高等学校试用教材

测度与概率基础

中山大学《测度与概率基础》编写组

广东科技出版社

高等学校试用教材

Cedu yu Gailu Jichu

测度与概率基础

中山大学《测度与概率基础》编写组

广东科技出版社

测度与概率基础

中山大学《测度与概率基础》编写组

*

广东科技出版社 出版

广东省新华书店发行

韶关新华印刷厂 印 刷

787×1092毫米32开本 15.875印张 310，000字

1984年9月第1版 1985年6月第2次印刷

印数7，501册—9，560册

统一书号7182·61 定价2.45元

内 容 简 介

本书介绍学习概率论、数理统计及随机过程所必需的测度论和概率论的基础知识. 主要内容有实值测度理论, 勒贝格测度及勒贝格-司帝阶测度, 抽象勒贝格积分理论, 可测变换, 乘积空间, 广义测度, 条件概率与条件数学期望, 相互独立随机变数的极限定理, 距离空间的测度弱收敛、局部弱收敛和淡收敛。

第一版序言

测度论是进一步学习概率论、数理统计、随机过程以及现代控制和通讯理论的必要数学基础。本书介绍学习概率论所必须的测度论基础知识。主要内容有：实值测度理论，勒贝格测度及勒贝格-司帝阶测度，抽象勒贝格积分理论，可测变换，乘积空间，广义测度，以及它们在概率论中的应用。

本书可作为高等院校数学系概率论与数理统计专门组的基本教材，也可作为其他学科与工程技术人员学习近代概率论与数理统计知识的基础读物。

本书按照选材精练而叙述详细的原则进行编写。因而与国外同类教材比较，本书具有简明扼要，深入浅出，概念叙述及定理证明详尽的特点，便于教学及读者自学。通过本书的学习，读者可望在较短时间内打好进一步学习概率论与数理统计的扎实基础。全书共十一章。各章末附有习题。

本书由郑宗成同志执笔编写，编写时参考了郑曾同教授、梁之舜教授讲授测度论课程时的讲稿，内容上部分地吸取了刘良深副教授编写的《积分与测度理论初步》中的材料。本书初稿在中山大学曾多次使用和修改，但缺点错误仍难避免，希望读者指正。

编　者

1981年7月

第二版序言

本书1981年出版后，收到不少使用单位和读者来信，对我们的工作给予支持和鼓励．国内一些知名专家和同行学者，也对本书提出不少宝贵意见．最近，教育部同意将本书作为高等学校试用教材．利用这次再版的机会，我们对本书第一版作了一些修订，并增加了条件概率和条件数学期望，相互独立随机变数序列的极限定理，距离空间的测度弱收敛、局部弱收敛和淡收敛等几部分内容．

第二版仍按理工科院校数学系或应用数学系概率论选修课的要求来选材，并假定读者具有实变函数论和初等概率论的基础识知．第十一章和附录，学习时需具有距离空间和点集拓扑学的一些初步知识，供读者选读之用．

第二版的修订工作由梁之舜教授主持．修改补充时参考了郑曾同教授、梁之舜教授多年来讲授本课程的笔记，内容上部分地吸取了刘良深副教授编写的《积分与测度理论初步》和《弱收敛与维纳积分》中的材料．本书前十章由郑宗成编写，第十一章由石北源编写，梁之舜教授为本书撰写了附录．

梁之舜教授和刘良深、邓集贤、吴占生等副教授以及杨维权同志，对本书的编写和修订一直极为关注和支持．两年来使用本书进行教学的石北源、钟洵、谢平民等同志以及概率论选修课的学生，对本书第一版提出不少宝贵的修改意

见。区景祺同志详细地阅读了部分手稿，提出了宝贵的意见。

我们衷心感谢同行专家们对本书第一版所提出的宝贵意见。感谢广东科技出版社的热心支持。

我们再一次表示对已故业师郑曾同教授的深切怀念，并以本书的修订出版作为对他的纪念。

编　者

1983年6月于中山大学

目　　录

第一章　集与集族

§1　集及其运算

在有关实变函数论的书中，对于集及其运算都作过详细的介绍，本节中我们仅作简略的复习，以使读者了解本书所用的符号．

在本书中，我们用大写字母A，B，C，…等表示集，用小写字母a，b，c，…等表示它们的元素．记号$a\in A$表示元素a属于集A，而记号$a\bar{\in} A$表示元素a不属于集A．

设E与F为两个给定集，若E的每一元素都是F的元素，则称集E是集F的子集，或称集F包含集E，并记作

$$E\subset F \quad 或 \quad F\supset E.$$

若不特别声明，今后我们所讨论的集均为某给定集X的子集．

不包含任何元素的集，称为空集，恒用ϕ表示．显然对每一集E，恒有

$$\phi\subset E\subset X。$$

两集E和F，若满足

$$E\subset F \quad 和 \quad F\subset E$$

则称E与F相等，记为$E=F$．

设E与F是任意两集，由至少属于E，F两集之一的一

切元素所组成的集叫做E与F的并集，并记作$E \cup F$.

