现代数学与中学数学

现代数学与中学数学

张奠宙　邹一心 编著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 16.75　插页 2　字数 396,000

1990年9月第1版　1990年9月第1次印刷

印数 1—8,100 本

ISBN 7-5320-1913-6/G·1856　　定价：5.85元

J311/31/03

前　言

数学界长期被一个悖论困扰着．一方面，数学被公认为是最基本、最重要、最有用，因而学的时间最长、考试次数最多的学科．另一方面，数学又是社会上最少了解、最多误解、最被忽视的学科．一个高中毕业生，读了12年数学，根本不知道欧拉、黎曼、希尔伯特为何许人，甚至连“欧几里得也在中学消失了”(日本横地清教授语)．但是，他一定会知道肖邦、贝多芬、芬奇、毕加索以及牛顿、爱因斯坦(尽管音乐课、美术课和物理课都远少于数学课)．在一次调查中，百分之七十的人说“不喜欢数学”乃至“恨煞数学”，百分之八十的人说“数学除了加减乘除之外，没啥用处”，在剩下的那些对数学感兴趣、觉得有用的人中间，还有不少人认为数学家都是一批不谙世务、不懂人情，处于半疯状态的怪人．有一位甚至说“数学还有什么可研究的？世界上题目不是都已有解答，只剩下一个哥德巴赫猜想了吗？”

这就给我们广大数学教师提出一个问题：我们费了那么大的力气，教学生读数学，然而学生却提不起兴趣，觉得学了无用，这岂不是我们的失败吗？

我们想，我们不得不吞下这只苦果．

导致上述悖论，结出这一苦果的原因很多，其中很重要的一

点是没有把教育目的搞得很清楚．据研究，数学教育的价值在于“实际需要，文化修养，智力筛选”，以我国当前的情形，对前二者恐怕无暇顾及，只剩下把数学当筛子用了．

当然，上述问题是全球性的．世所共有，于我为烈而已．据报道，1989年，国际数学教育委员会(ICMI)在英国的里斯大学召开“数学普及”研究的国际性会议，并将会议记录作为数学教育研究丛书的第5卷出版．这次会议的目的就是为了增进公众对数学和数学家的了解，消除对数学的误解，以促进数学本身的发展．看来，国际数学教育界已把这一问题提到议事日程上，摆到广大数学教师的面前了．

确实，数学教师是普及数学的核心力量．世界上没有哪一个学科，会有数学教师那样大的队伍．如果我国的几百万中学数学教师能在自己的班级上和社会上有力地宣传现代数学的发展，普及现代数学知识，培养现代数学的观念，那将是多么可喜的情景呵！

于是，我们要谈到本书．

作为中学教师，应该读更多的数学，用一桶水去斟一杯水，才显得胸有成竹、游刃有余，这已成为人们的常识．大学里学那么多高等数学，目的即在于此．但是，我们觉得有两个问题没有解决好．第一，高等数学知识怎样和初等数学相结合？如何指导中学数学教学？怎样沟通现代数学与中学数学之间的内在联系，也就是居高临下的问题．第二，如何使教师的知识更加现代化？怎样将本世纪甚至二次大战后发展起来的数学思想也能为广大中学教师所了解？怎样用最新的数学观念去理解中学数学的有关内容？也就是怎样提高教师的数学修养问题．本书冠以“现代数学与中学数学”的名称就是想为解决这两个问题作一些尝试．

我们在高师院校执教多年，深感居高未必能自然地临下．在大学课程中，只管讲学科知识本身，联系中学实际的任务往往视

为累赘，忽略不讲．举个例子，讲实变函数论，大谈勒贝格测度及勒贝格积分，却不屑于谈谈测度与面积、体积之间的内在关系．对中学教师来说，也许后者是至关重要的．居“测度之高”去临“面积”之下，也是得花些力气的．

有鉴于此，本书除了介绍一些现代数学的基本概念之外，还收集了一些课题，如：函数的“变量说”、“对应说”、“关系说”定义的优劣比较；映射与排列组合及鸽笼原理；皮亚诺公理与数学归纳法；谈“序”、“半序”与“复数无大小”；同余的两种数学语言与应用；用射影几何思想处理某些中学几何问题；自同构与尺规作图不能问题研究……总之，我们想为中学教师“居高临下”作一些基础性的试探工作，也想为数学教育研究生和中学教师培训提供一本教材．

此书成书之前，我们曾编写过一本《讲义》，文中较多地参考了格里夫斯等著的《经典数学综合教材》．经历五届教学实践，又举办过讲习班，对《讲义》征求了多方面的意见，逐步体会到此书应立足于中国实际，尽量有自己的特色．

本书以读过数学分析、高等代数、解析几何三门基础课者为起点，着重在纯粹数学方面介绍现代数学思想、观念，尽可能与日常生活和中学教材中的数学知识相关联，努力提供一个比较现代化的中学教师应有的知识框架．后面几章也介绍了一些经济数学和现代应用数学的某些基本想法，并举例说明．书中还有群论略说，拓扑大意，几何模型等几章，涉及较深的一些数学概念，我们也作了一些介绍，以窥其一斑．我们的宗旨是，虽然浅近，但不能止于科普，还是老老实实讲数学，能证则证，不能证则说不证，力图交代清楚．至于有些现代数学观点，实在讲不清，只好述其大意，举例说明，能够略知其一、二也就可以了．

本书因涉及范围较广，我们延请以下同志帮助撰写．第十三章（几何基础与几何模型）由陈信漪担任；第十六章（微积分与

初等数学研究的若干课题)§1，§2由党明生，§3由张方盛分别担任；第十七章(经济数学模型简析)请袁家玮撰写；第十八章(组合数学初步)则是章功远执笔的.

