

结构塑性分析

成文山 王世纪

中国建筑工业出版社

本书主要介绍结构材料的弹-塑性性质、梁的弹-塑性弯曲、超静定梁的塑性破坏、结构极限分析、弹-塑性位移与内力计算等方面的基本原理与方法。最后通过钢梁与钢筋混凝土连续梁板的塑性设计，阐明结构塑性分析在结构设计中的具体应用。为了巩固基本概念和有效地掌握分析方法，每章后附有习题。

本书可供从事建筑结构设计的技术人员，以及土建结构工程专业的大专学生自学参考。

结 构 塑 性 分 析

成文山 王世纪

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：8 $\frac{1}{2}$ 字数：190 千字

1984年11月第一版 1984年11月第一次印刷

印数：1—12,100册 定价：0.90元

统一书号：15040·4693

目 录

第一章 绪言	1
1-1 结构材料的弹-塑性性质	1
1-2 结构的工作阶段	4
1-3 结构的分析与设计	8
1-4 结构塑性分析的研究对象与任务	13
习题	14
第二章 梁的弹-塑性弯曲	16
2-1 弹-塑性弯曲方程	16
2-2 截面塑性抵抗矩 Z_p	21
2-3 截面形状系数 α	23
2-4 截面弹-塑性弯矩	25
2-5 弯矩与曲率的关系	29
2-6 塑性铰	34
2-7 轴力效应	36
2-8 简支梁的塑性分析	38
习题	44
第三章 超静定梁的塑性破坏	46
3-1 单跨超静定梁	46
3-2 内力重分布现象	52
3-3 均布荷载作用	55
3-4 等跨连续梁	58
3-5 不等跨连续梁	68
习题	70
第四章 极限分析定理与方法	72

4-1	虚功原理及其应用	72
4-2	极限分析定理	81
4-3	静力法	83
4-4	机动法	93
4-5	框架的机构组合	106
	习题	116
第五章	弹-塑性梁与框架的位移	118
5-1	弹-塑性梁的位移	118
5-2	梁的荷载-挠度曲线与极限位移	131
5-3	简单框架的极限位移	140
5-4	塑性铰的转角	144
	习题	148
第六章	连续梁与简单框架内力的弹-塑性分析	150
6-1	基本假设和方法	150
6-2	单跨固端梁	153
6-3	两跨连续梁	159
6-4	双铰门式框架	165
	习题	168
第七章	钢梁的塑性设计	169
7-1	剪力对塑性弯矩的影响	170
7-2	保证钢梁整体稳定和局部稳定的条件和措施	178
7-3	钢梁的截面选择	183
	一、型钢梁的截面选择	183
	二、组合梁的截面选择	192
	习题	199
第八章	钢筋混凝土连续梁板的塑性设计	200
8-1	塑性设计的应用范围与基本原则	200
8-2	钢筋混凝土单向连续板的塑性设计	206
	一、等跨连续板	207

二、不等跨连续板	213
8-3 钢筋混凝土连续梁的塑性设计	217
一、均布荷载作用	217
二、集中荷载作用	227
8-4 钢筋混凝土梁的延性	238
一、钢筋混凝土受弯截面的曲率延性	239
二、钢筋混凝土梁的塑性铰转角	254
习题	260
附录 习题答案	261
参考文献	265

第一章 绪 言

普通材料力学与结构力学主要研究结构材料、结构构件以及结构体系在弹性范围内的工作,即以应力与应变、内力与变形之间的线性弹性关系为基础来阐明材料或结构体系对外部作用(包括荷载、温度与强迫变形等)的反应。实际上,结构材料以至结构体系的工作几乎都是非线性弹性的。因此,在掌握结构弹性分析的基础上,有必要进一步研究有关结构非弹性分析的问题。本章将从结构材料弹-塑性性质的介绍开始,通过对结构工作阶段的讨论,最后阐明结构塑性分析的对象与任务。

1-1 结构材料的弹-塑性性质

目前,在建筑结构中广泛采用钢材、混凝土以及由这些材料组成的钢筋混凝土或预应力混凝土等结构构件。这些材料与构件都具有不同特征的弹-塑性性质。建筑用低碳钢是一种典型的弹-塑性材料。因此,在这里根据低碳钢的拉伸应力-应变曲线来说明材料弹-塑性性质的概念。

图1-1 a 表示低碳钢拉伸试验的应力-应变曲线。从材料力学知道,图中曲线的变化反映出试件工作的不同阶段: oa ——比例阶段, bc ——屈服阶段, cd ——硬化阶段。与点 a 、 b 和 d 相应的应力分别称为比例极限、屈服极限(或屈服点)和强度极限。在比例阶段中,试件的应力与应变服

