13

复数与几何

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数 学 小 丛 书

(13)

复数与几何

常庚哲　伍润生

北 京 市 数 学 会 编

人 民 教 育 出 版 社

1964 年 · 北京

这本小册子通过了许多的例子，说明了复数在平面上的几何学中的一些方便的、有趣的应用。第一节"复平面"简单复习关于复数的基本知识。第二节"一些例子"列举了复数应用于几何学的一些一般性的例子。以下三、四、五、六节分别说明复数在"共线、共圆、共点"，"圆族"，"复数的分式线性变换"，"等速圆周运动"等方面的应用。在说明这些应用的同时，介绍了一些数学上常用的思考方法。小册子中还附有习题和题解，提供练习的机会。

复数与几何
常庚哲　伍润生
人民教育出版社出版（北京沙滩后街）
新华书店北京发行所发行
全国新华书店经售
天水新华印刷厂印装

统一书号：13012·0250　字数：43千
开本：787×1092 毫米 1/32　印张：$2\frac{3}{8}$
1964年9月第一版
1979年1月第3次印刷
印数：101,001—404,000册

定价 0.20 元

編者的話

数学課外讀物对于帮助学生学好数学，扩大他們的数学知識領域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生閱讀的通俗数学讀物．我們約請一些数学工作者，編写了这套“数学小丛书”，陆續分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介紹一些課外的数学知識，以扩大学生的知識領域，加强对数学基础知識的掌握，引导学生独立思考，理論联系实际．

这是我們的初步想法和尝試．热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物．

北京市数学会

1962 年 4 月

引　言

从中学代数教科书中，讀者已經学习过复数的基本概念和运算．但是在那里学到的主要是复数的代数性质，例如：为了解决在实数范圍內不可能解出的方程 $x^2+1=0$ 而引入了虛单位 i，后来又利用复数开出 1 的 n 次方根等等．讀者可曾想到，正是在代数上起着重要作用的复数，它在平面上的几何学中也能找到应用？这本小册子的目的就是通过許許多多的例子来显示出复数在几何上的应用．

我們假定讀者对于复数的定义和它的代数运算已經熟悉．但是，为了便于大家回忆，还是在第一节中簡略地复述一下复数的基本知識．

我們希望讀者尽可能地多做每节之后所附的习題，这对于掌握該节所介紹的方法大有好处．

目　　次

引言

一　复平面……………………………………………………1

二　一些例子…………………………………………………9

三　共綫、共圓、共点………………………………………19

四　圓族………………………………………………………36

五　分式綫性变换……………………………………………44

六　等速圓周运动……………………………………………62

习題解答与提示………………………………………………65

一 复平面

每个复数 z 都具有 $x+iy$ 的形式，其中 x 和 y 都是实数，分别称为 z 的实部和虚部，記成 $x=R(z)$，$y=I(z)$．i 称为虚单位，适合 $i^2=-1$．两个复数 z 与 z' 当且只当 $R(z)=R(z')$，$I(z)=I(z')$ 时才成立着 $z=z'$．

我們可以在平面上表示复数．在平面上取定一直角坐标系 OXY．对于复数 $z=x+iy$，我們用平面上具有横坐标 $x=R(z)$ 与纵坐标 $y=I(z)$ 的点 $(x,y)=(R(z),I(z))$ 来表示（图 1.1）；反之，若給出平面上一点 (x,y)，我們取复数 $x+iy$ 与这个点对应．这样，就建立了平面上所有的点和一切复数之間的一个一一对应．正因为如此，我們就把复数和平面上的点完全等同起来，以后把具有坐标 $(R(z),I(z))$ 的那点就用复数 z 来表示，說成点 z．这样，平面上的每一点 z 都与一个确定的复数对应着，这个平面，就称之为复平面，OX 軸称为实軸，OY 軸称为虚軸，O 称为原点，它用复数 0 表示．

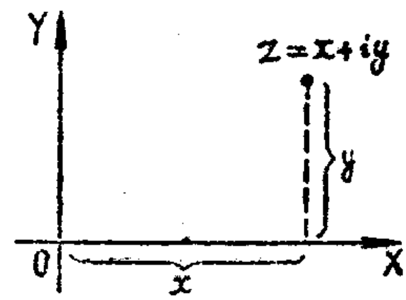


图 1.1

我們还可以把复数看成平面向量，所謂向量，是指既有方向又有长短的量．給出一复数 z，以原点 O 为起点，以点 z 为終点，可以連成一条有方向的綫段，这就是一个向量，用 $\overrightarrow{Oz}$ 表示．反之，画出一个由 O 点起的向量，它的終点便唯一地确定了一个复数．这样看来，平面上所有从原点出发的向量与一