书稿写成这个样子，仍觉有许多不足. 特别是与中学的联系尚欠紧密，应用方面介绍尚少，概率统计则完全没有涉及. 此外，因为本书不是一个演绎体系，各章间难免会有重复. 个别疏漏之处，估计还会有. 这些均请读者不吝指正，以便将以后的事情做得更好些.

最后，我们衷心感谢对本书的编写给予帮助和鼓励的所有同志们. 没有他们的关心和支持，这项工作也许早就夭折了.

作　者

1989.7

目 录

第一章

作为数学语言的集合论

§1 集合论简史

1871年，德国数学家G.康托尔(G. Cantor)考察由函数$f(x)$构造出的三角级数在区间内哪些点上收敛于$f(x)$的问题. 这些收敛点构成一个点集. 康托尔研究了它的性质，这便是集合论的开始. 以后康托尔又提出一般的抽象集合，并研究集合中元素之间的一一对应问题，引出基数的概念. 接着又把自然数的依大小排列的序数推广到无限序数情形，即超限数系统. 这些涉及"无限"的集合论研究引起许多人的反对. 上世纪末本世纪初，集合论中出现了悖论(见本章§6)，特别是1903年的罗素悖论，使数学出现了第三次危机. 为了赶走悖论，意大利数学家策梅罗(Zermelo)提出了公理集合论.

由于集合论可能出现悖论，而且研究超限数的算术运算等性质似乎很"玄"，许多人开始时都对它抱怀疑态度，但是集合论的语言很简洁、明了，概括性极大，而且在通常范围内不会出现悖论，所以各科数学都愿意把本学科建立在集合论的基础之上. 时至今日，集合论语言已成为人们的常识.

§2 集合论语言

我们这里假定读者已熟悉通常的集合概念及其上的运算规律，这里仅在某些问题上作一些说明.

在朴素集合论即用日常语言表述的集合论中，集合是一个原始概念，它不能定义，只能描述．所谓集合，就是一些事物的总体．组成集合的事物称为该集合的元素．集合最重要的特征是要能明确判断任何一个事物是不是该集合的元素，例如："青年人"、"美丽的画"，都不是集合.

集合论作为语言来说，特别简单，它只有一个最基本动词，叫做"属于"，用"$\in$"表之．a 是集合 M 的元素，就说 $a\in M$．用"$\in$"的概念，就可以定义"不属于"($\overline{\in}$)，"包含"($\subset$)，"相等"($=$)等概念了．有了包含关系，就有子集的概念.

从这些概念出发，再加上一些逻辑语言，例如"或"和"且"，就可定义集合之间的"并"运算($\cup$)和"交"运算($\cap$)，还可定义"差"运算，包括"余"运算．在这基础上，集合论的基本运算便建立起来，并且形成一种代数结构，这在以后还要详细论述.

集合的概念建立起来以后，就可以定义一些本来只能用日常语言表达的概念，显得简洁明了，且使用统一的符号，比较容易理解．例如，全体偶数所成之集 M，可以写成

$$M=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2n,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\},$$

其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集.

这一用集合论语言写出来的集合包括两个部分，第一：$x\in\mathbf{Z}$，表示 x 是整数；第二：$x=2n$, $n=0$, ±1, ±2, $\cdots$这表示偶数是整数中的一部分，它具有性质："是某整数的 2 倍"．形式逻辑中用属和种差定义概念，这里的属就是整数集 $\mathbf{Z}$，种差表示偶数性质．一般而言，我们用

$$M=\{x\in X\,|\,P(x)\}$$

表示在 X 中具有性质 P 的那些 x 组成的集合 M.

这种确定集合的方法是有缺陷的, 如不加以限制, 就会产生"罗素悖论", 这在本章 §6 还会涉及.

集合确定之后, 再通过 $\subset$、$=$、$\cup$、$\cap$、$\setminus$ 等关系和运算, 就能用符号来形式地表达许多数学公式和内容了.

