初等数论

III

陈景润著

科学出版社

内 容 简 介

本书是《初等数论》的第三册．本册秉承前两册的写作宗旨，将数论中较浅显的内容详加阐述，并配有相当数量的例子，以便读者理解．本册内容有：自然数的一些有趣的性质，数论中常见的数，平方剩余，原根与指数，华林问题简介，容斥原理及应用等．每章后都有习题，书末附习题解答．本书可作为高中学生的课外参考书，也可供中学数学教师、大学理工科学生及数论爱好者阅读．

初 等 数 论

III

陈景润 著

责任编辑 杜小杨

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1988 年 9 月第一次印刷 印张：12 1/4

印数：0001－3,170 字数：261,000

ISBN 7-03-000632-1/O・168

定价： 4.70 元

序　　言

近几年来，我陆续收到许多读者的来信，希望我把《初等数论》一书的续集写出来，供广大数学爱好者阅读参考之用．这本第三册就是秉承前两册书的宗旨和内容而写的．这三册书将我们的老师、我国最著名的数学家华罗庚教授的名著《数论导引》中可供中学生阅读的那些内容详加阐述，并配有相当数量的例子，以便读者消化理解．本书不仅注意论证的严谨性，而且注重培养读者的计算能力．本书的阅读对象为中学高年级优秀生、中学教师、大学理工科学生及广大数论爱好者．

大家知道，数论中有许多著名的难题，例如哥德巴赫猜想、费尔马大定理等．对于这些难题的内容，任何具有初中文化程度的读者都可以弄明白，然而多年来的经验告诉我们，对于这些难题的困难程度，许多同志了解甚少，甚至完全不了解．这些年来，我陆续收到很多来稿、来信，发现许多同志，特别是许多青年同志，盲目地将宝贵的时间和精力浪费在寻求用初等数论的方法来证明这些数学难题上面，而不知道只有经过长期刻苦钻研，攻读一些重要著作及高深的论文之后，才可能对这些难题的深奥及解决途径有一个较为清楚的了解，然后才能从事这方面的研究工作．一些同志企图用初等数论的方法来解决哥德巴赫猜想及费尔马大定理等难题，我认为在目前几十年内是不可能的．所以希望青年同志们不要误入歧途，浪费自己宝贵的时间和精力．

本册书共分七章，每章后面都附有适量的习题，书末还附

有全部习题的详细解答,供读者学习时参考.由于时间仓促,书中可能存在一些问题,欢迎读者批评指正.

本书初稿写成后,曾经中国科学院数学研究所王元教授、青岛大学校长潘承洞教授、北京大学潘承彪教授、中国科学院数学研究所徐广善研究员、清华大学戚鸣皋副教授、中国科学院数学研究所王连祥副研究员、中国科学技术大学陆鸣皋副教授等仔细阅过,并提出了许多宝贵意见.特别是我的博士研究生张明尧同志在本书编写过程中做了大量的工作.对于上述各位所给予的帮助及提出的许多有益的意见和建议,我谨在此表示衷心的感谢.

陈景润

1986年9月

目　　录

第九章　自然数的一些有趣的性质

§1.　奇妙的平方数

在这一节里，我们要讨论自然数的一个有趣的性质．简单的计算给出下面两个结果：

$$12^2=144,\qquad 21^2=441.$$

我们发现这两组数 12，21 及 144，441 有一个有趣的性质：将 12 改为从右向左记数恰好得到 21，将 144 改为从右向左记数恰好得到 441，即当将 12 这个数从右向左记成 21 时，$12^2=144$ 也恰好被从右向左记数改变成 $21^2=441$．再试下去，我们发现下面几组数也有同样的性质：

$$13^2=169\ ,\qquad 31^2=961\ ;$$
$$11^2=121\ ,\qquad 11^2=121\ ;$$
$$22^2=484\ ,\qquad 22^2=484\ .$$

于是有人会猜想数 33，44 等等也有同样的性质．但是计算表明这种猜想是错误的，因为 $33^2=1089$，而 $1089\neq9801$；又 $44^2=1936$，而 $1936\neq6391$．那么，在二位数中还有没有其它的数具有上述性质呢？我们的回答是没有，后面我们要对这个结论给出详细的证明．

通过计算，我们发现下面各组三位数也具有上面所说的性质：

$$102^2=10404, \qquad 201^2=40401;$$
$$103^2=10609, \qquad 301^2=90601;$$
$$112^2=12544, \qquad 211^2=44521;$$
$$113^2=12769, \qquad 311^2=96721;$$
$$122^2=14884, \qquad 221^2=48841;$$
$$101^2=10201, \qquad 101^2=10201;$$
$$111^2=12321, \qquad 111^2=12321;$$
$$202^2=40804, \qquad 202^2=40804;$$
$$121^2=14641, \qquad 121^2=14641;$$
$$212^2=44944, \qquad 212^2=44944.$$

那么,在三位数中还有没有其它的数具有这一性质呢?我们的回答是没有.后面我们也要对这个结论给出详细的证明.

