面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

上册

王绵森　马知恩　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

上 册

王绵森　马知恩　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部工科数学学科“九五”规划教材，普通高等教育“九五”国家级重点教材．分上、下两册出版．第1－4章为上册，主要内容为一元微积分与无穷级数；第5－8章为下册，主要内容为多元函数微积分，常微分方程组，无限维分析入门．

本书在实数完备性基础上讲解极限理论，介绍了一致连续、一致收敛和含参变量积分等内容，以拓宽和加强基础；运用向量、矩阵等代数知识表述分析中的有关内容，研究微分方程组和空间曲线与曲面；使用现代数学的语言、术语和符号，并为学习现代数学开设内容展示窗口和延伸发展的接口；扩大应用实例的范围，突出数学思想方法的讲解，加强应用数学能力的培养；习题分为A、B两类，并配有综合练习题．书末有习题答案与提示．

本书可作为高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业本科生教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础　上册/王绵森，马知恩主编．
-北京：高等教育出版社，1998.8(1999 重印)
ISBN 7-04-006839-7

Ⅰ.工…　Ⅱ.①王…②马…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 15796 号

工科数学分析基础　上册
王绵森　马知恩　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　本	787×960　1/16	版　次	1998年7月第1版
印　张	22.5	印　次	1999年7月第2次印刷
字　数	420 000	定　价	23.60元

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国 家 级 重 点 教 材

责任编辑　文小西
封面设计　于文燕
责任绘图　尹　莉
版式设计　马静如
责任校对　俞声佳
责任印制　杨　明

前 言

本书是按照原国家教委面向21世纪教学改革立项项目《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》的要求编写的一本改革教材,面向重点院校对数学要求较高的理工科非数学类专业.旨在传授数学知识的同时,着力于提高读者的数学素养和能力,为读者在今后工作中更新数学知识,学习现代数学方法奠定良好的基础,培养读者应用数学知识解决实际问题的意识、兴趣和能力.与现行的同类教材相比,本书力求突出以下几个特点.

1. 拓宽和加强数学基础.当代科学技术的发展对数学知识的需求越来越广、越来越深、越来越现代化.在21世纪攀登科技高峰的各个领域的带头人和科技骨干,应当具备更加宽厚的数学基础.这不仅要求在大学阶段学习一定的数学知识,还需要在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的熏陶和训练,掌握学习数学的思想方法,以便提高自我更新知识、学习有关现代数学知识的能力.基于这种想法,本书加强了极限理论.在实数完备性的基础上,从确界定理出发,讲解并证明了极限理论中的几个基本定理;证明了闭区间上连续函数的几个重要性质;简要介绍了 $\mathbf{R}^n$ 空间中点集拓扑的初步知识,并在此基础上讲解多元函数的极限与连续性概念.此外,还增加了一些科学技术中颇有用处的数学知识.例如,一致连续,一致收敛,含参变量积分,向量值函数的微分,微分方程组等.

2. 注意分析、代数、几何内容的有机结合,相互渗透.本书在多元函数微积分和微分方程组部分,加强了向量和矩阵的运用,充分利用向量、矩阵和线性代数中其它知识来表述分析中的有关内容.例如,用 Jarcobi 矩阵来表示 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的多元向量值函数的微分;利用梯度、Hesse 矩阵来表示多元函数 Taylor 公式中的有关系数;利用向量和矩阵研究微分方程组;运用向量值函数的微分来研究曲线与曲面;将第二型线面积分与向量场的研究密切结合等.这种处理方法,不但符合现代数学的发展趋势,也可以更好地满足现代科技对数学用法的要求,有利于改变在后继课程中学生不习惯于运用向量和矩阵的状况,培养学生综合运用数学知识的能力.