切复数之間也有了一个一一对应．正因为如此，我們就可以把平面上的向量和复数完全等同起来．今后就用复数 z 来表示向量 $\overrightarrow{Oz}$，并且約定可以写成

$$z=\overrightarrow{Oz}.$$

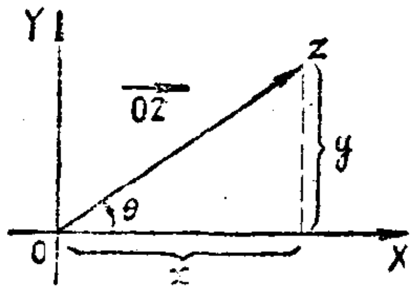


图 1.2

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度用記号 $\|\overrightarrow{Oz}\|$ 表示．令 $\rho=\|\overrightarrow{Oz}\|$，由图 1.2 可以看出

$$\rho^2=x^2+y^2.$$

这个公式解决了向量长度的計算．那么如何表示出向量的方向呢？显然可以用 $\overrightarrow{Oz}$ 与实軸正方向之間的夹角 θ 来表示，不过，我們要規定 θ 的正負号．当 z 在包括实軸在內的上半平面时，θ 取非負值并滿足 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$；当 z 在不包括实軸在內的下半平面时，θ 取負值，并且适合 $-\pi<\theta<0$．只有 $z=0$ 是例外，这时无法規定 θ 的値．事实上这时向量 $\overrightarrow{Oz}$ 縮成了一个点，它的长度为零，当然談不到有什么确定的方向，这种向量称为零向量．

仍由图 1.2 可見

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

利用这个公式，对于任意异于零的复数 $z=x+iy$ 都可表成如下的形式

$$z=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

为簡便起見，我們把 $\cos\theta+i\sin\theta$ 用一个記号 $e^{i\theta}$ 来記，亦即置

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

于是就有

$$z=\rho e^{i\theta}.$$

这个表达式，很明显地指出了复数的向量性质：ρ表长短，$e^{i\theta}$管方向，它們各司各职，而复数z作为它們的乘积，就是一个既有长短又有方向的量——亦即为一向量了.

我們令$|z|=\rho$，称为z的**模**. 滿足条件$-\pi<\theta\leqslant\pi$的θ称为z的**幅角**，記成$\theta=\arg z$.

例
$$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},$$
$$i=e^{i\frac{\pi}{2}},$$
$$-1=e^{i\pi},$$
$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}},$$
$$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

讀者已經知道，若$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$，則z_1+z_2是指复数
$$(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$
我們来看看，这种加法运算具有什么样的几何解释.

以$\overrightarrow{Oz_1}$和$\overrightarrow{Oz_2}$为两邻边作一平行四边形Oz_1zz_2.

由图1.3可見
$$R(z)=x_1+x_2=R(z_1+z_2),$$
$$I(z)=y_1+y_2=I(z_1+z_2).$$
由复数相等的定义可知
$$z=z_1+z_2.$$

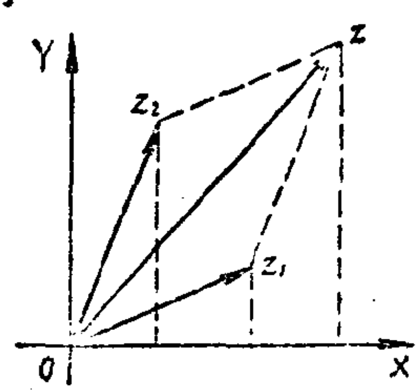


图 1.3

我們也可以将此公式改写为

$$\overrightarrow{Oz}=\overrightarrow{Oz_1}+\overrightarrow{Oz_2},$$

这正是向量加法的平行四边形規則.

