

第二版

数理化自学丛书

# 平面几何

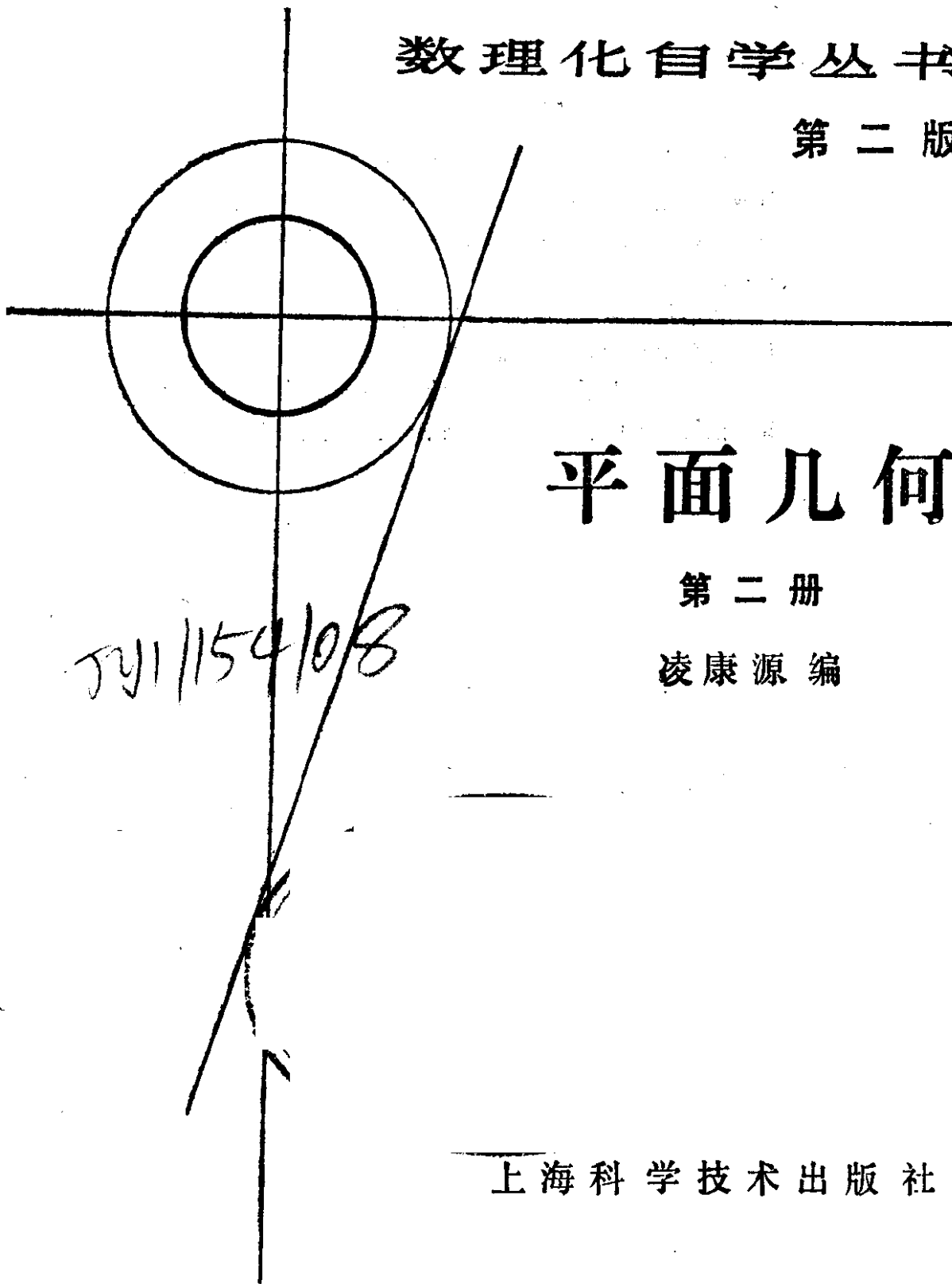
第二册

凌康源 编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

第二版



# 平面几何

第二册

凌康源 编

JY1115410/8

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

第二版

# 平面几何

第二册

凌康源 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

安徽省新华书店发行 安徽新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.75 字数 278,000

1964年4月第1版

1982年8月第2版 1982年8月第10次印刷

印数 696,001—906,000

统一书号: 13119·37 定价:(科二)0.74元

## 内 容 提 要

本书介绍了平面几何中的相似形，有关三角形和圆的线段间的度量，多边形的面积，正多边形和圆的周长、面积等。讲解详尽，说理透彻，并配有大量插图和例题，适宜于自学。

本书每节每章之后都配有一定数量的习题，供读者选用。题号前有“\*”的较难一些，可暂时不做。

本书可供青年工人，知识青年，在职干部或学习过本书第一册的读者自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

## 第二版出版说明

《数理化自学丛书》第二版是在第一版的基础上编写而成的。考虑到我社已出版大学数、理、化自学丛书，中学数学中的微积分内容没有另编分册。第二版仍包括《代数》四册、《平面几何》两册、《平面三角》、《立体几何》、《平面解析几何》、《物理》四册和《化学》四册，共十七册。

由黄丹夔、杨荣祥、余元希、杨逢挺、桂君协等同志主编的第一版，自1963年陆续出版后，受到广大读者的欢迎。特别是1977年重排、重印以来，受到社会各方面极为广泛的关注，在广大读者中有了相当的影响。许多在职职工、农村青年和在校学生，自学了这套书以后，数理化知识水平有了一定的提高。

