矩阵理论及其应用

李代高 编

重庆大学出版社

矩阵理论及其应用

李代高 编

责任编辑 刘茂林 李长惠

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

中国科学技术情报研究所重庆分所印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32 印张:7.5 字数:168千

1989年1月第1版 1989年1月第1次印刷

印数:1-3000

标准书号: $\frac{\text{ISBN 7-5624-0200-0}}{\text{O·30(课)}}$ 定价:1.51元

前　言

现代工程技术的综合性和复杂性已经引起数学理论和数学方法发生深刻变化。随着电子计算机日益广泛的应用，作为其数学基础之一的矩阵理论及其应用愈来愈受到重视。时至今日，矩阵理论在工程应用上的有效性和方便性以及矩阵分析方法已遍及每个技术领域和各个研究工作中。本书是为了提高工科研究生的理论分析能力和科学实践能力以适应研究工作需要而编写的。

考虑到研究生（或中级以上工程技术人员）已具备的数学基础，本书起点放在已学完工程数学《线性代数》的基础上。重点讲述内积空间和矩阵的Jordan标准形、矩阵多项式、向量和矩阵的范数、矩阵分析、微分方程的矩阵分析解法、广义逆矩阵及其应用等内容。全书内容分为两个部份：第一部份包括第一、二章，是对《线性代数》的衔接和补充，为第二部份的讲授奠定理论基础。第二部份包括第三、四、五章，讲授矩阵理论及其应用。

鉴于工科研究生的工科性质，本书在基本概念、基本理论的讲述上力求精炼，重点放在实际应用上。在内容的处理上，考虑到现代计算手段的工程需要和对学生的分析能力和计算能力从数学上进行培养这一工科数学的特点，本书还重视了理论与实际应用的联系。目前这类书籍为数不多。

