高等学校专科试用教材

高等数学 上册

盛祥耀 编

高等教育出版社

高等学校专科试用教材

高等数学

上册

盛祥耀 编

高等教育出版社

本书分上下两册，上册内容为空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用．下册内容为多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程．

本书每节后配备一定数量的习题，每章后有总习题，并附有习题答案，书末还附有数学史料．

本书内容取舍适宜，详略得当，说理浅显，便于教学．为适应不同学生和不同专业的需要，下册适量配置了一些用＊号表示的内容，以供选学．

本书可作为大学专科和高等专科学校各专业的试用教材，也可供工程技术人员阅读．

责任编辑 丁鹤龄

高等学校专科试用教材

高 等 数 学

上 册

盛祥耀 编

＊

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

＊

开本 850×1168 1/32 印张 10.5 字数 253 000

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数 00,001—10,600

ISBN7-04-000019-9/O·8

书号 13010·01423 定价 1.80 元

前　言

这本《高等数学》是为大学专科各专业编写的．全书共十二章，分上下两册出版．上册包括：空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分及其应用等七章．把空间解析几何放在第一章讲授，是考虑到新生入学时学习热情很高，他们期待学习新的知识．如把函数作为第一章似不能满足这个要求．几年实践说明，这样安排较合适．当然，把它放在定积分之后，也是可以的．下册包括：多元函数及其微分法、重积分、线面积分、级数和常微分方程等五章，最后附有数学史料．

在编写过程中除考虑到大学专科各专业的要求和特点外，还参考了为大学本科四年制所制订的高等数学课程的教学基本要求（讨论稿）及中央电大的教学大纲．另外，我们汲收了不少从事大学专科各专业高等数学教学的教师的想法：全书不写多余的内容，所写内容均为教学所必需，但根据各专业的需要可以有所选取．例如，某些专业可以不学面积分、富氏级数．类似这些内容我们用 * 号表示．为了便于自学，安排了不少数量的例题，讲授时可酌情采用．本书每节后有习题，每章后有总习题．习题数量适中，多数应让学生完成．答案附在每章之后．

本书内容用 150 学时左右就能讲完．如果每学期以 17 周计算，那么第一学期每周可排 5 学时，第二学期每周可排 4 学时．

编写本书时，参考了清华大学应用数学系盛祥耀、居余马、李欧、程紫明等编的《高等数学》，同济大学数学教研室主编的《高等数学》（第二版），盛祥耀、葛严麟、胡金德、张元德四人编的《高等数学辅导》，同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》，别尔曼著、

景毅等译的《数学解析习题集编》及盛祥耀、葛严麟编的《习题集》(未出版). 在此,对以上所提到的作者表示感谢.

限于编者水平,有不当之处,希望广大读者提出宝贝意见.

盛祥耀

1985年12月于清华园

目　录

第一章　空间解析几何　向量代数

§1. 空间直角坐标系

I. 空间直角坐标系

在空间取三条相互垂直且相交于一点的数轴(一般讲它们的长度单位相同),其交点是这些数轴的原点,记作 O. 这三条数轴分别叫做 x 轴、y 轴和 z 轴. 一般是将 x 轴和 y 轴放置在水平面上,那么 z 轴就垂直于水平面. 它们的方向规定如下:从面对正 z 轴看,如果 x 轴的正方向以逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$ 时,正好是 y 轴的正方向,那么这种放置法称为右手系统. 右手系统可形象地作一个比划,当我们右手的食指、中指、大姆指相互垂直时,若食指指向 x 轴的正方向,中指指向 y 轴的正方向,那么大姆指就指向 z 轴的正方向. 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系. 交点 O 称为坐标原点. 每两轴所确定的平面称为坐标平面,简称坐标面. 具体讲,如 x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xy 坐标面. 类似地有 yz 坐标面、zx 坐标面. 这些坐标面把空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限(图 1.1). 如在 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 部分称为第一卦限.

我们来建立点与有序数组的对应关系.

设 P 为空间的任意一点. 过点 P 作垂直于 xy 坐标面的直线得垂足 P',过 P' 分别作 x 轴、y 轴垂直且相交的直线,过 P 作 z 轴垂直且相交的直线,依次得 x,y,z 轴上的三个垂足 M、N、R. 设 x、