现在先讨论二位数的情形.我们用$(x\ \ y)_{10}$表示一个二位数,其个位数字为y,十位数字为x.为了使将$(x\ \ y)_{10}$通过从右向左记数得到的数$(y\ \ x)_{10}$仍是一个二位数,必须使$x\neq 0$. $y\neq 0$.于是$1\leqslant x\leqslant 9, 1\leqslant y\leqslant 9$.

若$x=1$,就有

$$(1y)^2_{10}=(10+y)^2=100+20y+y^2,$$
$$(y1)^2_{10}=(10y+1)^2=100y^2+20y+1,$$

如果$y\geqslant 4$,我们就有$(y\ \ 1)^2_{10}>100y^2\geqslant 1600$,即$(y\ \ 1)^2_{10}$至少是一个四位数,但是$(1\ \ y)^2_{10}\leqslant(19)^2<400$,因而为要二位数$(1\ \ y)_{10}$具有所要求的性质,必须$1\leqslant y\leqslant 3$,即当$x=1$时,具有所述性质的二位数只能从11,12,13中去寻找,由计算知道,这三个二位数都具有所要求的性质.

若 $x=2$,就有

$$(2y)_{10}^2=(20+y)^2=400+40y+y^2,$$

$$(y2)_{10}^2=(10y+2)^2=100y^2+40y+4,$$

于是$(y2)_{10}^2$ 的个位数为 4,而当 $y\geqslant 3$ 时则有

$$520=400+120<(2y)_{10}^2<30^2=900,$$

于是当 $y\geqslant 3$ 时,$(2y)_{10}^2$ 是一个百位数字至少为 5 的三位数,因而必须 $1\leqslant y\leqslant 2$.即当 $x=2$ 时,只有 21 与 22 这两个二位数可能具有要求的性质,计算表明这两个数确有所述之性质.

若 $x=3$,则有

$$(3y)_{10}^2=(30+y)^2=900+60y+y^2,$$

$$(y3)_{10}^2=(10y+3)^2=100y^2+60y+9.$$

如果 $y\geqslant 2$,则有

$$1000<900+120<(3y)_{10}^2<40^2=1600,$$

即$(3y)_{10}^2$ 是一个千位数为 1 的四位数,而$(y3)_{10}^2$ 的个位数为 9,因此只可能 $y=1$,即当 $x=3$ 时,只有 31 这个二位数才可能有所述性质,验算知 31确有所要求之性质.

若 $x=4$,则有

$$(4y)_{10}^2=(40+y)^2=1600+80y+y^2,$$

$$(y4)_{10}^2=(10y+4)^2=100y^2+80y+16,$$

于是$(y4)_{10}^2$ 的个位数为 6,由于

$$1600<41^2\leqslant(4y)_{10}^2<50^2=2500,$$

因此$(4y)_{10}^2$ 是一个四位数,其最高位数字只可能为 1 或 2,因而无论 y 是个什么样的一位数,$(4y)_{10}^2$ 的最高位数字都不可能与$(y4)_{10}^2$ 的个位数字相同,即这种二位数不可能具有所述之性质.

若$x=5$,则有

$$(5y)_{10}^2=(50+y)^2=2500+100y+y^2,$$
$$(y5)_{10}^2=(10y+5)_{10}^2=100y^2+100y+25,$$
于是$(y5)_{10}^2$的个位数为 5，但是
$$2500=50^2<(5y)_{10}^2<60^2=3600,$$
于是$(5y)_{10}^2$是一个最高位数字为 2 或 3 的四位数,因此不论 y 取什么样的一位数,二位数$(5y)_{10}$都不可能有所要求的性质.

若 $x=6$,则有
$$(6y)_{10}^2=(60+y)^2=3600+120y+y^2,$$
$$(y6)_{10}^2=(10y+6)^2=100y^2+120y+36,$$
于是$(y6)_{10}^2$的个位数为 6,但是
$$3600=60^2<(6y)_{10}^2<70^2=4900,$$
因而$(6y)_{10}^2$是一个最高位数为 3 或 4 的四位数,而不可能以6为最高位数,因而这种二位数也一定不具有所要求的性质.