3. 内容安排形成三个台阶,逐步提高教学要求.全书内容可分为三大部分,形成三个台阶,希望读者通过跨越三个台阶的学习,逐步提高自身的素养和学习能力,以有利于与今后学习现代数学接轨.第一部分内容,即第一个台阶,是书中的前四章,包括一元函数微积分与级数.这部分在讲解微积分基本概念、基本理

论和方法的基础上，着重于数学分析基本思维方法的训练，使读者在抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的熏陶. 第二部分内容，即第二个台阶，是书中的第五、六、七章，包括多元函数微积分和常微分方程组. 这部分将所讨论的空间由一维推广到(有限) n 维，加强了向量、矩阵在 n 维空间有关概念和理论中的应用，使一些内容的表述更趋现代化. 例如，将多元函数的微分定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性映射；将一些多元函数的积分统一为几何形体上的积分；将微分方程组写成向量形式，用矩阵的特征值理论讲解线性微分方程组的求解问题；以参数方程为主讲解曲线与曲面的有关内容. 与现行的同类教材相比，这部分内容的处理适当地提高了难度，其目的是让读者从一维空间跨入多维空间后，在抽象思维和对高维问题的表达能力等方面上一个台阶. 第三部分内容，即第三个台阶，是书中的第八章，介绍了无限维分析的初步知识和某些基本思想，显示了无限维分析的一些应用. 旨在引导读者从有限维空间跨入无限维空间，使读者对现代数学的某些思想方法有所了解，在抽象能力上得到进一步的提高.

4. 加强数学应用能力的培养. 本书在讲解数学内容的同时，力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质. 例如，在绪论中强调且贯穿全书的微积分基本思想方法；微分中的局部线性化思想；Taylor 公式和无穷级数中的逼近思想；极值问题中的最优化思想；积分应用中的微元法以及贯穿全书的变换思想和方法等. 本书除保存了一些几何、物理方面的例子外，增加了不少诸如在工程、生态、人口、经济、医学甚至日常生活方面的例题和习题，注意了应用问题的趣味性，以增强对读者的吸引力. 此外，还配备了一些综合练习题，有的需要上机计算，使读者从建立模型，寻求方法到问题解决的全过程受到初步的训练.

5. 削减次要内容，淡化运算技巧. 与现行同类教材相比，本书精减了一些次要内容. 例如，以链式法则为主精练了一元函数的求导法；不定积分只介绍换元与分部两种基本积分法，删去了有理函数、三角有理函数和某些无理函数的积分法；删去了函数作图；将某些近似计算移至后续课程等. 在习题配备上，分成 A、B 两类，A 类题为基本要求，避免过多的运算技巧；B 类题可供学有余力的读者选用.

6. 为学习现代数学开设内容展示的窗口和延伸发展的接口，尽量使用现代数学的语言、术语和符号. 例如，介绍微分方程的相平面和稳定性，无限维分析，Frenet 标架和公式等，以扩大读者视野，也为今后更新知识铺路搭桥.

学习本书下册内容需要线性代数与空间解析几何知识. 建议将线性代数与空间解析几何另行单独设课，与本课程双轨并进，并在学习本书下册内容前完成. 书中用楷体字排印的内容不作基本要求，对第七章第五节与第八章的内容，各校可视具体情况不讲或少讲. 根据我们试点的经验，用 180 学时左右(含习题

课)可以讲完本书的主要内容.

参加本书编写的有马知恩、王绵森、魏战线、常争鸣、武忠祥和徐文雄.全书分上、下两册,上册由王绵森、马知恩主编,下册由马知恩、王绵森主编.在编写过程中参阅了我校从 1992 年到 1995 年在电类教改试点班使用的《高等数学讲义》.本书初稿完成后,由部分编者王绵森、魏战线、徐文雄以及西北工业大学王雪芳、孟雅琴两位副教授分别在两校的部分班级中进行了两届教学试点,对本书的修改完善起了重要作用.西安交通大学的寿纪麟教授曾参加过总体方案和部分内容的讨论,提出了宝贵意见.编者借此机会对王雪芳、孟雅琴副教授和寿纪麟教授表示衷心的感谢.我们要特别感谢主审人董加礼教授,他花费了大量的时间,对书稿进行了非常认真细致的审查,提出了许多宝贵的意见和建议.感谢参加审稿会的谢国瑞教授以及汪国强、田铮、马继钢和林益诸教授对书稿提出的宝贵意见和建议.他们的意见和建议对提高本书的质量起了十分重要的作用.感谢高教出版社的文小西编审、杨芝馨副编审,没有他们加倍的辛勤工作,本书不可能这样快地与读者见面.