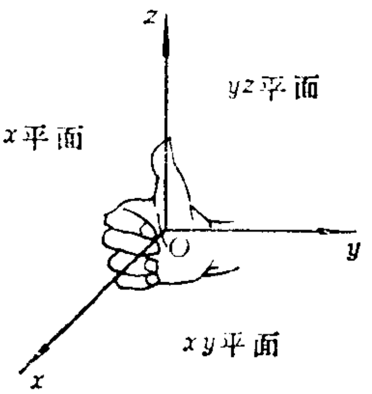

图 1.1

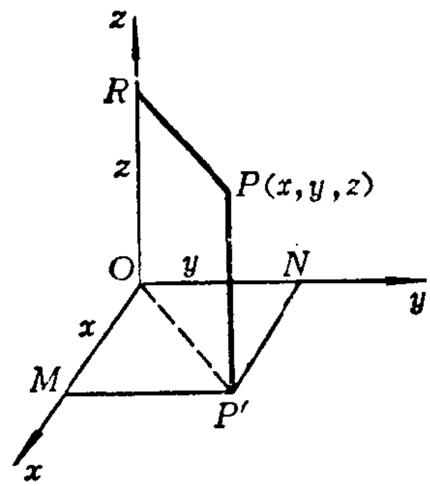

图 1.2

y、z 分别是 M、N、R 点在数轴上的坐标. 这样，空间内任一点 P 就确定了唯一的一组有序的数组 x、y 和 z，用(x,y,z)表示. (x,y,z)称为点P的坐标. 它们分别称为 x 坐标，y 坐标和 z 坐标.

反之，任给出一组有序数组 x、y 和 z，它们分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上对应 M、N 和 R 点. 过 M、N 并在 xy 坐标面内分别作 x 轴和 y 轴的垂线，交于 P'. 过 P' 作 xy 坐标面的垂线 $P'P$，过 R 作 $P'P$ 的垂直相交线得点 P. 这样一组有序数组就确定了空间内唯一的一个点 P. 而 x、y 和 z 恰好是点 P 的坐标. 根据上面的法则，我们建立了空间一点与一组有序数 x、y、z 之间的一一对应关系.

根据点的坐标的规定，可知点 $P_1(0,0,1)$ 在 z 轴上，点 $P_2(a,b,0)$ $(a,b$ 为任何实数$)$ 在 xy 坐标面上. 而点 $P_3(a,0,c)$ 在 zx 坐标面上.

II. 两点间的距离公式

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间内两个点. 由图 1.3

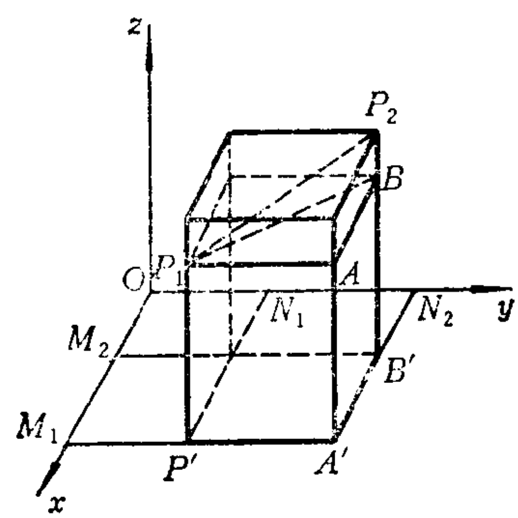

图 1.3

可以得到 P_1、P_2 之间的距离

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2 \qquad (\triangle P_1BP_2\text{是直角三角形}),$$

其中 $$|P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2 \qquad (\triangle P_1AB\text{ 是直角三角形}).$$

因为
$$|P_1A|=|P'A'|=|N_2N_1|=|y_2-y_1|,$$
$$|AB|=|A'B'|=|M_2M_1|=|x_2-x_1|.$$
$$|BP_2|=|z_2-z_1|.$$

所以 P_1 与 P_2 之间的距离为

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \qquad ①$$

例 求 $P_1(1,-1,0)$，$P_2(-1,2,3)$之间的距离.

解

$$|P_1P_2|=\sqrt{((-1)-1)^2+(2-(-1))^2+(3-0)^2}$$
$$=\sqrt{22}.$$

§1. 习 题

1. 问在 yz 坐标面上的点的坐标有什么特点?
2. 问在 xy 坐标面上的点的坐标有什么特点?
3. 问在 x 轴上的点的坐标有什么特点?
4. 求下列各对点之间的距离:

   (1) $(2,3,1)$，$(2,7,4)$;

   (2) $(4,-1,2)$，$(-1,3,4)$.
5. 在 xy 坐标面上找一点，使它的 x 坐标为 1，且与点 $(1,-2,2)$ 和点 $(2,-1,-4)$ 等距.

