韦金生 盛立刚 石心坦 卢树铭 编著

线性代数与空间解析几何

Xianxing Daishu Yu Kongjian Jiexi Jihe

辽宁科学技术出版社

线性代数与空间解析几何

韦金生　盛立刚　石心坦　卢树铭　　编著

辽 宁 科 学 技 术 出 版 社

（辽）新登字 4 号

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何/韦金生等编著．—沈阳：辽宁科学技术出版社，1994.9
ISBN 7-5381-1878-0

I. 线…
II. 韦…
III. ①线性代数 ②立体几何—解析几何
IV. O·86

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 08290 号

辽宁科学技术出版社出版、发行
（沈阳市和平区北一马路 108 号 邮政编码 110001）
合肥丰航彩印厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：7⅛ 字数：175,000
1994 年 9 月第 1 版 1994 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑：冬 风 宋纯智 版式设计：李 夏
封面设计：庄庆芳 责任校对：李效忠

印数：1—4000 定价：7.50 元

①

GF50/15

序

培养跨世纪高等工程技术人才，提高工程技术人员的数学素质，改革教学内容和教学体系是一个迫在眉捷、值得研究的课题。多年来我国高校广大同行，在这方面作了一些探索与试点，并取得了可喜的成绩。

在安徽省教委全省高校数学教学指导委员会指导及《工科数学》杂志的资助和支持下，韦金生、盛立刚、石心坦、卢树铭编著的《线性代数与空间解析几何》，在提高工程人员数学素质，适应培养跨世纪人材需要方面，对传统的工科线性代数的体系和内容，作了大胆的改革和有益的尝试。

这本《线性代数与空间解析几何》教材是作者根据自己80年代的讲义修改扩充而成的。作者的这本教材与传统工科代数教材相比，有如下特点。

1. 内容精，新意浓

传统的工科线性代数教材主要解决两个问题，一是解线性方程组；另一是研究二次型。对于第一个问题，传统教材是从向量的线性相关性到矩阵与向量组的秩，再到解线性方程组，共用了30多个定理与性质，而讲第二个问题，传统教材也用了10多个定理。这本教材在处理第一个问题时，改变了原来的矩阵秩定义，采用了新的推理次序，结果只用10多个定理与推论，就达到了原有的目的。对于第二个问题，这本教材由于采用新结构也精减

了几个定理，正因如此，这本教材节约了不少篇幅。作者用此增加了一些现代内容，如空间的交与直和，欧氏空间，仿射空间，R^n 中直线与超平面，线性变换及其运算，逆变换，共轭变换，自共轭变换，直线向量参数方程，平面向量式参数方程，以及二次型对二阶曲面的应用等。这些内容都是现代数学的必要基础。

2. 体系独物，时代感强

这本教材的系统不同于传统的教材，它有独特的风格，具有现代教学所要求的统一性的特征。它将线性代数与空间解析几何有机地结合在一起，首先让解析几何为代数提供直观背景，将线性相关、线性变换与矩阵概念建立在几何直观的基础之上。同时，作者还利用数量积与向量积知识为基正交化提供方法。最后作者还使线性代数为几何提供研究工具，将二次型知识应用于二次曲面的分类。这样便形成了线性代数与解析几何相互交叉的格局。

3. 结构严谨，立足点高

一般的线性代数教材都要涉及到三种对象，(一)矩阵；(二)一次型(即线性方程组)与二次型；(三)线性空间与变换。尽管三者看上去不同，实质上它们是彼此紧密关联的。多数命题对于这三者均可有等价描述，将它们放在一起来研究，既是现代数学的要求，也符合数学教学法原则。这本教材正是遵循这一原则来撰写的。它是以线性空间与变换为主线，以矩阵为工具，以研究一次型与二次型为具体目标来展开的。这是传统教材所不具备的。

这本书将线性空间理论、矩阵、与线性变换、行列式置于线性方程组之前的编排，也优越于传统教材，这样做可以在讲方程组时，不仅可介绍方程组的最通常的形式，而且还可直接给出方程组与克莱姆法则的矩阵记法，更重要的是它可将解线性方程组问题统一集中处理，能够避免混乱。

4. 通俗易懂，循序渐进，推理简明

这本书的定义、定理引入，都是开门见山，叙述简单明了，通俗易懂，由浅入深，推理过程简单、明了，没有令人费解的冗长的证明，书中所有定理，基本上都作了证明。读者通过自学，一般都能接受。