前面已經說过，一个向量的要素只有两个，即长短和方向，至于其它的一切东西，例如起点的位置，都是无关紧要的.如果有两个向量，它們的长短和方向相同，我們就說这两个向量是相等的．于是我們就可以考虑起点不在原点的向量，比如起点是 z_1 終点是 z_2 的向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$（图 1.4），将它的起点搬到原点去而不改变它的方向，就得到另一向量 $\overrightarrow{Oz'}$，根据向量相等的意思，应当有

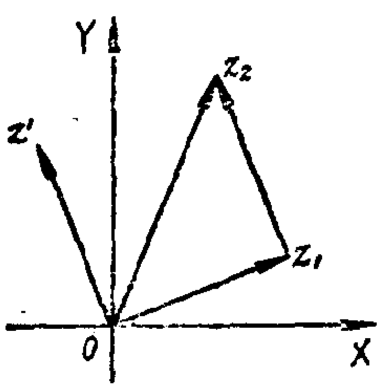


图 1.4

$$\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{Oz'}.$$

但是由向量加法的定义，又有

$$\overrightarrow{Oz'}+\overrightarrow{Oz_1}=\overrightarrow{Oz_2}.$$

从而

$$\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{Oz'}=\overrightarrow{Oz_2}-\overrightarrow{Oz_1}=z_2-z_1.$$

这就是說，起点在 z_1 終点在 z_2 的向量，如果把它平行地移动使起点落到原点，那么这个向量就可以用复数 z_2-z_1 表示．这个看法請讀者务必搞清楚，因为在这本小册子中一再地利用了这个事实．例如起点在 -1 終点在 i 的那个向量可用 $i-(-1)=1+i$

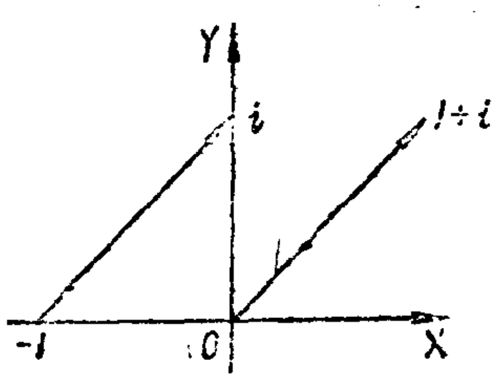


图 1.5

来表示(图 1.5)。

現在再来复习复数的乘法，設

$$z_0=\rho_0 e^{i\theta_0},\quad z=\rho e^{i\theta}.$$

所以

$$\begin{aligned}z_0 z&=(\rho_0 e^{i\theta_0})(\rho e^{i\theta})\\&=\rho_0\rho(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\rho_0\rho[(\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta)\\&\quad+i(\sin\theta_0\cos\theta+\cos\theta_0\sin\theta)]\\&=\rho_0\rho[\cos(\theta_0+\theta)+i\sin(\theta_0+\theta)]\\&=\rho_0\rho e^{i(\theta_0+\theta)}.\end{aligned}$$

我們不对这个公式作一般的几何解釋，只注意它的两个重要的特殊情况。

1) 当 $\rho=|z|=1$ 时，$z=e^{i\theta}$，于是

$$zz_0=e^{i\theta}z_0=\rho_0 e^{i(\theta_0+\theta)}=|z_0|e^{i(\theta_0+\theta)}.$$

这表明，用 $e^{i\theta}$ 去乘任一个复数 z_0，并不改变 z_0 的模，但是使 z_0 的幅角增加了 θ. 从几何上来看，用 $e^{i\theta}$“作用”(乘) 到向量 z_0 上去，得到了一个与 z_0 长短相同的向量，它的方向是由 z_0 的方向轉动一个角度 θ 而得到. 这里須加一点說明，由于 θ 可正可負，当 $\theta>0$ 时，把 z_0 沿反时針方向轉动 θ 就得到了向量 $z_0e^{i\theta}$；若 $\theta<0$ 时，把 z_0 沿順时針方向轉动 $-\theta$ 才得到向量 $z_0e^{i\theta}$. 特别，因为

$$iz_0=e^{i\frac{\pi}{2}}z_0,\quad -iz_0=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_0,$$

可知向量 iz_0 和 $-iz_0$ 是把 z_0 分别沿反时針方向和順时針方向轉一直角而得. 由 $-z_0=(-1)z_0=e^{i\pi}z_0$，可知 $-z_0$ 的方

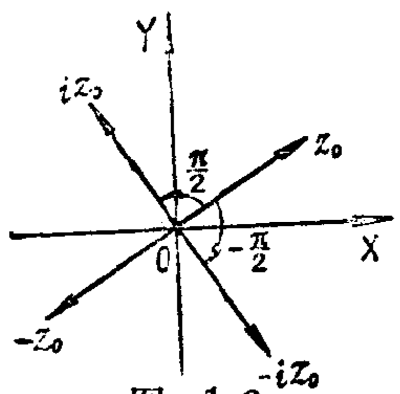


图 1.6

向正好和 z_0 的方向相反，这两个向量互为逆向量(图 1.6).