§2. 曲面、曲线的方程

若点的坐标 x、y 和 z 之间无任何限制时，即当 x、y 和 z 可任意选取时，所得到的点充满整个空间；当点的坐标 x、y 和 z 之间满足某个关系时，在一般情况下，这些点构成一个曲面，该关系式就

叫做曲面的方程；当点的坐标 x、y 和 z 之间满足两个关系式时，在一般情况下，这些点构成一条曲线，这两个关系式的联立称为曲线的方程；当 x、y 和 z 之间满足三个关系式时，在一般情况下，确定了一个点，以上简略地讲了曲面、曲线的方程的含义，下面我们确切地来介绍.

若曲面 S 上每一个点的坐标 x、y 和 z 满足方程

$$f(x, y, z)=0,$$

反之，满足这个方程的任一组的坐标 (x, y, z) 的点都在这个曲面 S 上，则称方程 $f(x, y, z)=0$ 为曲面 S 的方程，曲面 S 为方程的图形.

下面，我们介绍一些常用的曲面的方程.

I. 坐标面的方程. 与坐标面平行的平面的方程

以 xy 坐标面为例，在该平面上任取一点，它的 z 坐标为 0，即 $z=0$；反之，满足方程 $z=0$ 的任一组坐标 $(x, y, 0)$ 的点在 xy 坐标面上，所以 xy 坐标面的方程为

$$z=0.$$

类似地可得：yz 坐标面的方程为 $x=0$；zx 坐标面的方程为 $y=0$.

同样，方程 $z=a$ $(a\neq 0)$ 是过点 $(0, 0, a)$ 且平行于 xy 坐标面的平面的方程.

读者可以写出与 yz 坐标面、zx 坐标面平行的各平面的方程.

II. 球心在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面的方程

设点 $P(x, y, z)$ 是球面上任一点. 利用两点之间的距离公式，则 x, y, z 满足方程：

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2} \qquad ②$$

反之，满足方程②的点(x, y, z)，必在球面上．所以②式是球心在点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面的方程，②式称为球面的标准方程.

当$x_0=y_0=z_0=0$时，即球心在原点的球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

将②式展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z-R^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2=0.$$

所以，球面方程具有下列两个特点：

(1) 它是x, y, z之间的二次方程，且方程中缺xy, yz, zx项；

(2) x^2, y^2, z^2的系数相同且不为零.

现在我们要问，满足上述两个特点的方程，它的图形是否为球面呢？下面举例说明.

例 1 问方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-z+3=0$是否表示球面？

解 把方程配方，得

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-1-1-\frac{1}{4}+3=0,$$

即

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}.$$

显然没有这样的实数x, y, z能使上式成立、因而原方程不代表任何图形.

例 2 若方程$x^2+y^2+z^2-4x+y=0$是球面，请找出球心及半径.

解 配方，得

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=4+\frac{1}{4},$$

即

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{17}{4}.$$

所以，所给方程为球面，球心为$\left(2,\frac{-1}{2},0\right)$，半径为$\frac{\sqrt{17}}{2}$.

III. 柱面的方程

设有一条曲线L及一条定直线l，过L上每一点作与l平行的直线，这些直线所形成的面称为柱面，L称为柱面的准线，这些相互平行的直线称为柱面的母线. 我们只讨论准线在坐标面上，而母线垂直该坐标面的柱面. 这种柱面的方程应该有什么特点呢？下面举例说明.

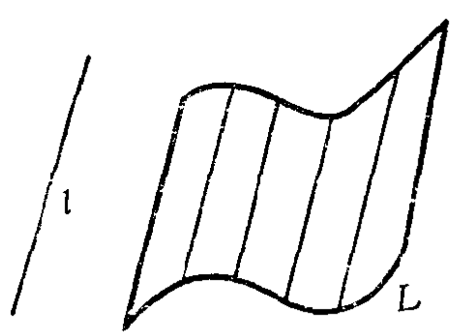

图 1.4

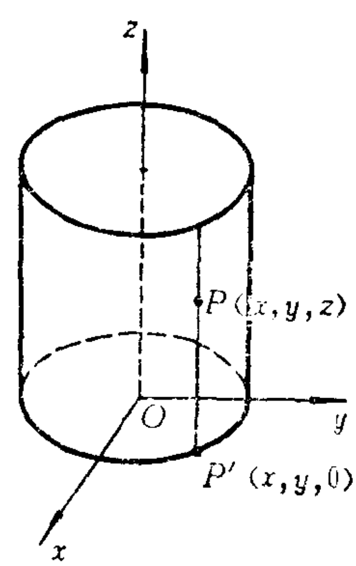

图 1.5

问方程$x^2+y^2=R^2$表示什么曲面？

在xy坐标面上，方程$x^2+y^2=R^2$表示圆心在原点，半径为R的圆. 在空间直角坐标系中，方程缺z，这意味着不论空间中点的z坐标怎样，凡x坐标和y坐标满足这方程的点，都在方程所表示的曲面S上；反之，凡是点的x坐标和y坐标不满足这个方程的，不论z坐标怎样，这些点都不在曲面S上，即点(x,y,z)在曲面S上的充要条件是点$P'(x,y,0)$在圆$x^2+y^2=R^2$上. 而$P(x,y,z)$是在过点$P'(x,y,0)$且平行于z轴的直线上，这就是说方程x^2+y^2