[例 1] 设 l 与 l' 表示平面上的直线 $ax+by+c=0$ 与 $a'x+b'y+c'=0$, 即分别为

$$l=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2\,|\,ax+by+c=0\},$$

$$l'=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2\,|\,a'x+b'y+c'=0\}.$$

这时

(i) $l\cup l'=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2\,|\,(ax+by+c)\,(a'x+b'y+c')=0\}$;

(ii) 如果 $ab'-a'b\neq 0$, 则 $l\cap l'$ 是单个元素集,

$$\begin{aligned}l\cap l'&=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}\,|\,ab'-a'b\neq 0,\ ax+by+\\&\qquad c=0,\ a'x+b'y+c'=0\}\\&=\left\{\left(\frac{c'b-b'c}{ab'-a'b},\ \frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)\right\};\end{aligned}$$

(iii) 如果 $ab'-a'b=0$, 且 $b'c=c'b$, 则 $l=l'=l\cap l'$;

如果 $ab'-a'b=0$, 且 $b'c\neq c'b$, 则 $l\cap l'=\varnothing$.

从几何的观点说, 这表示 l 与 l' 或者交于一点, 或者重合, 或者彼此平行.

[例 2] 给定 n. 令 $A(n)=\{a\in\mathbf{Z}^+\,|\,a$ 是质数, 且 a 整除 $n\}$. 显然我们有 $A(1)=\varnothing$, $A(2)=\{2\}$, $A(12)=\{2,\ 3\}=A(6)$. 如果 p 是质数, $A(p)=\{p\}$. 不难验证

(i) 若 q 除尽 n, 则 $A(q)\subset A(n)$;

(ii) 若 q 是 m, n 的公因子, r 是 m, n 的公倍数, 则 $A(q)\subset A(m)\cap A(n)$, $A(m)\cup A(n)\subset A(r)$;

(iii) 若用 $(m,\ n)$ 表示 m 和 n 的最大公因子, 则

$$A((m, n)) = A(m) \cap A(n);$$

(iv) 若用$[m, n]$表示m和n的最小公倍数，则

$$A([m, n]) = A(m) \cup A(n).$$

读者从以上两例可以看出，使用集合论的符号，比使用日常语言既准确又明白，可以帮助我们更迅速地进行思考. 集合论之所以为广大数学工作者所用，并成为数学的基础，其主要原因就在于它是一种很好的数学语言. 集合论语言将许多日常语言符号化、形式化，这就使得计算机便于理解、掌握和应用. 没有集合论语言，编制计算机软件是不可想象的. 历史上，代数语言代替算术语言，使数学向前迈进一大步，集合论语言的作用将会有过之而无不及，这是康托尔始料所不及的了.

§3 开句和量词

除了用集合论的术语来表示数学概念之外，还有一些逻辑语言，也是现代数学语言的重要组成部分.

设我们讨论问题的范围，即论域，记为U. 所谓命题，指的是一个陈述性的句子，我们可以明确判断其真假. 如"苏格拉底是人"，这是一个真命题；"桌子是人"，则是一个假命题，但两者都是命题. 一个带有空位的句子称为**开句**，例如

□是男人.

空位可以通过填入论域中的任何元素，使之成为一个可以判断真伪的句子. 设我们的U是某校的学生，设张三是男学生，则

$\boxed{\text{张 三}}$是男人.

构成真命题. 如果苏三是女学生，则

$\boxed{\text{苏 三}}$是男人

构成假命题.

这种开句在数学中常碰到，例如

$$2\times\square-1=3,$$

当我们用 2 填入时，它是真命题，用不是 2 的数代入，则成为假命题。

我们用 ϕ 记某一性质，若 p 是论域 U 中一元素，用 $\phi(p)$ 表示 p 具有性质 ϕ. 对一个开句来说，它可以表示某种性质，例如

$$\square>0,$$

它表示“大于 0”这一性质 ϕ. 这一性质是否具有，要看代入的 p 是什么而定. 用正数 r 代入，则具有此性质：$\phi(r)$；若以负数 s 代入，则不能写 $\phi(s)$，我们用一个否定符号 $\neg$，将没有性质 $\phi(s)$ 记为 $\neg\phi(s)$.

设 ψ 是关于某论域 U 中元素 p 的一个性质，如对论域 U 中的一切元素 p 都具有性质 $\psi(p)$，则记为

$$\underset{p\in U}{\forall}p\psi(p)\quad\text{或简记为 }\forall p\psi(p).$$

如在 U 中存在一个元素 q 具有性质 ψ，则记为

$$\underset{q\in U}{\exists}q\psi(q)\quad\text{或简记为 }\exists q\psi(q).$$

这里给出的两个符号 $\forall$ 和 $\exists$ 分别读作“任意一个”和“存在一个”，它们统称为量词.

量词和论域有关，如开句

$$(\square)^2\geqslant0,$$

描述一个性质 ϕ：“平方以后大于或等于 0”. 如果论域是实数集 $\mathbf{R}$，则有 $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}x\phi(x)$. 如果论域是复数集 $\mathbf{C}$，则不能写 $\underset{x\in\mathbf{C}}{\forall}x\phi(x)$，因存在复数（例如 i）不具备性质 ϕ，我们记为 $\neg\phi(i)$，这就是说，我们可以写

$$\underset{y\in\mathbf{C}}{\exists}y(\neg\phi(y)),$$

这里的 $\forall$ 和 $\exists$ 是分别在 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 的论域中考察的.