从虎克定律，即由公式 $\sigma = E\varepsilon$ 表达的线性弹性关系。这里，比例常数 E 就是大家熟知的钢的弹性模量。

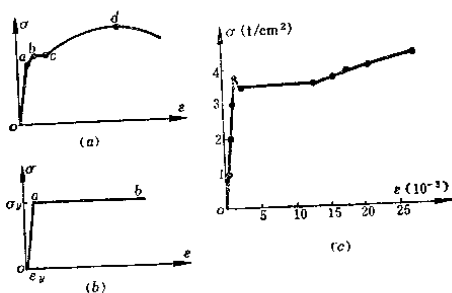


图 1-1 软钢拉伸试验的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线

试验表明，当试件的拉应力稍许超过比例极限而达到点 b 时，虽然应力与应变不再保持线性关系，但在卸载后变形仍能完全消除而恢复原状，故点 b 标志着真正的弹性范围。不过，在实用计算中通常以比例极限作为弹性极限。当进入 bc 范围后，试件在外力几乎不变的情况下塑性伸长，其伸长量约等于比例极限时伸长量的 $10 \sim 15$ 倍。在实际结构中，当构件屈服而产生如此大的变形时，结构已不能满足正常使用要求。因此，可以将软钢的应力-应变关系理想化为两根直线，如图 1-1 b 所示。斜线 oa 表示线性弹性阶段，水平线 ab 表示塑性阶段。点 a 表示屈服极限 σ_y （或 σ_s ），与其相应的应变为屈服应变 ε_y 。图 1-1 c 表示建筑型钢拉伸试验的应力-应变曲线，从图中可以看出，软钢应力-应变关系的理想曲线是能正确反映这类钢材的实际性能的。

在一般的结构分析中，应力-应变曲线能够理想地化为

图1-1 b 所示两根直线的材料称为理想弹-塑性材料。在外力作用下，这种材料的抗拉与抗压工作呈现出截然不同的两个阶段——线性弹性阶段与完全塑性阶段。这就是理想弹-塑性材料的特性。以后将说明，这种理想弹-塑性材料的结构体系恰好是结构塑性分析的研究对象，而图1-1 b 所示应力-应变曲线便是塑性分析理论的基础。

与软钢性质相近的还有铝合金，其拉伸试验的应力-应变曲线同样具有初始的线性区段，不过没有明显的屈服点，同时，取代完全塑性区段的是一根类似经硬化后软钢的曲线（图1-2）。在破坏前，铝合金试件同样产生很大的变形。

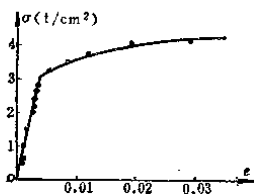


图 1-2 铝合金拉伸试验的 σ - ϵ 曲线

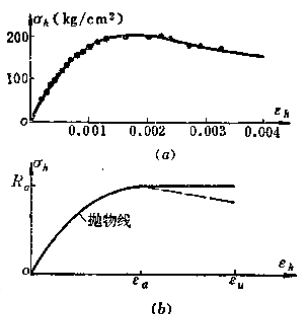


图 1-3 混凝土轴心受压试验的 σ - ϵ 曲线

此外，还存在另一类结构材料，如：混凝土与砖石砌体，其主要作用是抵抗压力。这类材料虽然在破坏时的极限变形远比软钢或铝合金的为小，但同样具有一定的弹-塑性性质。图1-3 a 表示中等强度的混凝土在轴心受压条件下的应力-应变曲线，图1-3 b 是相应的理想化曲线。混凝土材料在短期一次荷载作用下，其弹-塑性特性主要表现为，从应

力很低的水平开始，弹性变形与塑性变形同时发展，因此应力-应变曲线中不存在线性弹性区段；当应力超过某一临界点后，塑性变形显著增长，以致在理想曲线中可以用完全塑性的水平线段来表征其应力-应变关系。精确试验表明，在混凝土试件破坏前，其应力-应变曲线还带有一下降段。为了在计算中考虑混凝土的这一特性，有些理想曲线在应力超过强度极限后用一根下降线代替水平线，如图 1-3 b 中虚线所示。

由上述可知，钢结构与其它金属结构的性能无疑是弹-塑性的。同时，建筑软钢与混凝土既然都具有特征不同的弹-塑性性质，那么由它们所组成的钢筋混凝土或预应力混凝土结构的工作也一定是弹-塑性的。只有采用适当方式对这些特性予以考虑，才能在建筑结构计算中较正确地反映结构工作的实际情况。