第二版由杨荣祥、余元希、束世杰、季文德等同志主编，数理化自学丛书编委会审定。它保留了第一版在编写上“详尽在先、概括在后、通俗到底”和“便于自学、无师自通”的特色，仍是一套与现行中学课本并行的自学读物。第二版仍从读者的实际情况出发，按传统的教学体系编写。但这次参照新的试行教学大纲的要求，与第一版相比，数学各分册的编写内容作了适当的增删和调整，基础知识和运算技能的训练有了进一步加强；物理各分册在内容的取舍、习题的更新、插图的选配、实验的描述等方面均有较大的改进；化学各分册还增加了反映现代科学技术水平的基础理论知识，在理论和实践相结合的原则下，内容和体系均有新的特色。此外，各册的例题和习题选配得力求恰当、合理，知识

• 1 •

论述力求通俗、严密;并按章增加了测验题。在各册编者的话中,还有供读者自学时参考的指导性意见。

自学要有成就,必须刻苦勤奋、踏实认真、持之以恒、知难而进。刻苦自学、学有成就者不乏其人,愿广大读者努力学好。

《数理化自学丛书》出版以来,全国各地的读者给以热情的鼓励和有力的支持,特在此表示衷心感谢。

上海科学技术出版社

## 编 者 的 话

本书是《数理化自学丛书》第二版中的《平面几何》第二册。为了切实适应读者自学，第二版的编写工作是相当慎重的。原《平面几何》第二册中有助于自学的特色，全部保留下来了；合理的几何事实的体系也未作更动。本书的第二版除了在正文和例题方面作了适当的补充和修改以外，变动较大的是在习题方面：

(1) 添增了一些题意新颖、能启发自学者思索、推敲的习题；

(2) 删去了一些内容过于陈旧或者解法过于烦琐的习题；

(3) 每章之后的复习题分成 A、B 两组（其中 A 组比较简易，B 组的综合性较强），以供不同水平的自学者选择使用；

(4) 增添了测验题，以备自学者检查学习的成果。

经过增、删之后，习题的总数仍旧保持在七百题左右。

目前，给学生传授一部分空间形式的知识和培养他们的逻辑推理能力，初等几何仍然是有效而又必须的教材。本书中平面几何图形的度量性质有着广泛的实际应用。为了帮助自学者在将来的学习或工作中能够正确地、有把握地应用平面几何的知识，这些度量关系式及其推导过程在第二版中全部保存下来了。

编者热望完成自学本书的同志们在掌握初等平面几何知识和形成推理论证、作图、计算能力等方面均能打下扎实

的基础。因此,要求读者在自学中做到:

