

高等专科学校试用教材

高等数学

下 册

上海市高等专科学校《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高等数学

(下 册)

上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高等数学

下册

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 11 字数 239,000

1985年6月第1版 1985年6月第1次印刷

印数: 1—45,000

统一书号: 13119·1248 定价: 1.80元

目 录

(下 册)

第八章 无 穷 级 数

第一节 数项级数	1	一 泰勒级数	30
一 级数的收敛性及其性质	1	二 把函数展开成幂级数	32
二 级数收敛的必要条件	5	习题 8-4	37
习题 8-1	6	第五节 函数的幂级数展开式的应用	38
第二节 数项级数的审敛法 ...	7	一 近似计算	38
一 正项级数及其审敛法	7	*二 微分方程的幂级数解法举例	41
二 交错级数及其审敛法	13	习题 8-5	43
三 绝对收敛与条件收敛	15	*第六节 傅里叶级数	43
习题 8-2	18	一 三角级数、三角函数系的正交性	43
第三节 幂级数	19	二 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数	45
一 幂级数的概念	19	三 $[-\pi, \pi]$ 与 $[0, \pi]$ 上的函数的傅里叶级数	53
二 幂级数的收敛性	21	四 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数	56
三 幂级数的运算	26	习题 8-6	61
习题 8-3	29		
第四节 把函数展开成幂级数	30		

第九章 向量代数与空间解析几何

第一节 向量的概念.....65

一 空间直角坐标系.....65

二 向量与向径.....67

习题 9-171

第二节 向量的分解与向量的坐标.....72

一 向量在轴上的投影
.....72二 向量的分解与向量的坐标
.....74三 向量的模与方向余弦
.....75四 向量的加减法与数乘的坐标形式
.....77

习题 9-278

第三节 数量积 向量积 混合积.....80

一 两向量的数量积.....80

习题 9-3(1)84

二 两向量的向量积.....85

习题 9-3(2)88

三 向量的混合积.....89

习题 9-3(3)91

第四节 平面.....92

一 平面的点法式方程
.....92二 平面的一般式方程
.....93

三 两平面的夹角.....98

四 点到平面的距离 ...100

习题 9-4101

第五节 直线103

一 直线的点向式及参数式
方程103二 直线的一般式方程
.....104

三 两直线间的夹角 ...106

四 直线与平面的夹角
.....108

习题 9-5111

第六节 曲面与空间曲线 ...112

一 曲面方程的概念 ...112

二 柱面114

三 旋转曲面116

四 空间曲线方程的概念
.....119五 空间曲线的参数方程
.....120六 空间曲线在坐标面上的
投影122

习题 9-6124

第七节 二次曲面125

一 椭球面	126
二 双曲面	128
三 抛物面	130

习题 9-7	131
第九章复习题	132

第十章 多元函数的微分学

第一节 多元函数	135
一 多元函数的概念	135
二 二元函数的极限	142
三 二元函数的连续性	144
习题 10-1	146
第二节 偏导数	148
一 偏导数的概念	148
二 高阶偏导数	153
习题 10-2	156
第三节 全微分	158
一 全微分的定义	158
二 全微分在近似计算中的应用	162
习题 10-3	164
第四节 多元函数的求导法则	165
一 多元复合函数的求导法则	165
二 复合函数的全微分	172

习题 10-4	174
第五节 隐函数的求导法	176
习题 10-5	180
第六节 偏导数的几何应用	181
一 空间曲线的切线与法平面	181
二 曲面的切平面与法线	186
习题 10-6	189
*第七节 方向导数	190
习题 10-7	193
第八节 多元函数的极值与最大值最小值	194
一 多元函数的极值与最大值最小值	194
二 条件极值	199
习题 10-8	202
*第九节 最小二乘法	203
习题 10-9	208
第十章复习题	208

第十一章 重 积 分

第一节 二重积分的概念与性质	210
----------------------	-----

一 二重积分的概念	210
二 二重积分的性质	213
习题 11-1	215
第二节 二重积分在直角坐标系中的计算方法	216
习题 11-2	226
第三节 利用极坐标计算二重积分	228
习题 11-3	232
第四节 三重积分的概念与计算方法	234
一 三重积分的概念	234
二 在直角坐标系中的计算方法	235

习题 11-4	239
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	240
一 在柱面坐标系中三重积分的计算法	240
二 在球面坐标系中三重积分的计算法	243
习题 11-5	246
第六节 重积分的应用	248
一 曲面面积	248
二 重积分在物理上的应用	251
习题 11-6	256
第十一章复习题	258

第十二章 曲线积分与*曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分	261
一 对弧长的曲线积分的概念与性质	261
二 对弧长的曲线积分的计算法	264
习题 12-1	268
第二节 对坐标的曲线积分	269
一 对坐标的曲线积分的概念与性质	269
二 对坐标的曲线积分的计算法	272