本书得到原国家教委教学改革和重点教材建设基金的资助,还得到西安交通大学教务处的关怀和资助,借此机会我们向有关方面一并表示感谢.

面向 21 世纪的改革教材应该多模式、多品种,本书仅是就其中的一种模式所作的初步探索和尝试.在内容精简和现代化以及培养学生数学应用能力等方面,我们虽然也做了一些努力,但仍感差距很大.限于编者的水平,加之短期内仓促成章,不妥与错误之处在所难免.殷切期望专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

一九九八年四月于西安交通大学

目　　录

绪　论

同学们来到大学，要学习许多新的数学课程．自然要问，它们与中学已经学过的初等数学有什么不同？它们的研究对象与方法是什么？下面就来简要地讲一讲这些问题．

大家知道，现实世界中的万事万物，无一不在一定的空间中运动变化，在运动变化过程中都存在一定的数量关系．数学就是研究现实中数量关系与空间形式的科学．简略地说，就是研究数和形的科学．时至今日，虽然数学的内容非常丰富，数学的表述形式非常抽象，数学的应用非常广泛，但是，关于数学的上述说法大体上还是正确的．只是随着人们对事物认识的逐渐深化，作为数学研究对象的“数”和“形”，在数学发展的不同阶段，表现形式也不相同罢了！

17 世纪以前的数学，研究的数是常数或常量（即在某一运动变化过程中保持不变或相对保持不变，可以看作一个固定数值的量），研究的形是孤立的、不变的规则几何形体．研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系，分别形成了初等代数和初等几何，统称为初等数学．因此，有人把这个阶段称为初等数学阶段．

1637 年，法国数学家 Descartes 建立了解析几何，使数学的发展进入了一个新阶段．在这个阶段中，研究的数是变数或变量（即在某一运动变化过程中不断变化，可以取不同数值的量），研究的形是不规则的几何形体，如曲线、曲面、曲边形和曲面形等，而且数和形开始紧密地联系起来．由于 17 世纪工业革命的直接推动，英国科学家 Newton 和德国科学家 Leibniz 各自独立地创立了微积分．此后，数学的发展遂出现了一日千里之势，形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分支，在此基础上，还出现了一些其他分支．相对于初等数学，它们被统称为高等数学．因此，有人把这个阶段（1637 年到 19 世纪末）称为高等数学阶段．同学们在大学学习的数学大都属于高等数学方面的课程．本书主要讲解工程科学中常用的数学分析的基础知识，其核心内容是微积分．

从研究常量到研究变量，从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体，是人类对自然界认识的一大飞跃，是数学发展中的一个转折点．在上述两个阶段中，不但研究的对象不同，而且研究的方法也不同．初等数学主要采用形式逻辑的方法，静止地、孤立地、一个一个问题进行研究，而高等数学却不然．下面，我们以“已知位移求速度”和“已知速度求位移”这两个经典问题为例，介绍微积分的基本思想方法，说明它与初等数学的研究方法有什么区别．

例 1　求变速直线运动的瞬时速度问题.

设一物体作变速直线运动,已知位移随时间的变化规律为 $s=s(t)$. 由于物体的运动速度是随时间不断变化的,要精确地研究物体的运动规律,必须计算它在运动过程中每一时刻的速度,就是所谓瞬时速度. 怎样认识和度量它呢?

如果物体作匀速直线运动,那么位移函数 $s=s(t)$ 是一个线性函数,s 随 t 的变化是均匀的. 即无论从什么时刻 t_1 开始,只要时间的变化 t_2-t_1 相同,位移的变化 $s(t_2)-s(t_1)$ 也相同. 这时,物体的运动速度只需用除法通过

$$v=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

来度量,它显然是一个常量. 对于非匀速运动,$s=s(t)$ 是非线性函数,s 随 t 的变化是非均匀的,即在相同的时间内位移的变化不同. 由于在不同时刻物体运动的速度不尽相同,为了度量在 t_0 时刻的速度 $v(t_0)$,考察物体从 t_0 时刻到与它邻近的 t 时刻所通过的位移 $s(t)-s(t_0)$. 记 $\Delta t=t-t_0$,$\Delta s=s(t)-s(t_0)$,则用除法得到的