鉴于以上特点，可以断言，这本教材对于培养学生能力，提高观点，让学生早日接触与工程技术有关的知识，的确是一本值得推荐的新教材，我建议与传统工科线性代数教材作对比试验，不断总结经验，以求共同探索我国工科院校数学教材改革的新途径。

周伯壎

94年六月于南京大学

前　言

探索工科院校数学教材内容的改革，提高工程技术人员的数学素质，适应培养跨世纪高科技人才的需要，是一个共同关心的重要研究课题。为了能在大学学习阶段向学生提供阅读工程技术文献所需的线性代数知识，作者在广泛翻阅现代工程技术文献的基础上，结合多年的改革试点的经验撰写了这本《线性代数与空间解析几何》，供各类高校作《线性代数》课程的教材和工程技术人员参考。

这本《线性代数与空间解析几何》与现行的《线性代数》教材不同，它不是把精力集中在单纯的解线性方程组方面，而是抓住线性代数的两个核心——集合与变换，尽可能涉及现代工程技术文献所涉及的线性代数的知识。它以解析几何为背景，以代数为工具解释几何现象，将读者引导到以线性空间为基础，以线性变换为主线的线性代数的广阔天地中，由于观点较高，从而使传统内容阐述简明、直观、易教易学。如与《高等数学》课并开效果更好。

全书共八章，第一章为集合、映射；第二章为几何空间；第三章为线性空间；第四章为欧氏空间；第五章为线性变换与矩阵；第六章为特征值与特征向量；第七章为线性方程组理论；第八章为二次曲面与二次型。最后，在附录 A、B 中简单介绍了 Jordan 标准型和广义逆矩阵的基本知识，以供学有余力的读者参考。

编写中作者严格遵循由浅入深，由直观到抽象，通俗易懂，循序渐进的原则，概念清楚，论证严谨，便于教学，只需 36 课时，即可完成全部教学内容。

读者对象：本书可作为各类工科院校本科或专科生工程数学教材，也可作为综合大学、师范院校非数学专业学生的教材，对电大、职大、函大、夜大和自修大学生也是一本有价值的教材和参考

书。此外，还可供广大科技工作者参考。欢迎各校选择少数班级与现行教材作对比试验，帮助总结，共同推动我国教材改革。

我国著名数学家周伯埙教授在百忙之中审阅全书，并亲自为本书作序，国家教委工科数学课程指导委员会委员、安徽省高校数学课程指导委员会主任委员、《工科数学》杂志主编卢树铭教授对本书结构、选材、框架进行了精心、具体指导，合肥工业大学潘杰、李效忠同志细心校阅全书，提出不少宝贵的修改意见，并参与部分内容的编写，《工科数学》杂志的"图书建设基金"给予出版资助，保证了本书顺利出版。在此，我们表示衷心的感谢。

教材改革是一项艰巨而又光荣的工作。由于我们经验不足，加之受水平限制，书中缺点和错误在所难免，敬请广大同行批评指正。

韦金生　盛立刚

石心坦　卢树铭

1994.6

目　　录

第一章　集合、映射

§1　集合及其运算

1. 集合

集合是数学的最基本概念之一，它只能描述而不能严格定义。集合就是确定的某种对象的全体。

例如，某高校大学生的全体，某本书页子的全体，一切偶数的全体，某系统状态的全体都可作为集合的例子。

记号 $A=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$ 表示集合 A 由元素 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 组成。

在初等数学里，大家已知下列的数集：N 是自然数集。Z 是整数集，Q 是有理数集，R 是实数集。

"属于"的概念也是数学的一个基本概念。元素 a 属于集合 A，就记作 $a\in A$. 记号 $b\overline{\in}A$ 表示元素 b 不属于 A.

两个集合 A 与 B，如果它们都由相同元素组成，就称其相等。换句话说，等式 $A=B$ 表示，由 $x\in A$ 可推出 $x\in B$，反过来也成立。

如果集合 A 中任何元素都属于集合 B，那么集合 A 称为集合 B 的子集。记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.（读作："A 包含在集合 B 中"或"集合 B 包含集合 A"）

例如，因为任何自然数 n 都是整数，所以 $N\subset Z$. 由于任何整数 Z 都是有理数，所以 $Z\subset Q$，而任何有理数 q 都是实数，因此 $Q\subset R$. 这样一来，$N\subset Z\subset Q\subset R$.

不包含任何元素的集合，作为特殊的集合，也属于集合之列称

为空集，记作$\varnothing$.