本书可作为工科院校各专业研究生及本科高年级学生选修课教材，需教学时数约40-50学时。也可作为工程技术或研究人员自学及参考使用。

本书是在研究生中使用多次的基础上改写的，得到重庆

大学李平渊教授、赵中时副教授的关心和支持，得到谢树艺教授热情的帮助，并进行了详细审阅，在此致以衷心感谢。

限于作者水平，书中不妥或错误之处，敬请读者批评指正。

李代高

1988年3月

目　录

第一章　内积空间与矩阵的 Jordan标准形

在《线性代数》中，已经学过了向量、矩阵、线性空间以及线性变换的基本知识。作为与本课程的衔接，我们首先对线性空间和线性变换作一简要概述。

第一节　线性空间及线性变换概述

一、线性空间

定义1　设V是一个非空集合，F是一个数域，如果V有下面两种运算：

（1）加法运算：对V中任意两个元素X、Y，都有V中唯一确定的一个元素Z与之对应，称Z为X与Y的和，记作$Z=X+Y$；

（2）数乘运算：对F中任一数k及V中任一元素X，都有V中唯一确定的一个元素r与之对应，称r为k与X的积，记作$r=kX$

并且这两种运算满足以下八条运算规律：

设X，Y，$Z\in V$；k，$\lambda\in F$

$1°\ (X+Y)+Z=X+(Y+Z)$　　（结合律）

$2°\ X+Y=Y+X$　　（交换律）

3°在V中存在一个元素0，对V中任一元素X，都有

$X+0=X$　　（零元律）

元素0称为V的零元素。

4°对V中每一个元素X，都有V中元素X'存在，使得

$$X+X'=0 \qquad \text{(负元律)}$$

X'称为元素X的负元素，记作$X'=-X$

5° $1\cdot X=X \quad (1\in F)$ （单位元律）

6° $(k\lambda)X=k(\lambda X)=\lambda(kX)$ （数乘结合律）

7° $(k+\lambda)X=kX+\lambda X$ （数量加法分配律）

8° $k(X+Y)=kX+kY$ （向量加法分配律）

则称V是数域F上的线性空间。

如果F为实数域(即$F=R$)，则称V为实线性空间；若F为复数域(即$F=C$)，则称V为复线性空间。

从定义可直接得出线性空间的一些基本性质：

性质1 零元素是唯一的。

性质2 负元素是唯一的。

性质3 $0\cdot X=0 \quad (0\in F;\ 0\in V)$

$k\cdot 0=0 \quad (k\in F;\ 0\in V)$

$(-1)X=-X \quad (-1\in F;\ X\in V)$

性质4 如果$kX=0$，则

$k=0$或者$X=0 \quad (k\in F;\ 0\in V)$

定义2 如果线性空间V中有n个线性无关的元素，且任意$n+1$个元素都是线性相关的，则称n为线性空间V的维数，记作$\dim(V)=n$，维数是n的线性空间，称为n维线性空间，常记为V_n。

定义3 设e_1，e_2，e_3，…，e_n是n维线性空间V中的几个线性无关的元素，则称e_1，e_2，…，e_n是线性空间V的一组基底。此时V中任一元素a，均可由这组基底唯一地线性表出。如

$$a=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$

其中系数$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为元素a在$e_1, e_2, \cdots, e_n$这组基底下的坐标。

建立了坐标以后，就可以把抽象的元素与具体的数组向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$联系起来了。因此，我们把V中的元素a，也叫做向量。此时线性空间V又叫做向量空间。

注意，线性空间中同一个向量在不同基底下的坐标是不相同的。

一般地，基底变换与坐标变换的关系如下：

定理1 设$e_1, e_2, \cdots, e_n$与$e_1', e_2', \cdots, e_n'$为n维线性空间V中的两组基底，且

$$
\begin{aligned}
e_1' &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\
e_2' &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_n' &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \text{其中} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

如果V中任意向量a，在此二组基底下的坐标分别是$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$X'=(x_1', x_2', \cdots, x_n')$则

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

证明 由于$e_1, e_2, \cdots, e_n$线性无关，则矩阵A是满秩的，因而A^{-1}存在。

因为 $\alpha=\sum_{j=1}^{n}x_je_j=\sum_{i=1}^{n}x_i'e_i'=\sum_{i=1}^{n}x_i'(\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j)$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i')e_j$$

则 $x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i'\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

故
$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

定理的逆也成立。即如果

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$ 则有

$$\begin{pmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_n'\end{pmatrix}=A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}$$

矩阵A称为由基底e_1，e_2，$\cdots$，e_n到基底e_1'，e_2'，$\cdots$，e_n'的**过渡矩阵**。

利用定理1就可由基底变换得到坐标交换；反过来，也可由坐标变换求得基底变换。

定义4 设V是数域F上的一个线性空间，S是V中的一个非空子集，若按V中的“加法”和“数乘”两种运算，S也构

成一个线性空间，则称S是V的一个线性子空间（或称向量子空间），简称子空间。

由子空间定义，显然，在任意线性空间中，由单个的零元素所组成的集合为它的一个子空间，叫做零子空间。线性空间本身也为它自己的一个子空间。这两个子空间称为平凡子空间，其它的子空间称为非平凡子空间。

线性空间V的非空子集构成V的子空间的充要条件如下：

定理2 线性空间V的非空子集S构成V的子空间的充要条件是：如果$X, Y \in S$；$k, \lambda \in F$，则$kX+\lambda Y \in S$

证明 若S是V的子空间，由子空间定义4，S对V中的两种运算（"加法"和"数乘"）是封闭的。即如果$X, Y \in S$；$k, \lambda \in F$，则$kX+\lambda Y \in S$

反之，若$X, Y \in S$，且当$k, \lambda \in F$时，有$kX+\lambda Y \in S$即S对V中的两种运算是封闭的，则有$0=0 \cdot X+0 \cdot Y \in S$，$(-1)X=-X \in S$，故$S$满足线性空间定义1中的3°、4°；又因$S$是$V$的一部分，故$V$中的运算对$S$来说，规律1°、2°、5°、6°、7°、8°显然是满足的，所以S构成V的子空间。

