高等专科学校试用教材

高等数学

下册

上海市高等专科学校《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高 等 数 学

（下　　册）

上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编

上 海 科 学 技 术 出 版 社

高等专科学校试用教材

高 等 数 学

下 册

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社出版

(上 海 瑞 金 二 路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 11 字数 239,000

1985 年 6 月第 1 版 1985 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—45,000

统一书号：13119·1248 定价：1.80 元

目　　录

（下　　册）

第八章　无穷级数

第九章 向量代数与空间解析几何

第十章　多元函数的微分学

第十一章　重　积　分

第十二章　曲线积分与*曲面积分

附录 几个常用的立体图形

习 题 答 案

第八章　无穷级数

第一节　数项级数

一　级数的收敛性及其性质

定义 1　设给定一个数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots,$$

则式子

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为数项无穷级数,简称级数. 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的一般项或通项.

定义 2　设函数列

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots$$

中的每个函数都在区间 I 上有定义,则式子

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称为定义在区间 I 上的函数项级数, 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots. \tag{2}$$

我们先讨论数项级数. 级数(1)是无限项和的形式,无限多项能否相加?其和是什么?下面就研究这个问题.

作级数(1)的前 n 项的和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

称 S_n 为级数(1)的 n 项部分和. 当 n 依次取 1, 2, 3, … 时, 则得到一个新的数列:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \cdots,$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\ \cdots,$$

数列 $\{S_n\}$ 称为级数(1)的部分和数列.

定义 3 如果级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限, 即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数(1)是收敛的, S 称为级数(1)的和, 记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

如果部分数列 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数(1)是发散的. 发散的级数没有和.

当级数收敛时, 其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值. $S-S_n$ 称为级数的余项, 记为 r_n, 即

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots.$$

用级数的部分和 S_n 作为和 S 的近似值, 其绝对误差就是 $|r_n|$.

例 1 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{3}$$

的收敛性.

解 如果 $|q| \neq 1$, 则部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

(i) 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$, 所以

级数(3)收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$.

(ii) 当 $|q|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$，级数(3)发散.

如果 $|q|=1$，则

(i) 当 $q=1$ 时，$S_n=na\to\infty(n\to\infty)$，因此级数(3)发散.

(ii) 当 $q=-1$ 时，这时级数(3)成为

$$a-a+a-a+\cdots,$$

其部分和

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 是偶数;}\\ a, & \text{若 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

所以 S_n 的极限不存在，级数(3)发散.

根据以上的讨论可知：当 $|q|<1$ 时，等比级数(3)收敛，其和等于 $\frac{a}{1-q}$；当 $|q|\geqslant 1$ 时，级数发散.

例2 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

的收敛性.

解 由于 $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

因此

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

所以级数收敛，其和为 $\frac{1}{2}$.

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$的收敛性.

解 由于$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$, 因此

$$\begin{aligned}S_n&=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\cdots\\&\quad+[\ln(n+1)-\ln n]\\&=\ln(n+1),\end{aligned}$$

而 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, 所以级数发散.

根据级数收敛发散的定义，可以得出下面几个性质:

性质 1 两个收敛的级数可以逐项相加或相减.

就是说，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，它们的和分别为 S 与 σ, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，其和为 $S\pm\sigma$.

性质 2 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的每一项同乘一个不为零的常数后，它的敛散性不改变.

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$(常数 $k\neq0$) 具有相同的敛散性. 特别是，如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和为S, 则$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，其和为 kS.

性质 3 增加、去掉或改变级数的有限项，不会改变级数的敛散性.

但是，当级数收敛时，一般讲，级数的和是要改变的。

上述性质容易根据级数收敛、发散的定义及极限运算法则证明．请读者自证．

二 级数收敛的必要条件

定理 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛，则当 $n \to \infty$ 时，它的一般项 u_n 必趋于零．即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为S．由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.\end{aligned}$$

证毕．

根据这个定理可知，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项 u_n 不趋于零（当 $n \to \infty$ 时），则级数一定是发散的．我们称 $u_n \to 0$ 是级数收敛的必要条件，但不是充分条件，就是说，当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散．

例 4 判定级数

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1} + \cdots$$

的敛散性．

解 由于 $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$，当 $n \to \infty$ 时，u_n 不趋于零，所以级数是发散的．

例 5 判定调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$的敛散性.