若 $x=7$,则有
$$(7y)_{10}^2=(70+y)^2=4900+140y+y^2,$$
$$(y7)_{10}^2=(10y+7)^2=100y^2+140y+49,$$
于是$(y7)_{10}^2$的个位数为9，但是
$$4900=70^2<(7y)_{10}^2<80^2=6400,$$
即$(7y)_{10}^2$是一个四位数且最高位数不超过 6,因而无论 y 取什么样的一位数,二位数$(7y)_{10}$都不可能具有所要求的性质.

若 $x=8$,则$(y8)_{10}^2$的个位数为 4,又由
$$6400=80^2<(8y)_{10}^2<90^2=8100$$
知,$(8y)_{10}^2$是一个最高位数只能为 6,7 或 8 的四位数,因而此种二位数也必不能具有所要求的性质.

若 $x=9$，则 $(y9)_{10}^2$ 的个位数为 1，但由

$$8100=90^2<(9y)_{10}^2\leqslant 99^2=9801$$

知，$(9y)_{10}^2$ 是一个四位数，其最高位数不可能为 1，因此这种二位数必不可能具有所要求的性质.

综上所述，我们就证明了：所有二位数中，具有所述性质的二位数只有 11，12，13，21，22，31 这六个数.

对于三位数，可以用类似的方法加以讨论. 下面用 $(xyz)_{10}$ 表示一个三位数，x，y 及 z 各表示其百位、十位及个位数字，为了使这三位数具有所要求之性质，必须要求

$$1\leqslant x\leqslant 9,\ 0\leqslant y\leqslant 9,\ 1\leqslant z\leqslant 9.$$

若 $x=1$，则有

$$\begin{aligned}(1yz)_{10}^2&=(100+10y+z)^2\\&=10000+100y^2+z^2+2000y+200z+20yz,\\(zy1)_{10}^2&=(100z+10y+1)^2\\&=10000z^2+100y^2+1+2000yz+200z+20y,\end{aligned}$$

于是 $(zy1)_{10}^2$ 的个位数字为 1. 由于 $(1yz)_{10}^2>100^2=10000$ 且 $(1yz)_{10}^2\leqslant 199^2=39601$，故 $(1yz)_{10}^2$ 是一个五位数. 对 $0\leqslant y\leqslant 3$ 有 $(1yz)_{10}^2\leqslant 139^2=19321$，对 $y\geqslant 5$ 有 $(1yz)_{10}^2>150^2=22500$，而 $y=4$ 时，对 $z=1$ 有 $(1yz)_{10}^2=141^2=19881$，对 $2\leqslant z\leqslant 9$ 有 $(1yz)_{10}^2\geqslant 142^2=20164$ 以及 $(1yz)_{10}^2\leqslant 149^2=22201$，因此必须

$$0\leqslant y\leqslant 3,\ 1\leqslant z\leqslant 9 \text{ 或者 } y=4,\ z=1.$$

又对 $z\geqslant 4$ 有 $(zy1)_{10}^2\geqslant 401^2=160801$，这是一个六位数，而 $(1yz)_{10}^2<200^2=40000$，这是一个五位数，因此必须要求

$$0\leqslant y\leqslant 3 \text{ 且 } 1\leqslant z\leqslant 3,$$

或者

$$y=4 \text{ 且 } z=1.$$

又对 $y=3$ 我们有

$(1yz)_{10}^2=(13z)_{10}^2=16900+z^2+260z$,

$(zy1)_{10}^2=(z31)_{10}^2=960+10000z^2+6200z$,

当 $z=3$ 时,$(13z)_{10}^2$ 的个位数为 9,而$(zy1)_{10}^2$ 的最高位数为 1,这不符合要求,因而必须

$$0\leqslant y\leqslant 2,\quad 1\leqslant z\leqslant 3$$

$$\text{或者 } y=3,\quad 1\leqslant z\leqslant 2,\quad \text{或者 } y=4,\quad z=1.$$

即只有从以下诸数中去寻找适合条件的三位数:

101,102,103,111,112,113,121,122,123,131,132,141.

计算表明,其中 101,102,103,111,112,113,121,122 满足所要求的条件.