二、线性变换

若在线性空间V中存在某种法则$\mathscr{A}$，使V中任一向量X对应于V中唯一向量Y。则称此法则$\mathscr{A}$为V的一个变换，记作$\mathscr{A}(X)=Y$。Y称为X的象，X叫做Y的象源。

下面介绍的线性变换是最简单、最基本的一种变换。

定义5 设$\mathscr{A}$是线性空间V上的一个变换，如满足下列条件：

(1) $\mathscr{A}(X+Y)=\mathscr{A}(X)+\mathscr{A}(Y) \quad (X, Y \in V)$

(2) $\mathscr{A}(kX)=k\mathscr{A}(X) \quad (X \in V; k \in F)$

则称$\mathscr{A}$是V上的一个线性变换(或称线性算子)。

根据上面的定义可得出：一个变换$\mathscr{A}$为线性变换的充要条件是：对线性空间V中任意两个向量X，Y及数域F中任意二数k，λ，使得

$$\mathscr{A}(kX+\lambda Y)=k\mathscr{A}(X)+\lambda\mathscr{A}(Y)$$

成立。

由上述结论可以证明在线性空间V中，下列变换都是V上的线性变换。

恒等变换：$\mathscr{A}(X)=X$　又称单位变换

可记为　$\mathscr{E}(X)=X$

数乘变换：$\mathscr{A}(X)=kX$　　　$(k\in F)$

零变换：　$\theta(X)=0$　　　$(0\in V)$

设$\mathscr{A}$是线性空间V上的线性变换，从定义5可直接推出如下简单性质：

性质1　$\mathscr{A}(0)=0$；$\mathscr{A}(-X)=-\mathscr{A}(X)$

即线性变换把零元仍变为零元；把X的负元$-X$变为X的象$\mathscr{A}(X)$的负元。

性质2　设 $Y=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_rX_r$

$$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\in F)$$

则　$\mathscr{A}(Y)=k_1\mathscr{A}(X_1)+k_2\mathscr{A}(X_2)+\cdots+k_r\mathscr{A}(k_r)$

即线性变换保持线性组合与线性关系式不变。

性质3　若X_1，X_2，…，X_r线性相关，则$\mathscr{A}(X_1)$，$\mathscr{A}(X_2)$，…，$\mathscr{A}(X_r)$也线性相关。但其逆一般不成立，即线性变换$\mathscr{A}$可能会把线性无关向量组变成线性相关的。例如零变换就是这样。

定义6　设$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$是线性空间V上的两个线性变换，若对V中每一个向量X，都有

$$\mathscr{A}(X)=\mathscr{B}(X)$$

则称$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$相等，即$\mathscr{A}=\mathscr{B}$

定义7 设$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$是线性空间V上的两个线性变换，X是V中任意一个向量，k是数域F中一个数，定义：

加法： $(\mathscr{A}+\mathscr{B})(X)=\mathscr{A}(X)+\mathscr{B}(X)$

数乘法：$(k\mathscr{A})(X)=k\mathscr{A}(X)$

乘积： $(\mathscr{A}\mathscr{B})(X)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(X))$

由定义5及定义7可得如下定理

定理3 设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是线性空间V上的两个线性变换，则

(1) $\mathscr{A}+\mathscr{B}$也是线性变换；

(2) $k\mathscr{A}$也是线性变换；

(3) $\mathscr{A}\mathscr{B}$也是线性变换。

注意：两个线性变换的乘积一般不满足交换律，即

$$\mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A}$$

例如，设$\mathscr{A}(f(x))=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$，$\mathscr{B}(f(x))=\displaystyle\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$

$$\mathscr{A}\mathscr{B}(f(x))=f(x)$$

但 $\mathscr{B}\mathscr{A}(f(x))=f(x)-f(0)$ （c为任意常数）

因此 $\mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A}$

定义8 设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是线性空间V上的两个线性变换，若满足

$$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}\quad（\mathscr{E}\text{是}V\text{上的单位变换}）$$