2) 当 $\theta=0$ 时，$z=\rho>0$，即此时 z 为一正实数，因此

$$zz_0=\rho z_0=(\rho\rho_0)e^{i\theta_0}.$$

这表明，用正实数 ρ 去乘复数 z_0，不改变 z_0 的幅角，只使它的模乘上了 ρ 倍. 从几何上来看，用正实数 ρ“作用”(乘)到向量 z_0 上去，并不改变 z_0 的方向，只是使 z_0 的长短“拉长”(当 $\rho<1$ 时实际上是縮短)了 ρ 倍. 根据这点說明，特别的，由图 1.7 可见，z_1 与 z_2 連綫的中点可以用复数 $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ 来表示.

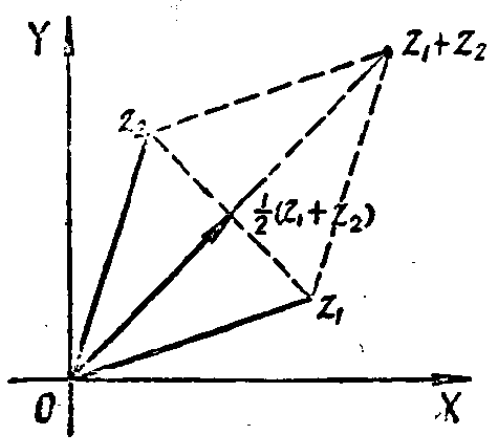


図 1.7

由于乘法的公式已經得到，于是对于

$$z_1=\rho_1 e^{i\theta_1},\quad z_2=\rho_2 e^{i\theta_2},$$

有

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}.$$

对于这个公式应当特别理解的是 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ 表示着由向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 轉到 $\overrightarrow{Oz_2}$ 所扫过的有向角度——即带有一定正负号的角度. 如果 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)>0$，表示这轉动的角度是沿反时針方向(图 1.8). 如果 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)<0$，表示是沿順时針方向轉动的角度

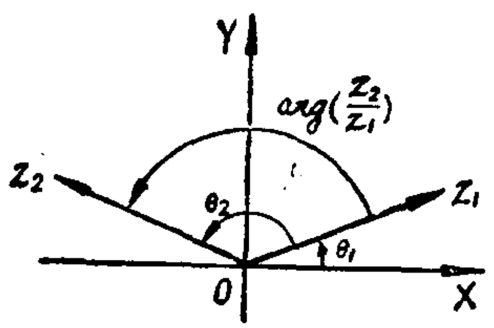


图 1.8

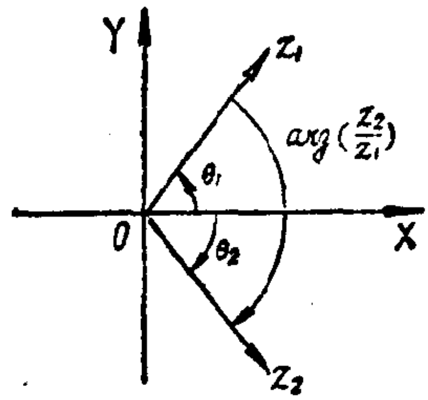


图 1.9

(图 1.9). 显然，这种轉动的角度，按絕对值来說是不超过 π 的.

例如要算出 i 到 $-(1+i)$ 的有向轉动角(图 1.10).

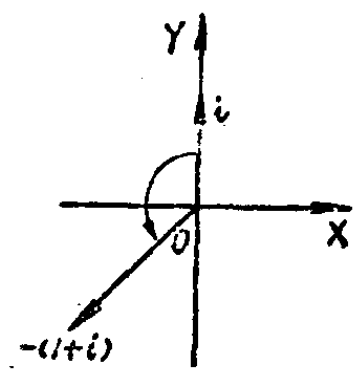


图 1.10

$$\arg\left[\frac{-(1+i)}{i}\right]=\arg\left(-1-\frac{1}{i}\right)$$

$$=\arg(-1+i)$$

$$=\frac{3}{4}\pi.$$

最后复习一下 1 开 n 次方，这里 n 为自然数，这就是說要求出复数 z 使 $z^n=1$. 設 $z=\rho e^{i\theta}$，于是

$$z^n=\underbrace{\rho\cdot\rho\cdots\rho}_{n\text{个}}\cdot\underbrace{e^{i\theta}\cdot e^{i\theta}\cdots e^{i\theta}}_{n\text{个}}$$

$$=\rho^n e^{in\theta}=1.$$

对等式的两边取模，得 $\rho^n=1$，因 ρ 是正实数，故 $\rho=1$. 因为，不論 k 是什么整数，当 $n\theta=2k\pi$ 时都有

$$e^{in\theta}=e^{i2k\pi}=1,$$

所以 $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ 对于任何整数 k 都是 1 的 n 次根，但是在它們中