1-2 结构的工作阶段

在结构构件或体系从开始受力到破坏的全过程中，由于材料的弹-塑性性质，整个结构工作将划分为不同的阶段。试研究一个由两根弹-塑性杆件组成的最简单的静定桁架(图 1-4 a)。假定两根杆件的力学性能相同，截面尺寸与长度相等，在节点 O 垂直作用着集中荷载 P。

根据前面关于理想弹-塑性材料应力-应变关系的假设，杆件在应力达到屈服点时，将产生塑性伸长而丧失抵抗外力的能力。这时的内力称为杆件的屈服拉力，其值为

$$N_y = \sigma_y A \quad (1-1)$$

式中 A ——杆件截面面积；

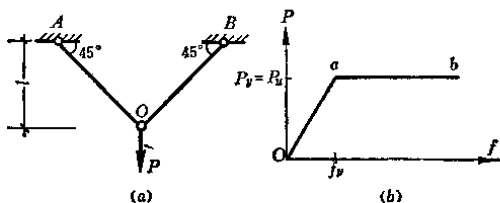


图 1-4 静定桁架计算图

σ_y ——材料屈服点。

根据静力平衡条件不难求得集中荷载 P 在杆件中产生的内力为

$$N_a = N_b = \frac{\sqrt{2}}{2} P \quad (1-2)$$

利用式 (1-1) 与 (1-2) 求得杆件屈服时的集中荷载为

$$P = \sqrt{2} N_y = \sqrt{2} \sigma_y A \quad (1-3)$$

这个荷载称为桁架的屈服荷载，可记作 P_y 。此时，节点 O 的垂直位移按结构力学公式求得

$$f_y = \Sigma \frac{N \bar{N} L}{EA} = \frac{2 N_y l}{EA} \quad (1-4)$$

由于桁架仅由两根截面相等、材性相同的杆件组成，它们的应力同时达到屈服点，故在屈服荷载作用下节点 O 的位移将不断增长。这标志着整个桁架丧失抵抗外力的能力，它的工作进入了塑性阶段。这时的荷载称为桁架的极限荷载，可记作 P_u 。在这样的情况中，桁架的屈服荷载与极限荷载相等，即： $P_u/P_y=1$ 。

由此可见，在静定桁架的受力过程中存在着两个工作阶段——弹性阶段与塑性阶段。桁架节点的荷载-位移关系如

图 1-4 b 所示。点 a 表示桁架工作由弹性阶段进入塑性阶段的临界点，也是与极限荷载 P_u 相对应的点。

现在，进一步研究另一个由三根弹-塑性杆件组成的超静定桁架的工作。假定三根杆件的力学性能相同，截面尺寸相等，集中荷载 P 同样垂直作用于节点 O （图 1-5 a）。

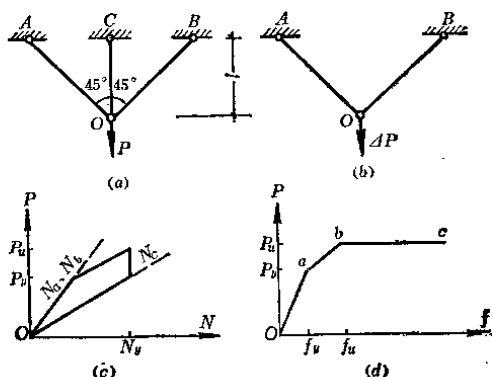


图 1-5 超静定桁架计算图

在弹性范围内，根据结构力学的分析，三根杆件的内力分别为

$$N_c = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} \quad N_a = N_b = \frac{N_c}{2} \quad (1-5)$$

节点 O 的垂直位移为

$$f = \sum \frac{N \bar{N} L}{EA} = \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{Pl}{EA} \quad (1-6)$$

从式 (1-5) 知道，中间竖杆的内力较大，在外力逐渐

增长的过程中它将首先屈服。令 $N_e = N_y$ ，求得桁架的屈服荷载与节点垂直位移为

$$P_y = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) N_y \quad (1-7)$$

$$f_y = \frac{N_y l}{EA} \quad (1-8)$$

此时，两边斜杆的内力仅相当于其屈服拉力的一半，即：
 $N_a = N_b = N_y/2$ 。

当集中荷载 $P = P_y$ 时，桁架的竖杆已经屈服，而斜杆应力则仍处于弹性范围内。虽然竖杆已经丧失抵抗能力，但两边的斜杆仍能继续工作。从整个桁架来看，它的工作已经从开始的弹性阶段进入了一个新的阶段——弹-塑性阶段。