$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

仅表示物体在 $|\Delta t|$ 这段时间内的平均速度,还不是物体在 t_0 时刻的速度. 若位移随时间的变化是连续不断的,则当 $|\Delta t|$ 很小时,速度的变化也很小,可以近似地看成是不变的,因此,$\bar{v}$ 可以作为 t_0 时刻速度的近似值,即

$$v(t_0)\approx\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

$|\Delta t|$ 越小,上面的近似表达式越精确. 如果令 $\Delta t\to 0$(即 $t\to t_0$),平均速度的极限存在,那么这个极限值就规定为 t_0 时刻的瞬时速度,即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

例 2　求变速直线运动的位移问题.

设物体作变速直线运动,速度随时间的变化规律为 $v=v(t)$,求在时间区间 $[a,b]$ 内物体所通过的位移 s.

对于匀速直线运动,若已知速度 v,则物体在 Δt 时间内通过的位移 Δs 只要用乘法就能求得,即

$$\Delta s=v\Delta t.$$

对于非匀速运动,速度 $v=v(t)$ 随时间 t 不断地变化,不能简单地用乘法求得.

像例 1 中那样,如果假定速度随时间的变化是连续不断的,那么,当时间间隔很小时,速度的变化很小,运动可以近似看成是匀速的.因此,若将时间区间$[a,b]$任意分割为若干小区间,物体在每个小区间内都能近似看成是匀速运动,就可以利用上面的公式求出位移的近似值.再将各段时间内通过的位移近似值相加,就可得到在$[a,b]$内物体通过的总位移的近似值.时间区间分割得越小,近似值就越精确.如果当每个时间小区间的长度无限趋近于零时,总位移近似值的极限存在,那么这个极限值就是物体在$[a,b]$内通过的总位移的精确值.

上面的分析过程可以分解为四个具体步骤:

第一步　**分**　将区间$[a,b]$任意分割为 n 个小区间$[t_{k-1},t_k]$($k=1,2,\cdots,n$),

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

每个小区间的长度记为$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

第二步　**匀**　在每个小区间$[t_{k-1},t_k]$上运动可以近似看成是匀速的,速度$v(t)$可以用其中任一时刻 $\xi_k(t_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant t_k)$时的速度近似替代,从而求得物体在各段时间内通过的位移近似值:

$$\Delta s_k\approx v(\xi_k)\Delta t_k.$$

第三步　**合**　将物体在各段时间内通过的位移近似值相加,就得到总位移的近似值:

$$s\approx\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)\Delta t_k.$$

第四步　**精**　令 n 无限趋大(记作 $n\to\infty$),且最大小区间的长度无限趋于零(记作 $d=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta t_k\}\to0$),通过取极限(如果存在的话)总位移的近似值就转化为所求总位移的精确值,即

$$s=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)\Delta t_k.$$

上面两个例子代表了微积分中的两类典型问题,具有普遍的意义.例 1 实际上是研究位移函数 $s=s(t)$当 s 随 t 非均匀变化时在 t_0 时刻变化的快慢程度,而例 2 则是研究在区间$[a,b]$上位移函数 $s=s(t)$变化的大小.现实世界中存在着大量的类似问题.例如,设有一质量非均匀分布的物质细棒,取棒的一端为原点,棒上各点的坐标为 x.若已知质量 m 随 x 的变化规律 $m=m(x)$,要求细棒上某点 x_0 处的密度 $\rho(x_0)$,实际上就是求在 x_0 处质量函数 $m=m(x)$随位置 x 变化的快慢程度.反之,若已知密度函数 $\rho=\rho(x)$,要求位于 a 点与 b 点之间

那段细棒的质量 m,实际上就是求质量函数 $m=m(x)$ 在 $[a,b]$ 内变化的大小. 舍弃上述各别问题的具体含义,从数量关系的侧面加以抽象,就分别得到了导数和定积分这两个概念,它们是微积分中两个最重要最基本的概念.