(1) 要认真阅读,不放过一字一句,力求透彻理解,不能稍有含糊。遇有疑问,要仔细思考,寻求解答。对定理的证明和例题的解答最好自己动手在纸上演习一遍(当然不需要象书上那样详细)。凡要求读者自己完成的论证或演算,读者应当自己切实完成。

(2) 要认真演算习题,这是取得学习成效的主要保证。在解题时,首先要认真审题,分清一个问题的已知部分和求证部分、求作部分,或需要通过计算而求得的未知部分。接着要认真使用作图工具,作出一个符合题意的图形。然后要认真分析,多方探求产生结论的原因。在学习数学时,独立分析的能力是最宝贵的。因此,在问题得解之前,自学者要运用已经掌握的概念知识顽强地独立思考。不到不得已时,最好不要看题后的提示。一时想不出,可以搁置一下,过一段时间再想。经过分析,问题得解,还要认真书写解答。在书面表达中,要力求内容正确、条理分明、字迹端正。本书末附有各章习题及测验题的答案,以便于自学者核对运算的结果,检查自己的解答有无错误。如果发现错误,随即找出错误的原因所在。因此,应在完成解答之后再核对答案,不要因为有了答案而忽略计算题的演算。

(3) 要认真复习。为了巩固知识和技能,必须经常复习。为了承前启后,每学完一章后,更需要复习。复习时,要求在理解的基础上熟记定义、定理、法则的条文和公式;要回忆较重要的定理的论证过程;要重复较复杂的例题和习题的解答过程。复习可以结合解答复习题来进行。完成复习之后,可以解答每章后面的测验题,检查自学的质量。

自学者如能按照上面所提的各点要求,在自学中逐点切实做到,编者深信,检查的结果一定是满意的。



本书的第一版由凌康源编写，梁捷纾选配习题。第二版由凌康源编写。由于编者的水平有限，自学或参考本书的同志们如果发现书中有不恰当的地方，请予指正。

凌 康 源

一九八〇年九月于上海教育学院

# 《数理化自学丛书》(第二版)编辑委员会

(以姓氏笔划为序)

## 主编:

数学 杨荣祥 余元希

物理 束世杰

化学 季文德

## 委员:

杨荣祥(上海师范学院)

束世杰(上海师范学院)

吴孟明(上海市七一中学)

余元希(华东师范大学)

汪思谦(上海教育学院)

张国模(上海教育学院)

张冠涛(上海市育才中学)

季文德(上海市教育局)

赵宪初(上海市南洋模范中学)

桂君协(上海师范学院)

凌康源(上海教育学院)

# 目 录

|                               |          |
|-------------------------------|----------|
| 第二版出版说明 .....                 | i        |
| 编者的话 .....                    | iii      |
| <b>1. 相似形 .....</b>           | <b>1</b> |
| 成比例的线段 .....                  | 1        |
| § 1.1 线段的比 .....              | 1        |
| § 1.2 成比例的线段 .....            | 8        |
| § 1.3 平行线截得比例线段定理 .....       | 15       |
| § 1.4 应用平行线截得比例线段定理的作图题 ..... | 28       |
| § 1.5 三角形内角、外角平分线性质 .....     | 34       |
| 相似三角形 .....                   | 43       |
| § 1.6 相似多边形 .....             | 43       |
| § 1.7 相似三角形的判定 .....          | 49       |
| § 1.8 相似直角三角形的判定 .....        | 65       |
| § 1.9 相似三角形的性质 .....          | 72       |
| § 1.10 比例规和对角线尺 .....         | 77       |
| 相似多边形 .....                   | 82       |
| § 1.11 相似多边形的性质 .....         | 82       |
| § 1.12 多边形相似的判定 .....         | 85       |
| § 1.13 位似形 .....              | 90       |
| § 1.14 应用作位似形解作图题 .....       | 97       |
| § 1.15 放缩尺 .....              | 105      |
| 本章提要 .....                    | 107      |
| 复习题一 A .....                  | 108      |
| 复习题一 B .....                  | 110      |
| 第一章测验题 .....                  | 115      |