$=R^2$ 表示：由通过 xy 坐标面上圆 $x^2+y^2=R^2$ 上每一点且平行于 z 轴(即垂直于 xy 坐标面)的直线所组成，即方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示柱面，该柱面称为圆柱面.

一般地，如果方程中缺 z，即 $f(x,y)=0$，类似于上面的讨论，可知它表示准线在 xy 坐标面上，母线平行于 z 轴的柱面. 而方程 $g(y,z)=0$，$h(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面方程.

例 3 作方程 $y=x^2$ 的图形.

解 因方程缺 z，所以它表示母线平行于 z 轴，准线为 xy 坐标面上的抛物线的柱面. 该柱面称为抛物柱面(图 1.6).

例 4 方程 $y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 表示什么曲面？

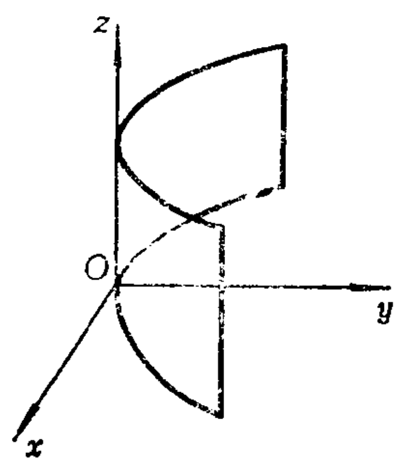

图 1.6

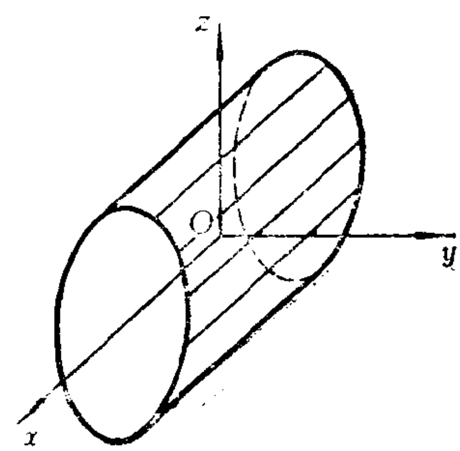

图 1.7

解 因方程中缺 x，所以它表示母线平行于 x 轴的柱面. 它的准线是 yz 坐标面上的椭圆. 所以叫椭圆柱面(图 1.7).

IV. 空间曲线的方程

空间曲线 L 可以看作是两个曲面的交线. 设这两个曲面的方程为

$$F(x,y,z)=0 \quad 和 \quad \Phi(x,y,z)=0,$$

则这两个曲面交线上的点 $P(x,y,z)$ 同时满足这两个方程. 所以

空间曲线L的方程可表示为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ \Phi(x,y,z)=0\end{cases}$$

的联立方程.

例 5 问$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ z=a\end{cases}$表示什么曲线?

解 $x^2+y^2=R^2$ 表示圆柱面，它的母线平行于 z 轴，而 $z=a$ 表示平行 xy 坐标面的平面，因而它们的交线是圆. 所以

$$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ z=a\end{cases}$$

表示圆. 这个圆在 $z=a$ 的平面上.

例 6 问$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x^2+y^2=R^2\end{cases}$表示什么曲线?

解 因为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 表示球心在原点、半径为R的球面，而 $x^2+y^2=R^2$ 表示母线平行于 z 轴，半径为R的圆柱面. 它们的交线是圆(在 xy 坐标面上，圆心为原点)，把原方程组化为下列同解方程组(把第二个方程代入第一个方程中)

$$\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2=R^2.\end{cases}$$

这个形式更能看出它表示在 xy 坐标面上圆心在原点、半径为R的圆.

由例 6 我们看到一条空间曲线的方程可以有不同形式表示.

空间曲线的方程也可用参数方程表示，下面举例说明.

例 7 设圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上有一质点，它一方面绕 z 轴以等角速度 ω 旋转，另一方面以等速 v_0 向 z 轴的正方向移动，开始时即 $t=0$ 时，质点在 $A(R,0,0)$处，求质点的运动方程.

解 设时间 t 时，质点在点$M(x,y,z)$，见图 1.8，M'是M在xy