三 两类曲线积分间的联系	278
习题 12-2	278
第三节 格林公式	280
习题 12-3	283
第四节 平面上的曲线积分与路径无关的条件	284
一 平面上曲线积分与路径无关的条件	285
二 二元函数的全微分求积	290
习题 12-4	292
*第五节 对面积的曲面积分	

.....	293	一 对坐标的曲面积分的概	
一 对面积的曲面积分的概		念	299
念	293	二 对坐标的曲面积分的计	
二 对面积的曲面积分的计		算法	303
算法	295	习题 12-6	305
习题 12-5	297	*第七节 奥-高公式	306
*第六节 对坐标的曲面积分		习题 12-7	310
.....	298	第十二章复习题	311

附录 几个常用的立体图形

习 题 答 案

第八章 无穷级数

第一节 数项级数

一 级数的收敛性及其性质

定义 1 设给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots,$$

则式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

称为数项无穷级数, 简称级数. 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的一般项或通项.

定义 2 设函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$$

中的每个函数都在区间 I 上有定义, 则式子

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

称为定义在区间 I 上的函数项级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots. \quad (2)$$

我们先讨论数项级数. 级数(1)是无限项和的形式, 无限多项能否相加? 其和是什么? 下面就研究这个问题.

作级数(1)的前 n 项的和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

称 S_n 为级数(1)的 n 项部分和. 当 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时, 则得到一个新的数列:

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots,$$

数列 $\{S_n\}$ 称为级数(1)的部分和数列.

定义 3 如果级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

则称级数(1)是收敛的, S 称为级数(1)的和, 记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

如果部分数列 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数(1)是发散的. 发散的级数没有和.

当级数收敛时, 其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值. $S - S_n$ 称为级数的余项, 记为 r_n , 即

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots.$$

用级数的部分和 S_n 作为和 S 的近似值, 其绝对误差就是 $|r_n|$.

例 1 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (3)$$

的收敛性.

解 如果 $|q| \neq 1$, 则部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

(i) 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$, 所以

级数(3)收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$.

(ii) 当 $|q| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 级数(3)发散.

如果 $|q| = 1$, 则

(i) 当 $q = 1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 因此级数(3)发散.

(ii) 当 $q = -1$ 时, 这时级数(3)成为

$$a - a + a - a + \dots,$$

其部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \text{ 是偶数;} \\ a, & \text{若 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

所以 S_n 的极限不存在, 级数(3)发散.

根据以上的讨论可知: 当 $|q| < 1$ 时, 等比级数(3)收敛, 其和等于 $\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时, 级数发散.

例2 判别级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots \end{aligned}$$

的收敛性.

解 由于 $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 因此

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$

所以级数收敛, 其和为 $\frac{1}{2}.$

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ 的收敛性.

解 由于 $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln n$, 因此

$$\begin{aligned} S_n &= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots \\ &\quad + [\ln(n+1) - \ln n] \\ &= \ln(n+1), \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, 所以级数发散.

根据级数收敛发散的定义, 可以得出下面几个性质:

性质 1 两个收敛的级数可以逐项相加或相减.

就是说, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 它们的和分别为 S 与 σ , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

性质 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项同乘一个不为零的常数后, 它的敛散性不改变.

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ (常数 $k \neq 0$) 具有相同的敛散性.

特别是, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛, 其和为 kS .

性质 3 增加、去掉或改变级数的有限项, 不会改变级数的敛散性.

但是,当级数收敛时,一般讲,级数的和是要改变的.

上述性质容易根据级数收敛、发散的定义及极限运算法则证明. 请读者自证.

二 级数收敛的必要条件

定理 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛,则当 $n \rightarrow \infty$ 时,它的一般项 u_n 必趋于零. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和为 S . 由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

根据这个定理可知,如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项 u_n 不趋于零(当 $n \rightarrow \infty$ 时),则级数一定是发散的. 我们称 $u_n \rightarrow 0$ 是级数收敛的必要条件,但不是充分条件,就是说,当 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散.

例 4 判定级数

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{2n-1} + \cdots$$

的敛散性.

解 由于 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{2n-1}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 不趋于零, 所以级数是发散的.

例 5 判定调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 的敛散性.