|                                    |         |
|------------------------------------|---------|
| <b>2. 有关三角形和圆的线段间的度量关系</b>         | 117     |
| 和三角形有关的线段间的度量关系                    | 118     |
| § 2.1 直角三角形中成比例的线段                 | 118     |
| § 2.2 勾股定理                         | 123     |
| § 2.3 勾股定理的推广                      | 129     |
| § 2.4 勾股定理的逆定理                     | 132     |
| § 2.5 三角形的中线、高、外接圆半径和角平分线的计<br>算公式 | 136     |
| 和圆有关的线段间的度量关系                      | 143     |
| § 2.6 关于圆的切线和割线间的度量关系              | 143     |
| § 2.7 关于圆内相交两弦的度量关系                | 147     |
| § 2.8 一个点对于一个圆的幂                   | 152     |
| 代数作图法                              | 157     |
| § 2.9 代数作图法的基本作图题                  | 157     |
| 本章提要                               | 164     |
| 复习题二 A                             | 166     |
| 复习题二 B                             | 168     |
| 第二章测验题                             | 171     |
| <br><b>3. 多边形的面积</b>               | <br>173 |
| § 3.1 多边形的面积                       | 173     |
| § 3.2 矩形的面积                        | 176     |
| § 3.3 平行四边形的面积                     | 184     |
| § 3.4 三角形的面积                       | 189     |
| § 3.5 梯形的面积                        | 199     |
| § 3.6 相似多边形的面积的比                   | 203     |
| § 3.7 关于多边形面积的作图题                  | 211     |
| 本章提要                               | 223     |
| 复习题三 A                             | 223     |
| 复习题三 B                             | 225     |
| 第三章测验题                             | 228     |

|                       |                |
|-----------------------|----------------|
| <b>4. 正多边形</b>        | <b>230</b>     |
| § 4.1 圆的内接和外切正多边形     | 231            |
| § 4.2 正多边形的外接圆和内切圆    | 237            |
| § 4.3 关于正多边形的计算题      | 241            |
| § 4.4 正多边形的作图         | 253            |
| 本章提要                  | 263            |
| 复习题四 A                | 264            |
| 复习题四 B                | 265            |
| 第四章测验题                | 267            |
| <br><b>5. 圆的周长和面积</b> | <br><b>269</b> |
| § 5.1 圆的周长            | 269            |
| § 5.2 圆弧的长            | 279            |
| § 5.3 弧度制             | 284            |
| § 5.4 圆的面积            | 287            |
| § 5.5 扇形的面积           | 294            |
| § 5.6 弓形的面积           | 299            |
| 本章提要                  | 303            |
| 复习题五 A                | 304            |
| 复习题五 B                | 306            |
| 第五章测验题                | 308            |
| 总复习题 A                | 310            |
| 总复习题 B                | 313            |
| 总测验题                  | 317            |
| 习题答案                  | 319            |

# 相似形

## 成比例的线段

### §1.1 线段的比

#### 1. 线段的度量

为了要知道竹竿的长度，我们就用尺去量。这里所谓“量”，就是把一把尺的一端和竹竿的一端对齐，然后把这把尺紧密地沿着竹竿一尺接一尺地比较，最后得到了竹竿的长度。例如5尺，这表示从长度来讲，竹竿是尺的五倍(图1.1)。

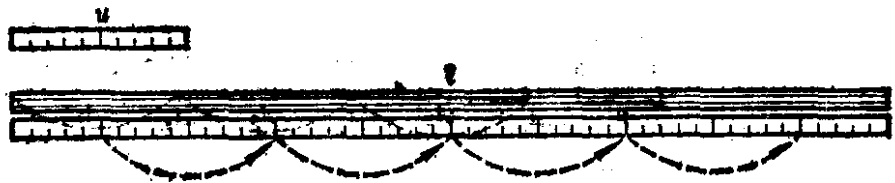


图 1.1

用几何的观点来研究，尺和竹竿可以分别看做是线段  $u$  和  $l$ 。用尺量竹竿的过程，可以看做是用线段  $u$  去量线段  $l$ ，得出线段  $l$  含有线段  $u$  多少倍的过程。这里线段  $u$  叫做长度单位，线段  $l$  是被度量的线段，最后所得的倍数叫做量数。说得更确切一些，它是以线段  $u$  作长度单位去量线段  $l$  所得的量数。线段的量数和线段的长度是有区别的：量数只是一个正数，量数后面注明了长度单位才是长度。在前面的实例中，“5”是以尺作长度单位去量竹竿所得的量

