陈知先　方珍珍　编

高等数学教程

（上册）

GAO DENG
SHU XUE
JIAO CHENG

兰州大学出版社

高等数学教程

上 册

陈知先 方珍珍 编

兰州大学出版社

(甘)新登字第08号

高等数学教程

陈知先　方珍珍　编

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路216号　邮编730000　电话8883156

甘肃省静宁印刷厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　印张：22.375

1995年9月第1版　1995年9月第1次印刷

字数：581千字　印数：1—3000册

ISBN 7-311-00894-8/O·111

定价：22.40元（全二册）

内 容 提 要

本书是作者在多年从事高等数学教学的基础上，吸取了近年来国内外此类教材特点编写而成的。全书分上下两册，上册内容有一元函数的极限与连续、导数、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及应用、级数。下册包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、线面积分及常微分方程几个部分。

本书适用于理科化学、生物、地理、经济等本科专业，适当删减后也可用于物理类大专学生使用。对于报考硕士生的同学及工科学生本书也有重要的参考价值。

序　言

数学是从量与形的角度去研究物质世界的学科。以常量为主要讨论对象的数学是初等数学，小学和中学的数学主要属于这个范畴。而研究变量的数学是高等数学。由于变量是客观世界中运动、变化这个最普遍现象的体现，因而高等数学就比描述自然界孤立的、静止的事物的初等数学复杂但应用时却极为方便。

高等数学从另一角度上看，是非数学专业所需数学知识的一个总称，因此它包括“数学分析”、“解析几何”、“微分方程”、“高等代数”、“概率与数理统计”、“复变函数”等数学分支的一些内容。根据化学、生物、地理、经济等专业对高等数学的要求和所安排的学时，本书只选择了上面列举数学分支的前三个部分，并以“数学分析”为主要内容。

数学以其对自然现象的高度抽象性及描述的精确性为特点，因而它具有应用的广泛性。在人类社会的发展、国家的富强越来越依赖科学技术的今天，数学对科学技术发展就更显重要。可以说，在已建立了以数学理论为基础的科技领域中，数学的应用进一步扩大了：在一些领域，数学则在迅速地介入；在一些新出现的学科内，也正在建立数学理论基础或本身就以数学为基本工具。这就告诉我们，数学应用的扩展过程以及许多学科的数学化进程不仅会继续，并将会加速进行。因此非数学专业的学生学习高等数学，一方面是为学好本专业的知识打好基础，提供工具，另一方面是要应用数学的思想、方法去处理本专业要解决的实际问题，提高本学科定量化水平。

为了适应21世纪科技、经济、社会发展，以非数学类理科各

专业人才的数学素质、知识能力要求为出发点，我们在本书编写过程中做到：

一、既注意到数学的思想与分析问题解决问题的方法，但又不过分强调逻辑的严谨性，一切从专业需要出发，除考虑目前需求，又适当考虑进一步的需要。

二、理科教育既要考虑基础理论人才的培养，又要注重应用型人才的需要。我们在教材中通过对重点基础理论进行较详细分析、论证，而一般结论证明从略的方法，来培养学生理论分析能力。同时加强了怎样把实际问题化为一个数学问题，又怎么通过数学问题的解决再回到实践中去（即建立数学模型）的环节，让学生从这个全过程中，了解数学解决实际问题应该怎么做。

三、本教材按数学的内在联系，把有些内容作了统一处理：函数中把一元多元用点函数加以统一；极限概念中自变量趋向过程通过引入“极限过程”、“时刻”等概念进行了统一处理；把重积分和第一类线面积分统一成一种类型，在第二类线面积分中，指出了格林公式、奥一高公式、斯托克斯公式和牛顿—莱布尼兹公式本质上的一致性，并总结了七种积分间的相互关系。

四、本教材适当引进了一些较简捷的分析论证方法，力争以此来增加教材的新颖性。

五、适当吸取国外教材的某些特色，除适当添增了模型内容外，还适量增加了图形，以求加强内容的直观性。例题与习题则加强了综合性训练，并适当增加了难度，以培养学生分析问题和运算的能力。