例如，方程 $x^2+4=0$ 的实根的集合就是空集，因为这个方程没有一个实根。

记号$\{x|x\in M,P(x)\}$表示具有性质 $P(x)$的所有元素 $x\in M$ 的集合。

例如，闭区间，开区间，及半开区间可以写成下面形式：

闭区间——$[a,b]=\{x|x\in R,a\leqslant x\leqslant b\}$,

开区间——$(a,b)=\{x|x\in R,a<x<b\}$,

半开区间——$[a,b)=\{x|x\in R,a\leqslant x<b\}$,

$(a,b]=\{x|x\in R,a<x\leqslant b\}$.

2. 集合的运算

由既属于集合 A 同时也属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如，如果 $A=\{\beta,\gamma,0,3,5\}$，$B=\{0,1,2,3,\alpha,\gamma\}$，则 $A\cap B=\{\gamma,0,3\}$. 因为交 $A\cap B$ 是由 A 与 B 共有的元素组成，所以 $A\cap B=B\cap A$. 如果 $B\subset A$，那么显然 $A\cap B=B$.

由同时属于 A_i 中每一个集合的所有元素组成的集合记作 $\bigcap\limits_i A_i$，称为集合 A_i 的交，这里 i 属于某个下标集合 I.

有限个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

由至少属于集合 A 与 B 中之一的所有元素组成的集合记作 $A\cup B$，称为集合 A 与 B 的并。即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例如，集合 $A=\{0,1,2,3,\alpha,x\}$，$B=\{0,3,5,6,\alpha\}$，那么 $A\cup B=\{0,1,2,3,5,6,\alpha,x\}$. 显然 $A\cup B=B\cup A$.

由至少属于一个集合 A_i 的所有元素组成的集合记作 $\bigcup\limits_i A_i$，称为集合 A_i 的并，$i\in I$. 特别地，有限个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记作

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

由集合 A 中不属于集合 B 的那些元素组成的集合记作 $A \setminus B$，称为集合 A 与 B 的余或差。即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \overline{\in} B\}$$

例如，集合 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,y\}$ $B=\{0,2,4,6,x\}$，那么 $A \setminus B = \{1,3,5,y\}$.

假定 E 是某一基本集合。由不属于集合 A 的一切元素 $y \in E$ 组成的集合记作 A^c，称为集合 A 的补集，即 $A^c = \{y \mid y \in E, y \overline{\in} A\} = E \setminus A$.

A 与它的补集 A^c 没有公共元系，即 $A \cap A^c = \varnothing$.

利用所谓维恩图—所研究的集合的平面模型，解释集合运算是很方便的。在图 1(a)—(d)上的带斜线的区域，分别给出了集合 A 与 B 的交 $A \cap B$，并 $A \cup B$，差 $A \setminus B$ 以及补 A^c.

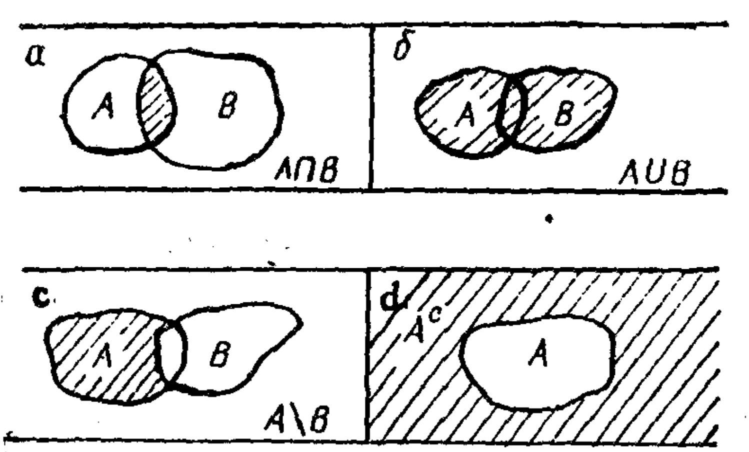

图 1

集合的“交、并、余”三种运算具有以下性质：

① $A \cap B = B \cap A$，$A \cup B = B \cup A$　　（交换律）

② $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　（结合律）

③ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$　　（分配律）

④ $A\cup\varnothing=A$，$A\cap X=A$ $(A\subseteq X)$ （恒等律）

⑤ $A\cup X=X$ $(A\subseteq X)$，$A\cap\varnothing=\varnothing$ （零律）

⑥ $A\cup\bar{A}=X$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$ （互补律）

⑦ $\bar{\bar{A}}=A$ （对合律或否定律）

⑧ $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ （DeMorgan 律）

⑨ $A\backslash B=A\cap\bar{B}$

现仅就③中交对并的分配律予以证明，其余作为读者练习题。

若 $a\in A\cap(B\cup C)$，则必有 $a\in A$，且 $a\in(B\cup C)$，即 $a\in B$ 或 $a\in C$，亦即 $a\in A$ 且 $a\in B$ 或 $a\in A$ 且 $a\in C$，于是 $a\in A\cap B$ 或 $a\in A\cap C$，因此 $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，从而可见 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