当集中荷载 P 超过屈服荷载继续增长时，中间竖杆在保持屈服拉力 N_y 常数值条件下塑性伸长，而集中荷载的增量完全由两边的斜杆承担。这时，原来的超静定桁架实际上已转变为类似图1-4 a 所示的静定桁架。因此，荷载增量 ΔP 在斜杆中引起的内力增量，可以利用图 1-5 b 所示的计算简图求得，即

$$\Delta N_a = \Delta N_b = \frac{\sqrt{2} \Delta P}{2} \quad (1-9)$$

由于屈服荷载 P_y 已经在斜杆中产生了相当于屈服拉力一半的内力，故只需满足条件

$$\Delta N_a = \Delta N_b = \frac{N_y}{2}$$

两根斜杆也将达到屈服点。此时，由式 (1-9) 求得

$$\Delta P = \frac{\sqrt{2} N_y}{2} \quad (1-10)$$

节点 O 的位移增量为

$$\Delta f = -\frac{N_y l}{EA} \quad (1-11)$$

桁架全部杆件的屈服，标志着另一个新的工作阶段的出现。此时，结构已经完全丧失承载能力，节点O的位移将在集中力保持其极限值的条件下不断发展。这就是塑性阶段，与此相应的荷载就是极限荷载 P_u 。

从式(1-7)与(1-10)求得桁架极限荷载

$$P_u = P_y + \Delta P = (1 + \sqrt{2}) N_y \quad (1-12)$$

节点O的垂直位移则由式(1-8)与(1-11)给出

$$f_u = f_y + \Delta f = \frac{2N_y l}{EA} \quad (1-13)$$

综上所述，超静定桁架的工作可划分为三个阶段，即：弹性阶段($0 \leq P < P_y$)，弹-塑性阶段($P_y \leq P < P_u$)与塑性阶段($P = P_u$)。图1-5c表示桁架的荷载-内力关系，图1-5d表示桁架节点O的荷载-位移曲线。整个位移曲线由三根直线线段组成，每一个线段对应着一个工作阶段。

在这个超静定桁架中，极限荷载 P_u 与屈服荷载 P_y 的比值，不再象静定桁架那样等于1.0，而是大于1.0的数值

$$\frac{P_u}{P_y} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} > 1.0$$

这个特点也存在于其它类型的超静定结构中。

一般地说，由理想弹-塑性材料组成的超静定结构体系，都带有弹性、弹-塑性与塑性三个工作阶段。研究后一阶段中结构变形与内力的状态，正是结构塑性分析的基本任务。

1-3 结构的分析与设计

结构计算的问题多种多样，概括起来不外是分析与设计

两大类。已知结构的几何形状与尺寸，组成构件的截面尺寸，荷载的性质、集度与作用方式，以及材料的力学指标，要求确定结构的应力与应变（或内力与变形），估计结构的安全储备，这属于结构分析的问题。已知结构的几何形状与尺寸，荷载的性质、集度与作用方式，以及材料的力学指标，要求在给定安全系数的条件下选择最经济合理的构件的截面尺寸，这属于结构设计的问题。两类问题互相联系，而分析则是设计的基础和手段。

在建筑结构计算中，同时应用着两个设计方法——容许应力法与极限荷载法。容许应力法以弹性分析为基础，根据结构承受外力作用时其构件不致屈服或产生过大永久变形的准则来保证结构的安全储备。极限荷载法以塑性分析为基础，根据结构承受外力作用时不致完全丧失承载能力的准则来保证结构的安全储备。在容许应力法中，以结构最大应力纤维屈服（少数情况下为破坏）时的荷载为限界，其安全系数等于材料的屈服极限（少数情况下为强度极限）与设计标准荷载在结构中引起的最大工作应力的比值。在极限荷载法中，以整个结构承载能力耗尽时的荷载为限界，其安全系数等于结构的极限荷载与设计标准荷载的比值。现在，结合前面的桁架来讨论两种方法的特点和适用性。

假定桁架用3号钢制作，其屈服点 σ_s （在材料手册与设计规范中常记作 σ_s ） $=2400\text{kg/cm}^2$ ，杆件截面面积 $A=2.83\text{cm}^2$ ，设计标准荷载 $P=6.4\text{t}$ 。先分析图1-4静定桁架。从式（1-2）求得杆件内力

$$N = \frac{\sqrt{2}P}{2} = \frac{\sqrt{2} \times 6400}{2} = 4525\text{kg}$$

相应的最大工作应力

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{4525}{2.83} = 1599 \text{ kg/cm}^2$$