则称线性变换$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的逆变换，记作$\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{B}$

线性变换可以通过向量的坐标来建立它与矩阵的关系。

设V是数域F上的一个n维线性空间，e_1，e_2，…，e_n是V的一组基底，$\mathscr{A}$是V上的一个线性变换，则对V中任意一个向量a，有

$$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$

对上式两端取线性变换$\mathscr{A}$，得

$$\mathscr{A}(\alpha)=a_1\mathscr{A}(e_1)+a_2\mathscr{A}(e_2)+\cdots+a_n\mathscr{A}(e_n)$$

若
$$\begin{cases}\mathscr{A}(e_1)=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\cdots+a_{n1}e_n\\ \mathscr{A}(e_2)=a_{12}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{n2}e_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathscr{A}(e_n)=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\cdots+a_{nn}e_n\end{cases}$$

用矩阵表示，可写为

$$\begin{pmatrix}\mathscr{A}(e_1)\\ \mathscr{A}(e_2)\\ \vdots\\ \mathscr{A}(e_n)\end{pmatrix}=A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}$$

其中 $$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

对上式两边转置，得

$$\mathscr{A}[e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n]=[e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n]A$$

矩阵A称为线性变换$\mathscr{A}$在基底e_1，e_2，$\cdots$，e_n下的矩阵。

再进一步讨论在线性空间中，任一向量X与它的象$\mathscr{A}(X)$在同一基底下坐标之间的关系。

定理4 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V中的一个线性变换，它在基底e_1，e_2，$\cdots$，e_n下的矩阵为A。若向量X与$\mathscr{A}(X)$在基底e_1，e_2，$\cdots$，e_n下的坐标分别为$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$和$(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，则坐标间的关系为式：

$$Y=AX$$

其中 $X^{\mathrm{T}}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，$Y^{\mathrm{T}}=[y_1, y_2, \cdots, y_n]$

证明 因为

$$X=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

对上式两边取变换，得

$$\mathscr{A}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \mathscr{A}(e_i)$$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则基向量的线性变换公式为：

$$\mathscr{A}(e_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

于是，有

$$\mathscr{A}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) e_j$$

所以 $y_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \quad (j=1, 2, \cdots, n)$

即得 $Y=AX$

线性变换的矩阵是与空间中的一组基底联系在一起的。一般说来，随着基底的改变，同一个线性变换就有不同的矩阵。

线性变换的矩阵是如何随着基底的变化而改变的呢？

定理5 设e_1，e_2，$\cdots$，e_n与e_1'，e_2'，$\cdots$，e_n'为n维线

性空间V中的两组基底。线性变换$\mathscr{A}$在此两组基底下的矩阵分别为$A=[a_{ij}]$与$B=[b_{ij}]$；又由基底e_1，e_2，…，e_n到基底e_1'，e_2'，…，e_n'的过渡矩阵为$C=[c_{ij}]$，则矩阵A、B、C之间满足如下关系式：

$$B=C^{-1}AC$$

证明 由假设知

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}e_j \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\mathscr{A}(e_i)= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\mathscr{A}(e_i') = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j' \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

于是有

$$\mathscr{A}(e_i')=\mathscr{A}(\sum_{j=1}^{n} c_{ji}e_j) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\mathscr{A}(e_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} c_{ji} (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k)= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{ji})e_k$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

另一方面有

$$\mathscr{A}(e_i')= \sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j' = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} (\sum_{k=1}^{n} c_{kj}e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} c_{kj}b_{ji})e_k \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

对上两式右边进行比较，得