本书可作为化学、生物、地理、经济等专业的教材或教学参考用书，对工程技术人员也有较好的参考价值；适当删去一些内容，还可作为相应专业的大专教材。打“※”内容，可根据学时、专业需求选讲或不讲。

本教材各部分的编写情况是：

第一、二、三、十一章由陈知先副教授执笔；

第四、五、六章由方珍珍副教授执笔；

第七、八、九、十章由翟忠信副教授执笔。

虽然编者从事了多年高等数学的教学工作，但本书中出现这种或那种问题仍在所难免，欢迎各位专家同仁批评指正。

编　者

1994．9

上册目录

第一章　函数的极限与连续

数学分析的主要内容是微积分，微积分的基本工具是极限，学好本章内容可为今后学习高等数学打下坚实的基础。

极限概念是一个很重要的概念，也是学习上的一个难点，大家应予充分重视。

§1　函　　数

函数是数学分析研究的对象，中学里对函数已有不少的认识，本节是以前内容的一个复习和加深。

§1.1　函数的概念

客观世界从量的角度去考虑，在所讨论的过程中，有只取同一数值和可取不同数值两种情况，前一种量称为常量，后一种量称为变量。例如在讨论物体从一定高度向下作自由落体的过程中，时间t及下落的距离$h=\frac{g}{2}t^2$是变量，而物体质量及重力加速度g是常量。又如我们考虑行驶在起点和终点间的某辆公共汽车，起点与终点间的距离是常量，而车行驶的速度，车上乘客数都是变量。

常量与变量往往是相对的，与考虑的过程有关，比如上面谈到的重力加速度g在一个地区它是常量，但在不同地区考虑就是变量。公共汽车如考虑两个小站间情况，车速、汽车与终点间距

离是变量，而乘客就是常量了。常量常用字母 a，b，c，……表示，变量常用 x，y，z，……表示。

在同一过程中出现的很多变量，可能互相之间无依赖关系，也可有相互联系，今后我们只讨论后一种情况。

定义 在某个变化过程中，如出现 $n+1$ 个变量 x_1，x_2，…，x_n，y，当变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在其变化范围每取定一组值，变量 y 按某种法则有确定的值相对应，这时称变量 y 为变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数。记为 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 可在其变化范围内独立自由变化，故称为自变量。变量 y 因 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 变化而变化，故称为因变量。由于自变量有 n 个，所以 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元函数。特别自变量只有一个 x，这时 $y=f(x)$ 是一元函数，本教材上册只考虑这种情况。

定义中变量 y 按某种法则若只有唯一确定的值相对应，这时我们说 y 是单值函数，若不止一值相对应则称 y 是多值函数。本教材不作特殊声明时均指单值函数的情况。

定义中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 变化的范围称为函数的定义域。它是抽象的 n 维空间中的一个区域，如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域是空间中的几何体或其一部分。x,y,z 的每一组值对应于空间中一个点，因而 $u=f(x,y,z)$ 的定义域实际是空间中的一个点集。定义中所有 y 值构成的集合，称为函数的值域。它是一个数集，在本教材中都是实数集。

当把定义域的点用 p 记，值域中的实数用 u 记时，函数可用“点函数”

$$u=f(p)\text{或}f: p\rightarrow u$$

统一表示。当 p 是直线上某区间的点、平面上某区域上的点、空间某区域中的点时，分别是一元、二元、三元函数。

对一元函数 $y=f(x)$，若 x_0 是其定义域中的点，这时称 $f(x)$ 在 x_0 有定义（或叫有意义）。对多元函数有类似的称谓。

函数就其实质上看，是定义域上一个点集到值域上一个数集之间的一种映射，对应法则确定了是什么样的映射，因此函数的定义，从集合观点可由集合到集合的映射给出.

在函数定义中，定义域和对应法则是函数的两个关键因素，它们一经确定，值域就被完全确定了. 由此可区别两个函数能否被视为同一函数，如函数：

$$f_1(x)=\frac{x^2-1}{x+1},\qquad f_2(x)=x-1$$

因定义域不同，故是两个不同的函数。而函数：

$$g_1(x)=|x|,\qquad g_2(x)=\sqrt{x^2}$$

虽表示形式不同却是同一函数。又如函数：

$$y=f(x),\qquad u=f(t)$$

虽然所用字母不同仍是同一函数.