解 级数的一般项 $u_n = \frac{1}{n}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow 0$. 但这级数是发散的. 证明如下:

调和级数的 n 项部分和为

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

如图 8-1, 考察曲线 $y = \frac{1}{x}$ 由 $x=1$ 到 $x=n+1$ 所围成的曲边

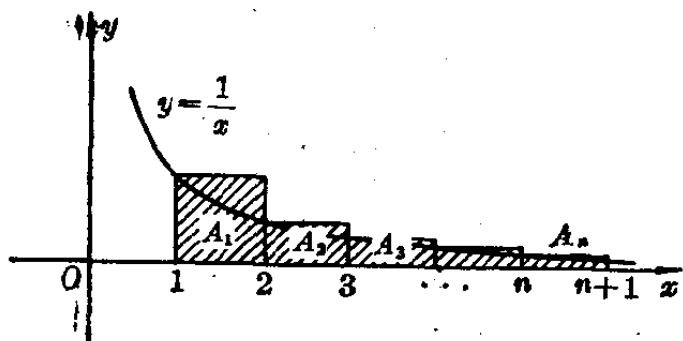


图 8-1

梯形面积与阴影部分的面积之间的关系, 可以看到阴影部分的第一块矩形面积 $A_1 = 1$, 第二块矩形面积 $A_2 = \frac{1}{2}$, 第三块矩形面积 $A_3 = \frac{1}{3}$,

$\cdots$, 第 n 块矩形面积 $A_n = \frac{1}{n}$, 所以阴影部分的总面积即为 S_n , 它显然大于曲线 $y = \frac{1}{x}$ 从 $x=1$ 到 $x=n+1$ 之间所围成的曲边梯形的面积, 即

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n A_i > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

部分和 S_n 的极限不存在, 所以调和级数是发散的.

习 题 8-1

1. 写出下列级数的前 5 项、第 10 项、第 $n+m$ 项:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}};$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{a^{n-2}} (a \neq 0).$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots;$$

$$(2) \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots (x > 0);$$

$$(3) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{a}{4 \cdot 7} + \frac{a^2}{7 \cdot 10} + \frac{a^3}{10 \cdot 13} + \frac{a^4}{13 \cdot 16} + \cdots;$$

$$(4) -\frac{3}{1} + \frac{4}{4} - \frac{5}{9} + \frac{6}{16} - \frac{7}{25} + \frac{8}{36} - \cdots.$$

3. 已知级数的 n 项部分和 S_n , 写出该级数的一般项, 并求级数的和:

$$(1) S_n = \frac{n+1}{n}; \quad (2) S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}; \quad (3) S_n = \arctg n.$$

4. 根据级数收敛、发散的定义, 判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n\alpha} \cdot \frac{1}{a^n} (a > 0);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-3}.$$

5. 判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n.$$

第二节 数项级数的审敛法

一 正项级数及其审敛法

设级数 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 的每一项都是非负数, 即 $u_n \geq 0$, 则称此级数为正项级数. 显然, 正项级数的部分和数列是单调增加的, 即

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \cdots.$$

为了讨论正项级数的敛散性, 下面介绍一个极限存在的判别法:

单调有界数列必有极限.

这里包含两种情况: 一是单调增加且有上界的数列必有极限; 另一是单调减少且有下界的数列也必有极限. 我们从数轴上直观地给以说明.

设数列 $\{u_n\}$ 是单调增加的, 即

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots.$$

所以, 随着 n 的增大, 数轴上的点 u_n 是自左向右移动的. 这种移动或者是 u_n 沿数轴的正向无限远移 ($u_n \rightarrow \infty$), 或者是 u_n 趋近于某一个定点 A . 由假设, 数列 u_n 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|u_n| \leq M$ 对所有的 u_n 都成立. 这样, u_n 就不可能移向无穷 (如图 8-2 所示). 因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 必趋近于某一定点 A . 即单调增加且有上界的数列必有极限. 类似地可以说明



单调减少且有下界的数列也必有极限.

图 8-2

由于正项级数的部分和数列 S_n 是单调增加的, 根据上述极限存在的判别法, 如果 S_n 有界, 即存在 $M > 0$, 使得对所有的 n , 都有 $S_n \leq M$ 成立, 则此正项级数必定收敛.

定理 1 (比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 且 $u_n \leq v_n$. (i) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛; (ii) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 先证第一部分, 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 记其和为 σ . 由于 $u_n \leq v_n$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n \leq \sigma,$$

即 S_n 有界, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

我们用反证法来证明定理的第二部分. 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则由条件 $u_n \leq v_n$, 根据已证明的第一部分可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也是收敛的, 这与已知条件矛盾. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是发散的. 证毕.

由于级数的每一项同乘一个不为零的常数 k , 以及去掉级数的有限项, 不影响级数的敛散性, 因此可得到如下的推论:

推论 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 并且 $u_n \leq kv_n$ ($k > 0, n \geq N, N$ 为某一正整数); (i) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛; (ii) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 1 判定级数 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$ 的敛散性.

解 因为级数的一般项 $u_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 是发散的, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 也发散.

例 2 讨论 p -级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性, 其中常数 $p > 0$.

解 当 $p \leq 1$ 时, $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$; 由于调和级数是发散的, 根据比较判别法, 当 $p \leq 1$ 时, p -级数是发散的.