又若 $b\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $b\in(A\cap C)$或 $b\in(A\cap B)$，即 $b\in A$ 且 $b\in C$ 或 $b\in B$，于是 $b\in A\cap(B\cup C)$，因此

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$$

综上有

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

下面，对集合运算给出一般性定义

假定 M 与 N 是任意集合。以指定次序取出元素 $x\in M,y\in N$ 组成对(x,y)，称为有序对，我们规定当 $x_1=x_2,y_1=y_2$ 时，$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$. 有序对(x,y)中的 x 与 y 称为这个对的坐标(分量)，x 是第一坐标，y 是第二坐标。

由所有可能有序对(x,y)组成的集合记作 $M\times N$ 称为两个集合 M 与 N 的笛卡尔乘积，即

$$M\times N=\{(x,y)\mid\forall x\in M,\forall y\in N\},$$

例如，集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{2,3\}$，那么 $M\times N=\{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$.

交换集合 M 与 N 的位置，得到 $N\times M=\{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$. 比较 $M\times N$ 与 $N\times M$ 可以发现，在一般情况下，$M\times N\neq N\times M$.

集合 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid\forall x_1\in M_1,\forall x_2\in M_2,$

$\cdots, \forall x_n \in M_n\}$，称为 n 个集合 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的笛卡尔乘积。它的元素是一有序组 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$，其中的 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 是依给定的次序，分别从集合 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 中取出的。如果 $M_1 = M_2 = \cdots = M_n$，那么笛卡尔乘积 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ 又记为 M^n.

笛卡尔乘积，在几何上可以作直观解释。

例 3 如果 $M = \{x \in R \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$，而 $N = \{y \in R \mid -2 \leqslant y \leqslant -1\}$，那么笛卡尔乘积 $M \times N$ 与 $N \times M$ 就是图 2 上所表示出的矩形。

例 4 如果 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$，$N = \{z \in R \mid 1 \leqslant z \leqslant 2\}$，那么 $M \times N$ 就是圆柱的侧面。（见图 3）。

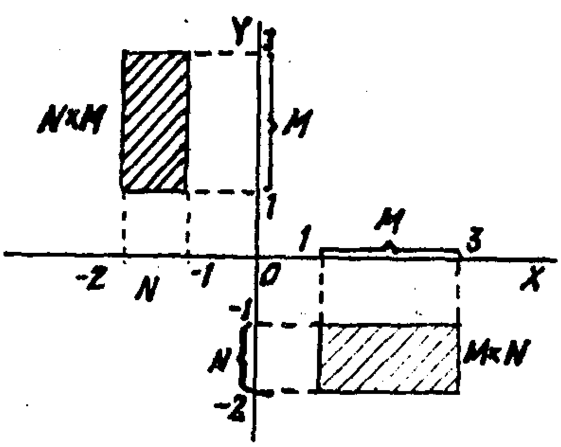

图 2

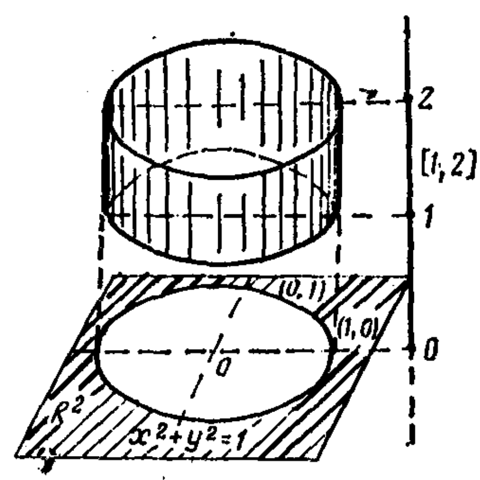

图 3

我们知道，数有各种各样的运算，如数的四则运算、对数运算等，这些运算有的是由一个数按一定规则得到另一个数，有的是由两个数按一定规则给出第三个数，又如求两个自然数的最大公因数，最小公倍数；求两个正数的几何平均数、算术平均数；从两个数中可得到最大的、最小的数；也都是由两个数按一定规则给出第三个数。对于集合而言，两个集合的交、并、余，也都是由两个集合按一定规则给出第三个集合。这些都纳入“运算”这个概念的范畴，推而广之，我们有如下“运算”的一般的定义。