在直角坐标系中，自变量p和因变量u分别在坐标轴上取值时，则函数$u=f(p)$的点(p,u)的轨迹一般在该坐标系中描绘出一种图象，这图象称为该函数的图形，也叫函数的几何表示. 如$y=f(x)$一般说表示直角坐标系$O\text{-}xy$平面上一条曲线；$z=f(x,y)$一般表示空间直角坐标系上的一张曲面；三元或n元函数就只能抽象的被视为表示四维或n维欧氏空间的某曲面.

函数的概念是很广泛的，实际中的函数也是多种多样的，下面给出几个例子.

生物学中，在一定条件下，生物（包括人）的总数$N(t)$随时间t的变化可表成：

$$N(t)=\frac{N_m}{1+\left(\dfrac{N_m}{N_0}-1\right)e^{-rt}}$$

其中N_0表t_0时刻生物总数，N_m表资源和环境条件容许的最大生物数量，r为生物的净增长率.

在化学反应中，著名的Eyring速率方程：

$$K=\frac{K'T}{h}e^{-\frac{\Delta G^*}{RT}}$$

（h,K',R为常数）反映了反应速率常数K、活化自由能ΔG^*及绝对温度T之间的关系。

在经济理论中，著名的经济订货批量公式：

$$Q=\sqrt{\frac{2C_1R}{C_2}}$$

反映了确定性需求且不允许缺货时，每批订货量Q与每批订货费C_1、每单位时间单位货物贮存费C_2及单位时间货物需求量R的关系。

在数学理论中有重要意义的狄里赫勒（Dirichlet）函数：

$$y=D(x)=\begin{cases}1,\text{当}x\text{为有理数}\\0,\text{当}x\text{为无理数}\end{cases}$$

不仅充分说明了函数是很广泛的概念，也告诉我们，一元函数的图形并不是都能在O-xy平面上被画出来。

§1.2 函数的表示法

反映自变量与因变量之间的相关关系有多种表达方法。

一、图示法

在气象部门，为了反映每天的时间t与气温之间的关系，是用自动记录温度仪在坐标纸上记录下的曲线表示的。由于坐标纸事先确定了哪轴表时间和温度，则一天内任何一个时刻的温度就很容易得到（见图1.1，某地某日自动气温记录仪记录的温度变化）。类似在石油、化工行业要了解反应炉或密闭容器中温度、压力等量与时间变化之间的关系，通常也是通过自动仪器用坐标纸上记录的曲线来表达的。这种把自变量与因变量之间的关系通过坐标平面上的曲线来表达一元函数的方法，称为函数$y=f(x)$的图示法。

函数的图示法比较直观和鲜明，但它不便对函数进行理论分

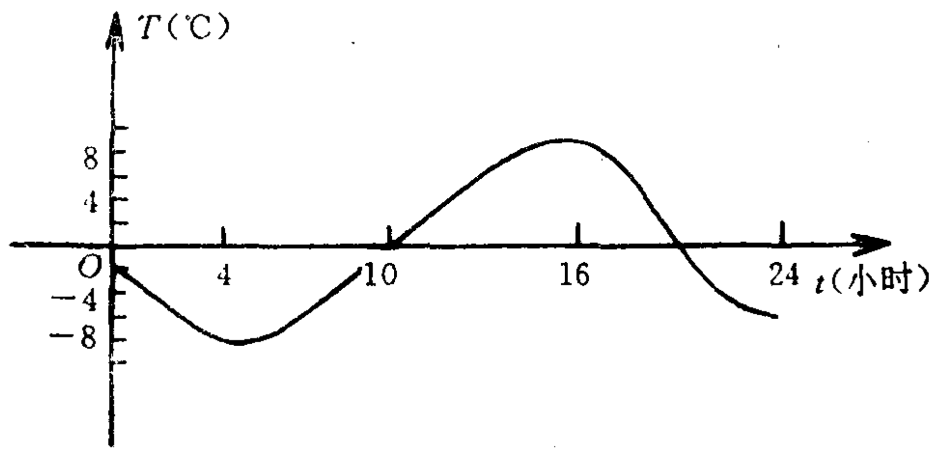

图 1.1

析，通常也表达得不够完整。

二、表格法

中学使用的平方表、三角函数表、对数表等，也是把自变量x与因变量x^2、$\sin x$、$\lg x$、…之间的关系表示出来的一种方法，表中每一个x值，通过表可查出相应因变量的值。在化学、物理实验中，在经济领域里，也大量通过表格记录实验结果，反映变量之间相关关系，这种把自变量和因变量的关系通过表格表达出来，称为函数$y=f(x)$的表格表达法，简称表格法。

