ 10.1	Discussions of common methods	228