解 级数的一般项$u_n=\frac{1}{n}$当$n\to\infty$时，$u_n\to 0$. 但这级数是发散的. 证明如下：

调和级数的n项部分和为

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

如图 8-1，考察曲线$y=\frac{1}{x}$由$x=1$到$x=n+1$所围成的曲边梯形面积与阴影部分的面积之间的关系，可以看到阴影部分的第一块矩形面积$A_1=1$，第二块矩形面积$A_2=\frac{1}{2}$，第三块矩形面积$A_3=\frac{1}{3}$，

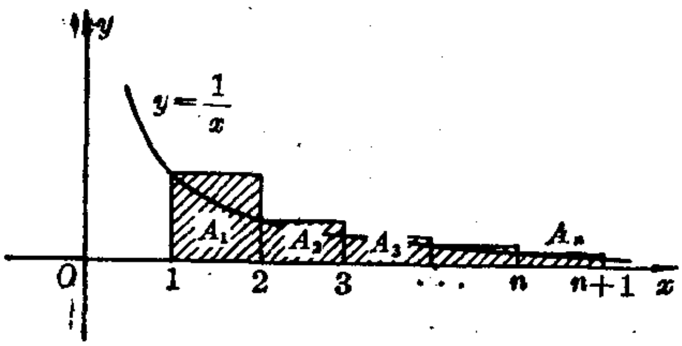

图 8-1

…，第n块矩形面积$A_n=\frac{1}{n}$，所以阴影部分的总面积即为S_n，它显然大于曲线$y=\frac{1}{x}$从$x=1$到$x=n+1$之间所围成的曲边梯形的面积，即

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}A_i>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\ln(n+1)\to\infty \qquad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

部分和S_n的极限不存在，所以调和级数是发散的.

习 题 8-1

1. 写出下列级数的前 5 项、第 10 项、第$n+m$项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{a^{n-2}}(a\neq 0)$.

2. 写出下列级数的一般项:

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$;

(2) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots(x>0)$;

(3) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{a}{4\cdot7}+\frac{a^2}{7\cdot10}+\frac{a^3}{10\cdot13}+\frac{a^4}{13\cdot16}+\cdots$;

(4) $-\frac{3}{1}+\frac{4}{4}-\frac{5}{9}+\frac{6}{16}-\frac{7}{25}+\frac{8}{36}-\cdots$.

3. 已知级数的 n 项部分和 S_n,写出该级数的一般项,并求级数的和:

(1) $S_n=\frac{n+1}{n}$;　　(2) $S_n=\frac{2^n-1}{2^n}$;　　(3) $S_n=\operatorname{arctg} n$.

4. 根据级数收敛、发散的定义,判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}10^{100}\cdot\frac{1}{a^n}(a>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-3}$.

5. 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$.

第二节　数项级数的审敛法

一　正项级数及其审敛法

设级数 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ 的每一项都是非负数,即 $u_n\geqslant0$, 则称此级数为正项级数. 显然, 正项级数的部分和数列是单调增加的, 即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant S_{n+1}\leqslant\cdots,$$

为了讨论正项级数的敛散性，下面介绍一个极限存在的判别法：

单调有界数列必有极限.

这里包含两种情况：一是单调增加且有上界的数列必有极限；另一是单调减少且有下界的数列也必有极限。我们从数轴上直观地给以说明.

设数列$\{u_n\}$是单调增加的，即

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \cdots.$$

所以，随着 n 的增大，数轴上的点 u_n 是自左向右移动的. 这种移动或者是 u_n 沿数轴的正向无限远移($u_n \to \infty$)，或者是 u_n 趋近于某一个定点 A. 由假设，数列 u_n 有界，即存在 $M>0$，使得$|u_n| \leqslant M$ 对所有的 u_n 都成立. 这样，u_n 就不可能移向无穷(如图 8-2 所示). 因此，当 $n \to \infty$ 时，u_n 必趋近于某一定点 A. 即单调增加且有上界的数列必有极限. 类似地可以说明单调减少且有下界的数列也必有极限.

图 8-2

由于正项级数的部分和数列 S_n 是单调增加的，根据上述极限存在的判别法，如果 S_n 有界，即存在 $M>0$，使得对所有的 n，都有 $S_n \leqslant M$ 成立，则此正项级数必定收敛.

定理 1(比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，且 $u_n \leqslant v_n$. (i)如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；(ii) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 先证第一部分，设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，记其和为 σ. 由于 $u_n \leqslant v_n$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n\leqslant\sigma,$$

即 S_n 有界，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

我们用反证法来证明定理的第二部分. 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则由条件 $u_n\leqslant v_n$，根据已证明的第一部分可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是收敛的，这与已知条件矛盾. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是发散的. 证毕.

由于级数的每一项同乘一个不为零的常数 k，以及去掉级数的有限项，不影响级数的敛散性，因此可得到如下的推论：

推论 设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，并且 $u_n\leqslant kv_n$ ($k>0$, $n\geqslant N$, N 为某一正整数)；(i) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；(ii) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

例 1 判定级数 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$ 的敛散性.

解 因为级数的一般项 $u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 是发散的，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 也发散.

例 2 讨论 p-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性，其中常数 $p>0$.

解 当 $p\leqslant1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$；由于调和级数是发散的，根据比较判别法，当 $p\leqslant1$ 时，p-级数是发散的.