类似地可定义任意多个集的并集：设$E_t, t \in T$，是任意一族集，其中T是不空指标集，那么由至少属于一个$E_t(t \in T)$，的一切元素所组成的集，称为$E_t, t \in T$，的并集，并记作$\bigcup_{t \in T} E_t$.

特别地n个集E_1，E_2，…，En的并集记为$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$，可列个集E_i，$i=1$，2，…的并集记作$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

由同时属于集E及集F的一切元素所组成的集，称为E与F的交集，记作$E \cap F$。类似地可得$\bigcap_{t \in T} E_t$的意义：由同时属于每一个$E_t(t \in T)$的一切元素所组成的集。

如果两个集E和F无公共元素，即

$$E \cap F = \phi,$$

则称E与F互不相交．若族集$\{E_t\}$，$t \in T$，中的任意两个集互不相交，则称$\{E_t\}$，$t \in T$两两不相交．显然有

$$E \cup \phi = E; \quad E \cap \phi = \phi.$$

若$E \subset F$，则

$$E \cup F = F; \ E \cap F = E,$$

特别地

$$E \cup E = E; \ E \cap E = E.$$

容易证明集的并与交满足下面的运算规律．

交换律：$E \cup F = F \cup E$；$E \cap F = F \cap E$.

结合律：$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$；

$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$.

分配律：$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$；

$$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G).$$

设E和F是任意两集，由一切属于E而不属于F的元素所组成的集叫做E与F的差集，并记作$E\backslash F$。容易证明集的并、交及差运算满足下述等式

$$E\backslash(F\cup G)=(E\backslash F)\cap(E\backslash G);$$

$$E\backslash(F\cap G)=(E\backslash F)\cup(E\backslash G).$$

我们称集$X\backslash E$为集E的余集并用E'表之。关于余集运算显然有下面这些等式

$$E\cap E'=\phi;\qquad E\cup E'=X;$$

$$\phi'=X;\ X'=\phi;\ (E')'=E.$$

若$E\supset F$则

$$E'\subset F'.$$

设E_t，$t\in T$，是任一集族，则

$$(\bigcup_{t\in T}E_t)'=\bigcap_{t\in T}E_t',$$

$$(\bigcap_{t\in T}E_t)'=\bigcup_{t\in T}E_t',$$

上述两等式称为De Morgan公式。从它们可以看出集之并与交之间的对偶关系。

设E和F是任意两集，集

$$(E\backslash F)\cup(F\backslash E)$$

称E和F的对称差，并用$E\Delta F$表之。由定义可看出当$E\supset F$时，则有

$$E\Delta F=E\backslash F.$$

当$E\cap F=\phi$时，则

$$E\Delta F=E\cup F.$$

集的对称差运算显然满足交换律，即

$$E\Delta F = E\Delta F.$$

现证明对称差运算也满足结合律。

定理1.1 设E，F及G是给定的集，那末有

$$(E\Delta F)\Delta G = E\Delta(F\Delta G).$$

证明 设$x\in(E\Delta F)\Delta G$，那末x属于且只属于下列两集之一：

$$(E\Delta F)\backslash G,\ G\backslash(E\Delta F),$$

这时x只能仅属于E,F,G中之一或x属于E,F,G三个集之交集。同理，当$x\in E\Delta(F\Delta G)$时亦有同样的情况。证完。

最后我们说明两个今后常用的记号。设P是与X的元素x有关的命题，我们用符号

$$\{x: P\}$$

表示X中使命题P成立的那些元素组成的集。

例如，X为实数轴，$\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$表示实数轴上的闭区间$[0,1]$。