間，彼此不同的只有 n 个，这 n 个根可以令 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 而得到，即

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ e^{i\frac{4\pi}{n}}, \cdots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

是 n 个互不相同的 1 的 n 次根．它們叫做 n 次单位根．由于它們的模等于 1，所以都在以原点为中心半徑为 1 的圓周(此圓称为单位圓)上，而且相邻的两个幅角相差 $\frac{2\pi}{n}$．

特别的，当 $n=3$ 时，得三次单位根为：

$$1, \ e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \ e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

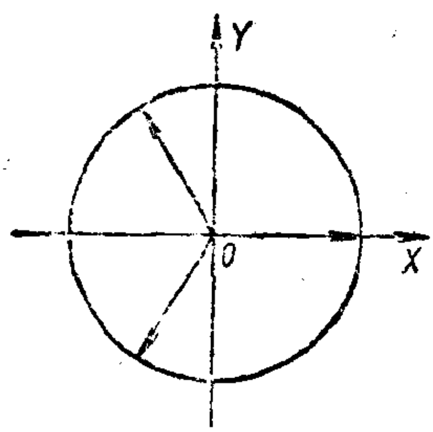


图 1.11

它們的分布如图 1.11 所示．

一切必要的預备知識的叙述到此为止．这都是一些簡单的、在中学課本里已經学过的东西，但是对閱讀这本小册子以后的内容来說都是基本重要的．特别是把复数看成平面向量；复数加法的平行四边形法則；用 $e^{i\theta}$ 去乘 z_0 的几何解釋；用一正实数 ρ 去乘 z_0 的几何解釋等等，都应該彻底了解并学会熟练地运用．

第一节的习題

1．滿足下列关系的点 z 位于何处？作出图形．

1． $|z|\leqslant 2$　　　　2． $2<|z|\leqslant 4$

3． $R(z)>\frac{1}{2}$　　　　4． $I(z)\leqslant\frac{1}{2}$

5. $R(z)=I(z)$　　　　6. $\arg z=\frac{\pi}{4}$

7. $0\leqslant\arg z<\frac{\pi}{4}$　　　　8. $I(z^2)=2$

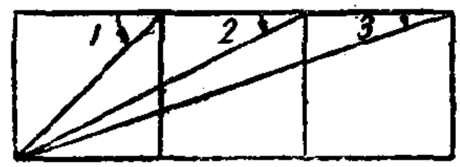
9. $I(z^2)>2$　　　　10. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$

2. 巳知一正三角形两頂点为 a、b，試写出在一切可能情形下的另一頂点.

3. 巳知一正方形的两頂点为 a、b，試写出在一切可能情形下的其它两頂点.

4. 右图是并列的三个大小相同的正方形，证明

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\frac{\pi}{2}.$$



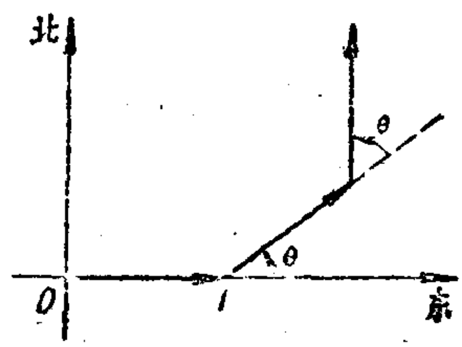
(第 4 题)

5. 設 z_1、z_2、z_3 三点适合下列条件：

$$z_1+z_2+z_3=0,$$
$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1.$$

求证 z_1、z_2、z_3 是內接于单位圓的正三角形的三个頂点.

6. 有一个人在草原上漫步，开始时从 O 处出发，向正东行走，每走过 1 公里后便向左轉一角度 θ. 間他走过了 N 公里后，离出发点的直綫距离是多少(見右图)？



(第 6 题)

二　一些例子

这里，我們用第一节中介紹过的知識来解一些初等几何中的問題.