数,“5尺”才是竹竿的长度. 度量线段的目的就是要得到一个量数. 要得到线段的量数首先要选定作为长度单位的线段. 用两种不同的长度单位先后去度量同一条线段, 所得的两个量数显然是不等的. 例如用市尺作单位去量线段  $l$ , 如果所得的量数是 6, 用  $m$ (米)作单位去量同一线段, 所得的量数就是 2 了.

但是, 用线段  $u$  量线段  $l$  和用尺量竹竿毕竟有些不同. 给定了两条线段  $u$  和  $l$  的图形之后, 我们很难想象, 在图形上“拿起”线段  $u$ , 紧贴着线段  $l$ , 对齐了两端, 一次接一次地进行比较. 这里就得利用分割规了. 首先把分割规两脚的两个尖端分别放在线段  $u$  的两个端点上(图 1.2(1)), 然后保持分割规两脚张口的大小, 把一个脚的尖端放在线段  $l$  的一个端点  $A$  上, 依着图 1.2(2)虚线所指的方向, 在线段  $l$  上, 连续截取等于  $u$  的线段  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ , 这样就在图形上进行了用线段  $u$  度量线段  $l$  的过程.

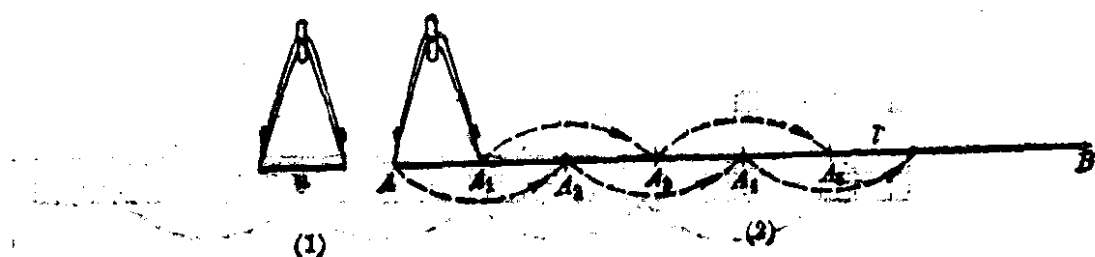


图 1.2

用尺量竹竿是一件十分简单的事, 但不能因此把线段的度量问题也理解为简单的问题. 用长度单位  $u$  去截线段  $l$  是否一定截得尽? 截不尽怎么办? 度量线段所得的量数究竟是怎样的数? 这些问题都是比较复杂的. 下面我们将比较详细地来研究它们.

图 1.3 中, 线段  $u$  是长度单位, 线段  $AB$  是要度量的线段. 现在利用分割规在线段  $AB$  上, 从端点  $A$  起, 连续截取等于  $u$  的线段  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ . 这样截取的结果总

不出下面两种情况中的一种:

(1) 截了  $m$  次以后(这里  $m$  是一个自然数), 恰巧截尽(图 1.3(1));

(2) 截了  $m$  次以后, 得到了小于  $u$  的剩余线段  $r_1$  (图 1.3(2)).

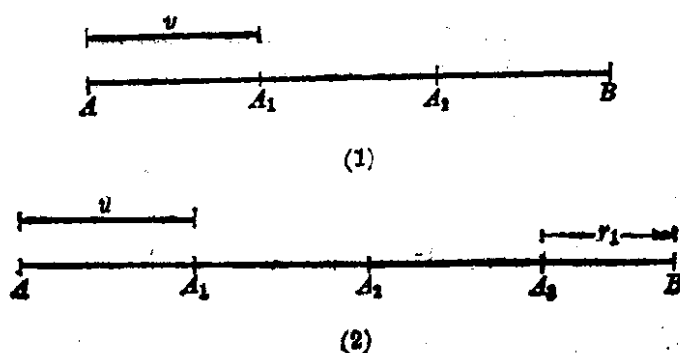


图 1.3

对于第一种情况, 线段  $AB$  恰巧是线段  $u$  的整数倍. 所得的量数是一个正整数  $m$ . 在图 1.3(1)里,  $m=3$ . 度量线段  $AB$  的过程到此结束.