又如X为二维实数空间，集

$$\{(x,y): x,y\text{为实数且}x^2+y^2=1\}$$

为平面上以原点为中心的单位圆周。

设P_1,P_2是两个命题，规定记号$P_1\Rightarrow P_2$的意义为：若命题P_1成立，则P_2亦成立。若$P_1\Rightarrow P_2$及$P_2\Rightarrow P_1$同时成立，那么我们称命题P_1,P_2是等价的，记作$P_1\Longleftrightarrow P_2$。

§2 集的极限

设$E_1,E_2,\cdots,E_n\cdots$是X的子集组成的序列[*]我们分别定义

---

*）今后集序列$E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$将简记为$\{E_n\}$。

$$\overline{\lim_{n}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k ,$$

$$\underline{\lim_{n}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

为$\{E_n\}$的上极限和下极限。若

$$\overline{\lim_{n}}\, E_n = \underline{\lim_{n}}\, E_n$$

则称$\{E_n\}$的极限存在且以$\lim\limits_{n} E_n$表之，此时按定义有

$$\lim_{n} E_n = \overline{\lim_{n}}\, E_n = \underline{\lim_{n}}\, E_n .$$

我们用记号

$$\{x:\ x \in E_n,\ i.o.\}$$

表示X中属于无穷个E_n的元素x所组成的集。而用记号

$$\{x:\ x \in E_n,\ a.a.\}$$

表示X中只能不属于有限个E_n的元素x所组成的集。

定理1.2 对任意集序列$\{E_n\}$恒有

$$\overline{\lim_{n}}\, E_n = \{x:\ x \in E_n, i.o\}, \tag{1.1}$$

$$\underline{\lim_{n}} E_n = \{x:\ x \in E_n,\ a.a.\} . \tag{1.2}$$

证明 我们仅证明(1.1)式，(1.2)式可类似地证明．设$x \in \overline{\lim\limits_{n}} E_n$，那末由上极限的定义，对每一$n$，必有自然数$k_n$，使$x \in E_{kn}$ 故

$$x \in \{x : x \in E_n, i.o.\}.$$

反之若x属于(1.1)式右边，则对每一$n(n=1,2,\cdots)$，均存在$k\geqslant n$，使$x\in E_k$，从而$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$，由上极限的定义，有$x\in\overline{\lim_n}E_n$。定理证完。

推论 1 $\underline{\lim_n}E_n\subset\overline{\lim_n}E_n$。

推论 2 改变集序列$\{E_n\}$的有限项不影响此集序列的上、下极限。

若集序列$\{E_n\}$满足$E_1\supset E_2\supset\cdots$我们将记为$E_n\downarrow$，若满足$E_1\subset E_2\subset\cdots$则记为$E_n\uparrow$。

定理1.3 设$\{E_n\}$为集序列，

1)若$E_n\downarrow$，则$\lim_n E_n$存在且

$$\lim_n E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n,$$

2)若$E_n\uparrow$，则$\lim_n E_n$存在且

$$\lim_n E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n .$$

证明 由定理1.2立即推得.

定理1.4 设$\{E_n\}$为任一集序列，F是X的任一子集，则

1) $$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\overline{\lim_n}E_n,$$

$$\underline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\underline{\lim_n}E_n,$$

2) $\overline{\lim_n}(F\cap E_n)=F\cap\overline{\lim_n}E_n$,

$\underline{\lim_n}(F\cap E_n)=F\cap\underline{\lim_n}E_n$,

3) $\overline{\lim_n}(F\setminus E_n)=F\setminus\underline{\lim_n}E_n$,

$\underline{\lim_n}(F\setminus E_n)=F\setminus\overline{\lim_n}E_n$,

4) $\overline{\lim_n}(E_n\setminus F)=\overline{\lim_n}E_n\setminus F$,

$\underline{\lim_n}(E_n\setminus F)=\underline{\lim_n}E_n\setminus F$.

证明 我们仅证明1)，3)，4)的第一式，其余等式可以类似证明。

先证1)的第一式。设$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$，则$x$属于无穷个$F\cup E_n$，若$x\in F$，那末$x\in F\cup\overline{\lim_n}E_n$，于是

$$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)\subset F\cup\overline{\lim_n}E_n; \tag{1.3}$$

若$x\bar{\in}F$，则x属于无穷个E_n，因而$x\in\overline{\lim_n}E_n$，这样（1.3）式仍成立。

另一方面，若$x\in F\cup\overline{\lim_n}E_n$，则当$x\in F$时，便有$x$属于所有$F\cup E_n$，因而$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$；如果$x\in\overline{\lim_n}E_n$，则由