这种函数的表达法，优点是求函数值比较方便，只要在表格中找到自变量的值，由表马上就能查出相应的函数值。但这种表达法数据列不全，也不便于对函数进行理论分析及运算。

三、解析表达法

把两个变量x与y之间的函数关系用解析式表示出来的方法，称为函数的解析表达法，又称为公式法。中学里见到的 $y=a^x$，$y=\sin x$，$S=\frac{1}{2}gt^2$都是这种情况。

这种函数的表示法，形式简单又便于分析与处理，是我们今后讨论函数的主要表达形式。遗憾的是，有时找两个变量之间满足的公式却比较困难。

§1.3 函数的类型

对函数从不同角度进行考虑，可分成许多类型，因而产生了许多名称，除前面提到的一元多元、单值多值函数外，下面介绍一些常用的函数。

一、分段函数

前面提到自变量与因变量之间用公式表达其函数，但并没有规定只能用一个式子来表示。如果在自变量取值的不同范围内要用不同解析式来表达的这种函数，称为**分段函数**。它的出现，是函数概念的发展与完善，使数学在描述现实世界和扩大其应用方面都有不小的作用。

下面给出几个分段函数的实例。

例 1 地球表面温度是随离地面的高度而变化的，地球中纬度地区平均大气状态，按国际上规定，温度T与高度h的变化规律是：

$$T=\begin{cases}15-6.5h & h<11\text{千米}\\ -56.5 & 11\text{千米}\leqslant h\leqslant 80\text{千米}\end{cases}$$

其中温度T的单位是摄氏温度。该函数表明，气温在离地面11千米内，温度在随高度变化，越高温度越低，但在11千米至80千米范围内，气温却保持在-56.5℃这个值，这个高度的大气层叫同温层(图1.2)。

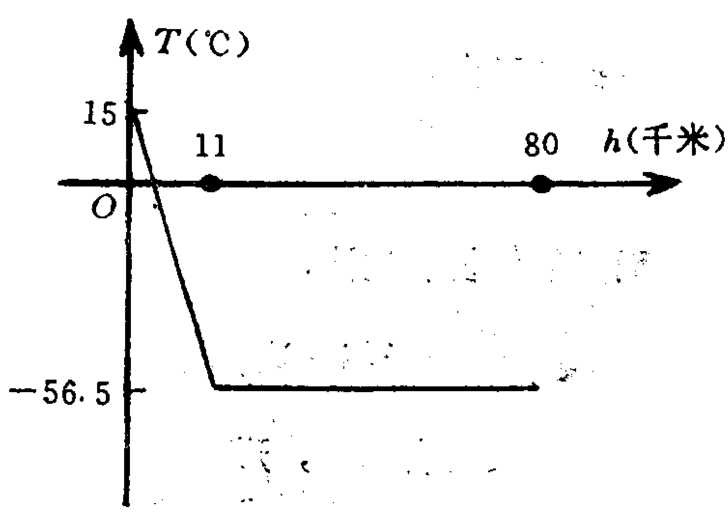

图 1.2

例 2 x的符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$$

这个函数能判别自变量的符号，因而得名（图1.3）。

例 3　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2} & x<-1\\\sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x\leqslant 1\\x^2 & x>1\end{cases}$$

此函数的图形如图1.4.