对于第二种情况, 线段  $AB$  的量数还没有确定, 只知道它的量数应当大于正整数  $m$ , 但是小于正整数  $m+1$ . 在图 1.3(2)里, 线段  $AB$  的量数大于 3 而小于 4, 度量的过程还没有结束. 我们把它叫做第一回截取. 在第一回截取里所得的剩余线段是  $r_1$ . 为了进一步确定线段  $AB$  的量数, 我们可以采用比  $u$  小的线段作长度单位, 继续度量线段  $r_1$ .

现在用线段  $u$  的  $\frac{1}{10}$  作单位来度量剩余线段  $r_1$ , 从线段  $r_1$  的左端起, 用分割规连续截取等于  $\frac{1}{10}u$  的线段, 截取的结果总不出下面的两种情况之一:

(1) 截了  $m_1$  次以后, 线段  $r_1$  恰巧被截尽(图 1.4(1)).

(2) 截了  $m_1$  次以后, 得到了小于  $\frac{1}{10}u$  的剩余线段  $r_2$  (图 1.4(2)).



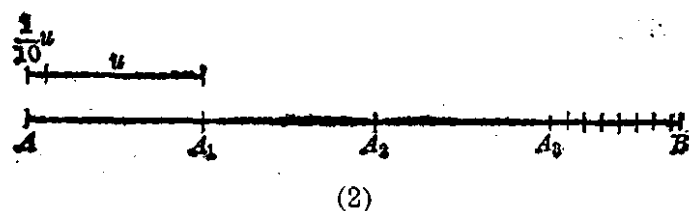
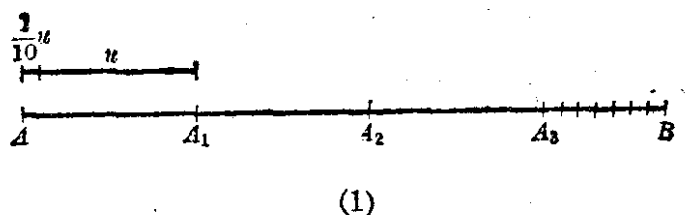


图 1.4

对于第一种情况, 线段  $r_1$  恰巧是线段  $\frac{1}{10}u$  的整数  $m_1$  倍, 这里  $m_1$  可以等于从 1 到 9 的任何一个正整数. 这时线段  $AB$  的量数已经确定为有限小数  $m + \frac{m_1}{10}$ . 在图 1.4(1) 里  $m + \frac{m_1}{10} = 3.7$ . 度量线段  $AB$  的过程到此结束.

对于第二种情况: 线段  $AB$  的量数仍旧没有确定, 只知道它的量数大于  $m + \frac{m_1}{10}$  而小于  $m + \frac{m_1+1}{10}$ , 这里  $m_1$  可以等于 0 (如果  $r_1 < \frac{1}{10}u$ ), 也可以等于从 1 到 9 的任何一个正整数 (如果  $r_1 > \frac{1}{10}u$ ). 在图 1.4(2) 里, 线段  $AB$  的量数大于 3.7 而小于 3.8. 度量线段  $AB$  的过程还没有结束, 我们把这一回的截取叫做第二回截取. 在第二回截取里所得的剩余线段是  $r_2$ . 为了更进一步确定线段  $AB$  的量数, 我们可以采用比  $\frac{1}{10}u$  小的线段作长度单位, 继续度量线段  $r_2$ .

线段的度量就是这样进行的. 从上面的讨论, 可以得到度量线段的初步结论: 用长度单位  $u$  去度量线段  $l$ . 如果线段  $l$  恰巧被  $u$  所截尽, 那末线段  $l$  的量数是一个正整数;