若 $x=2$,则有

$$\begin{aligned}(2yz)_{10}^2&=(200+10y+z)^2\\&=40000+100y^2+z^2+4000y+400z+20yz,\\(zy2)_{10}^2&=(100z+10y+2)^2\\&=10000z^2+100y^2+4+2000yz+400z+40y,\end{aligned}$$

于是$(zy2)_{10}^2$ 的个位数为 4,而$(2yz)_{10}^2>200^2=40000$,且$(2yz)_{10}^2<300^2=90000$,即$(2yz)_{10}^2$ 是一个五位数,当$9\geqslant y\geqslant 3$时,有$(2yz)_{10}^2>230^2=52900$,而对 $y=2$,当 $z\geqslant 4$ 时有$2yz)_{10}^2\geqslant 224^2=50176$,最后注意到对$z\geqslant 4$有$(2yz)_{10}^2>400^2=160000$,这是一个六位数了,因此必须要

$$0\leqslant y\leqslant 1,\quad 1\leqslant z\leqslant 3,$$

或者

$$y=2,\quad 1\leqslant z\leqslant 3,$$

即百位数字为 2 的三位数中,只有以下诸数中可能有满足所

述条件的数存在：

201，202，203，211，212，213，221，222，223.

计算表明，201，202，211，212，221 这五个数满足所述条件.

若 $x=3$，则有

$$(3yz)_{10}^2=(300+10y+z)^2=90000+100y^2+z^2+6000y$$
$$+600z+20yz,$$

$$(zy3)_{10}^2=(100z+10y+3)^2=10000z^2+100y^2+9$$
$$+2000yz+600z+60y,$$

于是 $(zy3)_{10}^2$ 的个位数字为 9，又由

$$90000<(3yz)_{10}^2<400^2=160000$$

知，$(3yz)_{10}^2$ 或者是一个五位数(此时其最高位数为 9)或者是一个六位数(此时其最高位数为 1). 为了具有所要求的性质，$(3yz)_{10}^2$ 必须是一个五位数才行. 注意到 $316^2=99856<100000$ 而 $317^2=100489>100000$，故必须有 $(yz)_{10}\leqslant 16$. 另一方面，当 $(3yz)_{10}^2$ 为五位数时，$(zy3)_{10}^2$ 也必须是一个五位数，因此尚需要求 $1\leqslant z\leqslant 3$，于是只能

$$0\leqslant y\leqslant 1,\quad 1\leqslant z\leqslant 3.$$

即当百位数为 3 时，只有以下诸数中才可能有适合所述条件的三位数存在：

301，302，303，311，312，313.

计算知道 301，311 二数符合要求.

若 $x=4$，则有

$$(4yz)_{10}^2=(400+10y+z)^2$$
$$=160000+100y^2+z^2+8000y+800z+20yz,$$

$$(zy4)_{10}^2=(100z+10y+4)^2$$

$$=10000z^2+100y^2+16+2000yz+800z+80y,$$

由于 $160000<(4yz)_{10}^2<500^2=250000$，于是$(4yz)_{10}^2$ 是一个六位数，其最高位数为1或2，而$(zy4)_{10}^2$的个位数为 6，故不可能有 y,z 使这种三位数满足所要求的条件.

若 $x=5$， 则有

$$(5yz)_{10}^2=(500+10y+z)^2$$
$$=250000+100y^2+z^2+10000y+1000z+20yz,$$
$$(zy5)_{10}^2=(100z+10y+5)^2$$
$$=10000z^2+100y^2+25+2000zy+1000z+100y,$$

由于$250000<(5yz)_{10}^2<360000$，故$(5yz)_{10}^2$ 是一个六位数，其最高位数为2或3，而$(zy5)_{10}^2$ 的个位数为 5，故不可能.

若 $x=6$，则$(zy6)_{10}^2$ 的个位数仍为 6，另一方面，$(6yz)_{10}^2\leqslant 699^2=488601$，故$(6yz)_{10}^2$ 是一个六位数（注意$(6yz)_{10}^2>360000$），其最高位数是 3 或 4，因此也不可能满足所要求的条件.

若 $x=7$，易见$(zy7)_{10}^2$ 的个位数为9，但是我们有$(7yz)_{10}^2<800^2=640000$，故$(7yz)_{10}^2$ 是一个最高位数至多为 6 的六位数，因此也不可能.

若 $x=8$，易见$(zy8)_{10}^2$ 的个位数为 4，又由

$$640000<(8yz)_{10}^2<900^2=810000,$$

我们知道$(8yz)_{10}^2$ 是一个六位数，其最高位数字不可能为 4，故不可能.

若 $x=9$，则$(zy9)_{10}^2$ 之个位数字为 1，但由

$$810000<(9yz)_{10}^2\leqslant 999^2=998001$$

知，$(9yz)_{10}^2$ 之最高位数字不可能为 1，因此也不可能.