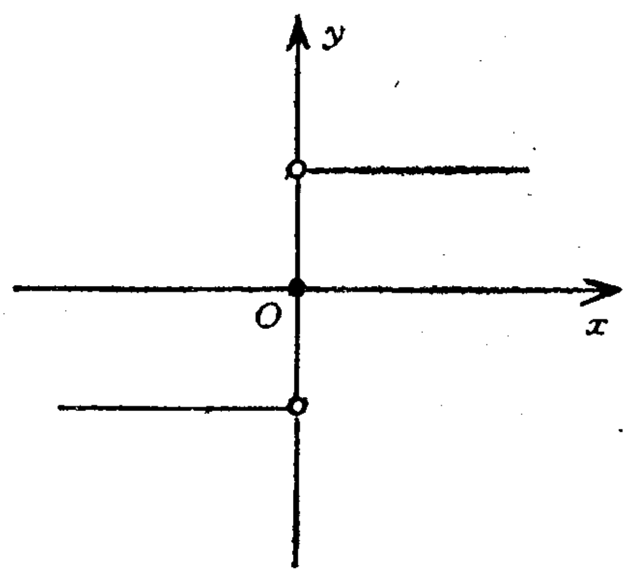

图 1.3

分段函数不仅与函数的定义不矛盾，而且实际中应用很多.求其函数值时，只要找出自变量属于那个范围，代入相应公式便可得到.

二、初等函数

中学里已讨论过定义、图形、性质的以下五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，叫做**基本初等函数**.

基本初等函数是最常见最重要的函数，许多复杂的函数往往就是由它们产生的.

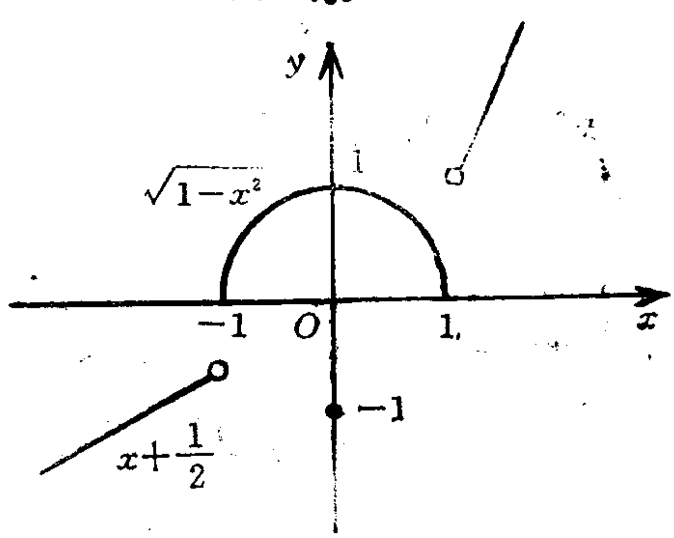

图 1.4

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在其定义域或其

一部分取值时，相应u值使y有定义，则称y是x的**复合函数**。记为$y=f[\varphi(x)]$。其中变量u称为复合函数的中间变量。类似可给出几个中间变量时复合函数的概念。

复合函数在实际中是很多的，如$y=e^{-x}$可以看成由$y=e^u$，$u=-x$构成的复合函数。又如$y=\sqrt{1+\lg(3+\cos 5\sqrt{x})}$可看成由$y=\sqrt{u}$，$u=1+\lg v$，$v=3+\cos t$，$t=5z$，$z=\sqrt{x}$构成的复合函数。

要注意的是并不是两个任意简单函数都可构成复合函数，如$y=\lg(\sin x)$，当$x\in(\pi,2\pi)$时就不能。当我们没有特别指出时，今后遇到的复合函数都是有意义的。

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤而形成的函数，称为**初等函数**。显然它是可由一个式子表示的函数，如

$$y=\sin^2 x+\sqrt{1-x^2};\qquad y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+\ln x,\ \cdots$$

我们今后讨论的函数，主要就是初等函数。

三、代数函数与超越函数

两个多项式（即有理整函数）：

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

其中$a_i,b_j(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$是常数，$n$和$m$为正整数，$a_0\neq 0,b_0\neq 0$。它们的商$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$所表示的函数，称为**有理函数**。它实际上是自变量x与常数经有限次加减乘除运算所得的函数，有理函数与根号所表现的函数，叫做**无理函数**，它实际上是由自变量经加、减、乘、除、乘方、开方而得到的函数。如

$$f(\sqrt{ax^2+bx+c})、f\left(\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)、y=\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}等等。$$

在初等函数中，把由代数方程：