由上面可以看到,与初等数学不同,高等数学不是个别地讨论问题,而是普遍地解决问题.有了导数,就可以解决一批关于求函数在某点变化快慢程度的问题;有了积分,就可以解决一批关于求函数在某区间内变化大小的问题.其次,导数和积分分别是从局部和整体认识同一事物的两个方面.导数是研究函数在一点处的变化情况的,仅与函数在该点附近的局部性态有关;而积分则研究函数在一个区间上的变化,与函数在该区间上的整体性态有关.虽然如此,它们的研究方法却是类似的.在上面两个例子中,为了研究非匀速运动,采取的方法都是:在微小局部"以匀代非匀",将问题转化为匀速运动,求得近似值,通过求极限转化为精确值.这是微积分解决问题的基本思想方法,体现了分析矛盾,通过矛盾的转化解决矛盾的辩证法,与初等数学主要依据形式逻辑的推演方法有很大不同.

从上面两类问题不难看到,函数是微积分的研究对象,极限是微积分的基础.没有极限概念,我们无法求得两例中的精确值,只能停留在近似值.有了极限,近似值转化为精确值,才使问题从根本上得到解决. Newton 和 Leibniz 虽然创立了微积分,并且成功地将它应用到天文、力学与物理中去.然而,在那个时代,由于对函数和极限概念没有给予严格的定义,因而也不可能给出导数和积分概念的精确定义,使得微积分中的许多问题含糊不清,不能自圆其说.经过许多数学家近两个世纪的努力,到 19 世纪末 20 世纪初,人们认识到函数概念应当建立在集合论的基础上,极限理论应当建立在实数理论的基础上. 1874 年,德国数学家 Cantor 创立了集合论,不但为微积分奠定了坚实的基础,也使数学的发展进入了第三个阶段,即现代数学的阶段.关于现代数学研究对象和研究方法有哪些特点,本书不再多作介绍,在第八章中将对无限维分析作一简要介绍,读者从中可略见一斑.本书在讲解数学分析基础知识的时候,也将适当地采用一些现代数学的观点和方法,包括一些术语和符号.

由于高等数学的研究对象和研究方法与初等数学有很大的不同,因此,高等数学呈现出概念更复杂、理论性更强、表达形式更加抽象和推理更加严谨的显著特点.读者在学习高等数学的时候,应当认真阅读和深入钻研教材的内容.一方面,要透过抽象的表达形式,深刻理解基本概念和理论的内涵与实质以及它们之间的内在联系,正确领会一些重要的数学思想方法.另一方面,也要培养抽象思维和逻辑推理能力.学习数学,必须做一定数量的习题,做习题不仅是为了掌握数学的基本运算方法,而且可以帮助我们更好地理解概念、理论和思想方法.因此,读者不应该仅仅满足于做题,更不能认为,只要做了题,就算学好了数学.作为工科院校的大学生,学习数学的主要目的是为了用数学.当代科学技术的飞速

发展,不但要求我们掌握更多的数学知识,而且要求会运用这些去解决实际问题.因此,我们应当逐步培养自己综合运用所学的数学知识解决实际问题的意识和兴趣,培养建立实际问题的数学模型,运用数学方法分析解决实际模型的能力.在学习中还要提倡独立钻研,勤于思考,敢于大胆地提出问题,善于研究问题,培养自己的创造性思维和学习能力.

为了今后叙述的方便和简洁,本书将采用数学中一些常用的逻辑符号,现介绍如下:

设 P 与 Q 是两个命题,规定:

$P\vee Q$　表示命题"P 或 Q";

$P\wedge Q$　表示命题"P 且 Q";

$P\Rightarrow Q$　表示命题"若 P 则 Q"(或"P 蕴含 Q",或"P 是 Q 的充分条件","Q 是 P 的必要条件");

$P\Leftrightarrow Q$　表示命题"P 当且仅当 Q"(或"P 等价于 Q",或"P 的充要条件是 Q");

$\neg P$　表示命题"非 P",即 P 的否定命题;

$\forall$　表示"对任给的","对所有的".例如,用"$\forall x\in X, P$"表示"对集合 X 中的所有元素 x,都具有性质 P";

$\exists$　表示"存在","有".例如,用"$\exists x\in X, P$"表示"在集合 X 中存在一个元素 x,具有性质 P".