定义 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X$ 是 $n+1$ 个非空集合，若有一法则，使每一个元素 $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$，都有唯一确定的一个

$y \in X$ 与之对应，则称该法则为定义在 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上取值于 X 的一个 n 元运算。记作 $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n = y$，若 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$，则 n 元运算叫代数运算，或者说 X 上的 n 元运算是封闭的。

通常用到较多的是一元运算和二元运算。

§2 逻辑符号和逻辑命题

1. 逻辑符号

很多数学概念写成包含有某些逻辑符号的表达式形式会带来方便。

例如，符号 $\forall$ 称为全称量词，它可用来代替“对于任何的”，“对于一切的”，“不论对于什么样的”等语句。而符号 $\exists$ 称为存在量词，它可用来代替“存在”，“可找到”，“有”等语句。

例 1 我们知道，如果对于任何 $x \in X \subset R$，都有等式 $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -(f(x))$ 成立，则称函数 f 是偶函数（奇函数），其中 $x \subset R$ 是函数的定义域，它关于坐标原点对称。利用全称量词来定义偶（奇）函数，可以写成：

$$(\forall x \in X \subset R): f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

在此公式以及以后的公式中，将用圆括号把与逻辑符号有关的表达式区分开。式中的“ : ”表示“成立”。

例 2 函数的周期性　定义在整个数轴上的函数 f，如果存在实数 $T \neq 0$，使对一切 $x \in R$，等式 $f(x+T) = f(x)$ 成立。利用量词，这个定义可以表示如下：

$$(\exists T \neq 0)(\forall x \in R): f(x+T) = f(x)$$

除了全称量词 $\forall$ 与存在量词 $\exists$ 外，还常常利用逻辑推理的符号 $\Rightarrow$ 及等价符号 $\Leftrightarrow$。符号 $\Rightarrow$ 表示“推出”（一个命题由另一个推出），$\Leftrightarrow$ 表示在它两边的命题等价。例如，集合 B 的子集 A 的定义，可以这样来叙述：

$$(A \subset B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)), \forall x \in A,$$

2. 逻辑命题

一个命题就是一个陈述句。这个句子陈述的事情或者是真的，或者是假的。我们用字母 A、B、C 等来表示命题。

如果从某命题 A 的成立，能推出命题 B 正确，那么 A 就称做 B 的充分条件，而 B 就称做 A 的必要条件。这个事实可写成 $A \Rightarrow B$，即："由 A 推出 B". 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，那么 A (B)称做 B (A)的充分必要条件。又称 A 与 B 是等价的，记作 $A \Leftrightarrow B$

例如，当 $a \neq 0$ 时，$ax^2 + 2bx + c > 0$ $(\forall x \in R)$的充分必要条件是 $a > 0, b^2 - ac < 0$

与某命题 A 相反的命题，称为 A 的否定，记作 $\neg A$. 显然对于非 A 的否定就是 A，即 $\neg(\neg A) = A$(两次否定律)。

假定对于一切 $x \in M$ 有某性质 $\alpha(x)$ 成立，简单记为 $\forall x \in M : \alpha(x)$.

这个命题的否定，显然是下列断言："至少可以找到一个元素 $x^* \in M$，使 $\alpha(x^*)$不成立。"也即 $\neg\alpha(x^*)$成立。因此得到关系式：

$\neg((\forall x \in M) : \alpha(x)) \Leftrightarrow ((\forall x^* \in M) : \neg\alpha(x^*))$，即在否定从量词 $\forall$ 开始的表达式时，结果 $\forall$ 要用量词 $\exists$ 来代换，而否定符号则转移到性质 $\alpha(x)$上。

类似地，可以证明关系式

$$\neg((\exists x^* \in M) : \beta(x^*)) \Leftrightarrow ((\forall x \in M) : \neg\beta(x))$$

也即在否定从量词 $\exists$ 开始的表示式时，结果 $\exists$ 要用量词 $\forall$ 来代换，而否定的符号转到性质 $\beta(x)$上。

定理 0.1　当且仅当命题 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 成立时，命题 $A \Rightarrow B$ 成立，即

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1.1}$$

证　设 $A \Rightarrow B$. 假定 $\neg B$ 成立，如果在此情况下 A 成立，则由条件 $A \Rightarrow B$ 便可推得 $\neg B \Rightarrow B$，而这是不可能的。因而应当有 $\neg B \Rightarrow \neg A$.