1° 从复数相加的几何解释(参看图 1.3)，可以看出

$$\|\overrightarrow{Cz}\|\leqslant\|\overrightarrow{Oz_1}\|+\|\overrightarrow{Oz_2}\|.$$

这是因为：任何三角形两边之和必不小于第三边. 把上述不等式用复数写出来是

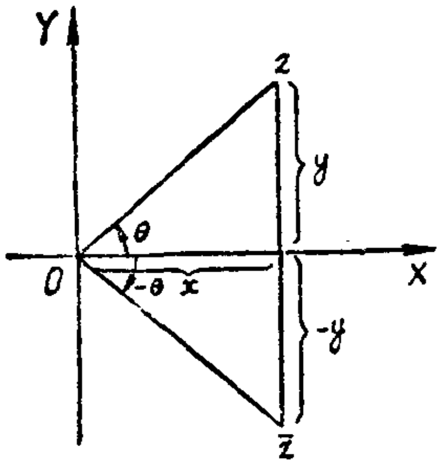


图 2.1

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (1)$$

这是一个常用的不等式.

现在設 $z=x+iy=\rho e^{i\theta}$. 令 $\bar{z}=x-iy$, 称 $\bar{z}$ 为 z 的**共轭复数**. 容易看出, z 与 $\bar{z}$ 居于关于实軸对称的位置(图 2.1). 于是

$$\bar{z}=\rho e^{-i\theta}.$$

故

$$|z|^2=\rho^2=(\rho e^{i\theta})(\rho e^{-i\theta}),$$

亦即

$$|z|^2=z\bar{z}. \qquad (2)$$

設 a 为一固定点. 若动点 z 到 a 的距离等于常数 ρ, 則 z 滿足条件

$$|z-a|=\rho. \qquad (3)$$

可见适合(3)的点 z 描画出以 a 为中心以 ρ 为半徑的圓周. 可以将(3)改写成

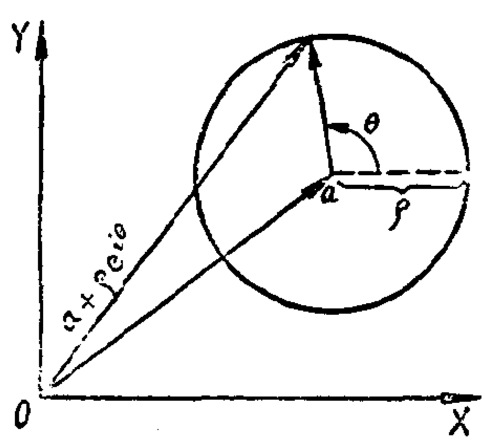


图 2.2

$$z-a=\rho e^{i\theta}, \ (-\pi<\theta\leqslant\pi)$$

亦即

$$z=a+\rho e^{i\theta}. \qquad (4)$$

当 θ 从 $-\pi$ 变到 π 时, 由(4)的右边表达的复数 z 就描出圆周一圈(图 2.2).

特别，若此圆中心在原点，即 $a=0$，则圆周上的点 z 适合

$$|z|=\rho \text{ 或 } z=\rho e^{i\theta}.$$

对于单位圆周上的点 z，则有

$$|z|=1 \text{ 或 } z=e^{i\theta}.$$

例 1 证明等式 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并对此等式作出几何解释.

证 利用(2)可得

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2),$$
$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2).$$

将此二式相加便得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

这等式的几何意义是：平行四边形的对角綫的平方和等于四条边的平方和(图 2.3).

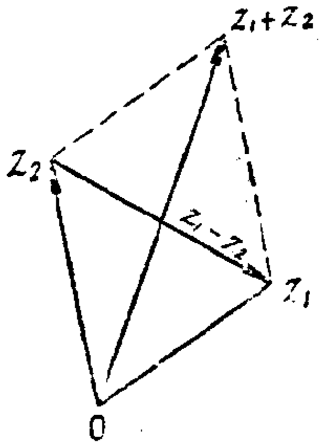


图 2.3

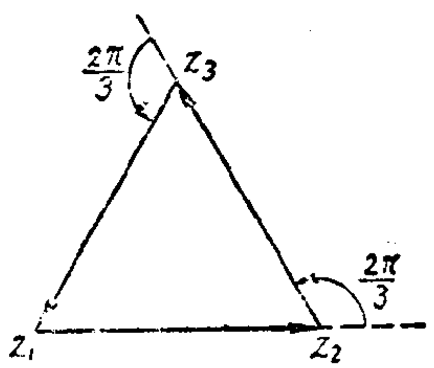


图 2.4

例 2 求证三个复数 z_1、z_2、z_3 組成一正三角形的三个頂点的必要充分条件是它們适合等式