综上所述知，仅以下 15 个三位数具有所要求的性质：

101，10 2，103，111，112，113，121，122，201，

202，211，212，221，301，311.

对更高位数的自然数，也可同样加以讨论.

§2. 有趣的减法

在这一节里我们要讨论自然数的另一个有趣的性质.从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这十个数字中任意取两个数，比方取 4 与 5，用这两个数字可以作出 54 与 45 这样两个自然数，将这两个自然数相减，经过这个规定的手续我们得到

$$54-45=9.$$

如果取 2 与 7 这两个数字，由它们可以作出 72 与 27 这样两个自然数，相减得到

$$72-27=45,$$

到这里我们看到，只要对 4 与 5 所能构成的两个自然数 54 与 45 再相减，就得到 9.

取 3 与 6 两个数字，按上述规定的手续得到

$$63-36=27,$$

由上面已讨论过的情形看出，只要对 2 与 7 再施行上述手续 2 次，我们就仍然得到 9 这个数.

取 1 与 8 两个数字，按上述规定的手续，我们得到

$$81-18=63,$$

由上面已讨论过的情形看出，对 6 与 3 只要再施行规定手续 3 次，我们就仍然得到 9 这个数！

上面的讨论证明了，从 18，27，36，45，54，63，72，81 这八个二位数中任一个二位数出发，按照上面规定的手续至多做 4

们总会最后得到 9 这个数. 那么, 这对任何其它的两位数是否也成立呢? 下面我们要证明: 对每个由不相同数字组成的二位数, 至多经过规定手续五步即可将该二位数变为 9, 而且确实有这样的二位数, 需经规定手续五步才可变为 9.

设$(ab)_{10}$表示一个十进制的两位数, 其个位及十位数字分别为 b 与 a, 当 $a=0$ 时, 认为$(ab)_{10}=b$, 这里 $0\leqslant a\leqslant 9$, $0\leqslant b\leqslant 9$. 如果 $a=b$, 那么就有$(ab)_{10}-(ba)_{10}=0$, 我们将不考虑这种平凡的情形. 以下我们不妨设$0\leqslant b<a\leqslant 9$, 因而就有$(ab)_{10}>(ba)_{10}$, 将它们相减即得到

$$\begin{aligned}(ab)_{10}-(ba)_{10}&=(10a+b)-(10b+a)\\&=9(a-b),\end{aligned}\tag{$*$}$$

由 $0\leqslant b<a\leqslant 9$ 有 $1\leqslant a-b\leqslant 9$, 于是($*$) 式中的数 $9(a-b)$ 只有下表中九个可能的值.

(表一)

$a-b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9(a-b)$	9	18	27	36	45	54	63	72	81

上表中八个二位数 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 恰好是我们在上面所讨论过的. 在上面我们证明了, 对这八个二位数中的每个二位数施行规定的手续至多 4 步, 我们就会得到数 9. 于是, 任给一个由不相同数字组成的二位数, 经上述规定的手续至多 5 步, 就会得到数 9. 再由

$31-13=18,\quad 81-18=63,\quad 63-36=27,$

$72-27=45,\quad 54-45=9$

知，确实有二位数存在，需经上述手续 5 步才能变为数 9，这就完成了对二位数的讨论.

下面来考虑三位数. 取一个三位数，比方取 594，将它的三个数字 5，9，4 从大到小排列，我们得到 954，再将这三个数字从小到大排列，我们得到 459，将得到的两个数相减. 经过这一规定的手续，我们得到

$$954-459=495,$$

这里的 495 仍由 4，9，5 这三个数字组成.

再取三位数 396，按上法得到 963 与 369 两个自然数，将这两个数相减得到

$$963-369=594,$$

再由对 594 已经做过的讨论知道，对 396 施行上述手续 2 次后，我们恰好得到 495 这个数.

再取 297，按上述规则做，我们得到 $972-279=693$，而由上面的例子，我们得知，对 297 施行上述手续 3 次后，我们就可得到 495 这个数.

再取 198，按照上述规则做，我们得到 $981-189=792$，再由上面讨论过的例子即知道，对 198 施行规定手续 4 次后，我们就可得到 495 这个数.

再取 798，按照上述规则做，我们得到

$$987-789=198,$$

再由上面讨论过的例子即知道，对 798 施行规定手续 5 次后，我们就又得到 495 这个数.

再取 878 这个三位数，按规则做就得到

$$887-788=99.$$

如果一个三位数的三个数字全相同，比方 333，由它出发按规则做就得到

$$333-333=0$$