最后求得安全系数

$$K = \frac{\sigma_y}{\sigma_{max}} = \frac{2400}{1599} = 1.5$$

再分析图1-5超静定桁架。从式(1-5)求得最大的杆件内力

$$N_c = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 \times 6400}{2 + \sqrt{2}} = 3749 \text{ kg}$$

相应的最大工作应力

$$\sigma_{max} = \frac{N_c}{A} = \frac{3749}{2.83} = 1325 \text{ kg/cm}^2$$

最后求得安全系数

$$K = \frac{\sigma_y}{\sigma_{max}} = \frac{2400}{1325} = 1.8$$

上述计算表明，钢材力学指标和杆件截面尺寸均相同的两个桁架，按弹性分析得出了不同的安全系数。在超静定桁架中，安全系数较高，说明其截面尺寸比所需要的为大，因而，可在保证同一个安全系数 $K=1.5$ 的条件下适当减小截面，以节约钢材。

当安全系数 $K=1.5$ 时，材料的容许应力

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{K} = \frac{2400}{1.5} = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

故所需的截面面积

$$A = \frac{N_c}{[\sigma]} = \frac{3749}{1600} = 2.34 \text{ cm}^2$$

比原先的设计节约近20%。

现在对减小了截面尺寸的超静定桁架作进一步的分析。

按上述减小截面尺寸后，似乎与前述静定桁架具有相同的安全系数 $K=1.5$ 了。其实不然，因为根据塑性分析将得出更高的安全系数。从式 (1-1) 求得杆件的屈服拉力

$$N_y = \sigma_y A = 2400 \times 2.34 = 5616 \text{ kg}$$

代入式 (1-12) 求得这个超静定桁架的极限荷载

$$P_u = (1 + \sqrt{2}) N_y = (1 + \sqrt{2}) \times 5616 = 13558 \text{ kg}$$

相应的安全系数

$$K = \frac{P_u}{P} = \frac{13558}{6400} = 2.12$$

这才是这个超静定桁架抵抗结构破坏的安全系数。由此可见，确定安全系数的不同准则，使弹性分析与塑性分析两个方法给出了数值悬殊的结果。基于杆件应力确定的安全系数，并不能真正估量结构的安全储备。弹性分析仅适用于桁架工作的弹性阶段。虽然在这个范围内它能较精确地解决桁架应力-应变状态的问题，但由于它没有充分考虑整个结构的塑性特征，不能正确描述桁架在弹性阶段以外的工作，不能确切地解决桁架的强度问题。以后将说明，这个从最简单的超静定桁架分析中得出的结论具有一般的意义，同样适用于其它超静定结构的情况。

为了从设计的角度对容许应力法与极限荷载法进行比较，再取相同的安全系数 $K=2.0$ ，选择图1-5超静定桁架的杆件截面尺寸。

当运用容许应力法设计时，先求得容许应力

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{K} = \frac{2400}{2.0} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

然后利用式 (1-5) 求得最大的杆件内力

$$N_{max} = N_c = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 \times 6400}{2 + \sqrt{2}} = 3749 \text{ kg}$$

于是所需杆件截面面积

$$A = \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{3749}{1200} = 3.12 \text{ cm}^2$$

当运用极限荷载法设计时，先求得极限荷载

$$P_u = KP = 2 \times 6400 = 12800 \text{ kg}$$

然后利用式 (1-12) 求得杆件屈服拉力

$$N_y = \frac{P_u}{1 + \sqrt{2}} = \frac{12800}{1 + \sqrt{2}} = 5302 \text{ kg}$$

于是所需杆件截面面积

$$A = \frac{N_y}{\sigma_y} = \frac{5302}{2400} = 2.21 \text{ cm}^2$$

由此可见，按容许应力法设计比较浪费，而按极限荷载法设计，可以节约钢材近30%，结构自重也相应地得到减轻。这主要是由于作为极限荷载设计基础的塑性分析充分利用了材料塑性的缘故。

还应指出，塑性分析在方法上比弹性分析简捷。例如，对图1-5超静定桁架求解。弹性分析要求同时运用静力平衡条件与变形协调条件，计算复杂。但进行塑性分析，只需将杆件的屈服拉力值代入静力平衡方程，立刻就能求得极限荷载。取节点O为脱离体（图1-6），列出平衡条件

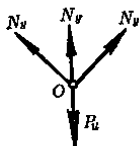
$$P_u = N_y + 2N_y \cos \theta$$

从而求得

$$P_u = (1 + \sqrt{2}) N_y$$

与式 (1-12) 的结果完全相同。

图 1-6 节点O的平衡条件



当然，对于复杂结构进行塑性分析，工作也是繁重的，不过它总比弹性分析简单。