微分方程习题详解

[日] 田中静男著
杜长春 罗固事 译

重庆出版社

微分方程习题详解

〔日〕田中静男 著
杜长春 罗固事 译
李恩伯 校

重庆出版社
1988年·重庆

责任编辑：傅道明
封面设计：吴庆渝

〔日〕田中静男著 杜长春 罗固事译
微分方程习题详解

重庆出版社出版、发行（重庆长江二路205号）
新华书店经销 遂宁市印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张14.375 插页2 字数356千
1988年8月第一版 1988年8月第一版第一次印刷
印数：1—3,700

*

ISBN 7-5366-0364-9/O·4

定价：4.60元

科技新书目183-314

译 者 的 话

要学好一门基础课程，除了正确地理解其基本概念、定义、定理以外，还需通过做大量的习题来巩固已学过的知识。对于微分方程这门课程，也不例外。针对这种情况，我们从国外有关书籍中，选译了这本《微分方程习题详解》。

本书系根据日本“槙书店”1977年出版的《微分方程式演习》一书译出。著者田中静男教授具有丰富的教学经验。原书无论是在章节的安排上，还是在选题、解题方面，都有一定的特色。全书共分九章，前七章为常微分方程，后两章为偏微分方程。各章、节的开头均先介绍与该章、节有关的基本概念、定义及定理，接着求解典型例题，然后给出习题及其详细解答。有些例题，习题给出两种解法，以便读者分析比较。

本书内容较多，叙述简捷明瞭，选题难易兼顾，解题精练，对于综合性大学、师范院校低年级学生、工科院校有关专业师生及自修者都有一定的参考价值。

翻译过程中，我们在意译的前提下，力求做到尊重原文风格，仅对极个别地方作了微小更动或加了译注。对于原书中的印刷错误及著者明显的疏忽之处，已予更正。本书稿承蒙重庆大学殷学纲老师详细审阅，在此表示深切的谢意。由于译者水平有限，译文中不足之处在所难免，望读者给予批评指正。

译者　1982．3．27

原　　　序

微分方程是现代数学的一个重要分支，同时，在理论与应用科学方面也具有十分重要的意义。

本书的目的是帮助读者掌握微分方程的解法。叙述时，考虑到了以下几点：

（1）不仅从形式上说明方程的解法，而且对作为其根据的基础理论、解题的思考方法也给予尽可能详尽的说明。

（2）为了能更好地理解微分方程的解法，许多问题的处理是从多方面进行的。

（3）论述时，对解题过程中所涉及到的微积分学、代数学及其它基本知识也作了详细的说明。

另外，本书收录了拙著《微分方程式》（东洋馆出版社出版）一书中所载的全部习题，重新提出了在该书中未能处理的各种问题。在理论方面，希望能同时参阅该书。

最后，值本书出版之际，谨向大力协助的槙书店诸位表示深厚的谢意。东洋馆出版社欣然应允将上述《微分方程式》一书中的习题转载于本书，在此一并致谢。

著者　1977年9月

目　录

第一章 微分方程及其解

1.1 微分方程的分类

含有一个或二个以上因变量对于一个或二个以上自变量的导数的方程叫**微分方程**. 例如，方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}+5\frac{d^2x}{dt^2}+3x=\sin t \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=v \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0 \tag{1.4}$$

都是微分方程. 如以上方程所示，由于这些微分方程所包含的变量和导数有各种各样的形式，所以需要将微分方程分成若干类型. 首先，可根据包含在微分方程中的自变量是一个还是两个以上而分类.

方程中含有一个或两个以上因变量对自变量的导数，而自变量又只有一个，则称此方程为**常微分方程**；方程中含有一个或两个以上因变量对两个以上自变量的偏导数，则称此方程为**偏微分方程**.

例如，(1.1) 式和(1.2)式是常微分方程. 在(1.1)式中，自变量只有x，y是因变量. 在(1.2)式中，自变量是t，而因变量是x. (1.3) 式和 (1.4) 式则是偏微分方程. 在 (1.3) 式中，

s 和 t 是自变量，v 是因变量。在（1.4）式中，有三个自变量 x、y、z，而 u 是因变量。

其次，可根据常微分方程或偏微分方程中所包含的最高阶导数的阶数而分类。换句话说，当包含在微分方程中最高阶导数的阶数为 n 时，则称该微分方程为 n **阶**微分方程。

例如，因为常微分方程（1.1）式中的最高阶导数的阶数是二，所以是二阶常微分方程。而（1.2）式是四阶常微分方程，（1.3）式和（1.4）式则分别是一阶和二阶偏微分方程。

另外，还可以根据线性概念进行分类。若设自变量为 x，因变量为 y，则关于 y，dy/dx，……，d^ny/dx^n 的一次方程

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y$$

$=b(x)$（$a_0(x)\neq 0$）叫做 n 阶**线性常微分方程**。不是线性的常微分方程称为**非线性常微分方程**。例如，方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}=xe^x \tag{1.6}$$

都是线性常微分方程，而方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y^2=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+6y=0 \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5y\frac{dy}{dx}+6y=0 \tag{1.9}$$

则都是非线性的。这是因为，在（1.7）式中，含有关于 y 的二次项 $6y^2$，在（1.8）式中，有 $(dy/dx)^3$ 项，而在（1.9）式中，有 $y\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 项。

最后，可根据线性微分方程中因变量及其导数的系数之性质

来分类．亦即，当方程如（1.5）式那样，系数都是常数时，称此为**常系数线性微分方程**，而当方程如（1.6）式那样，系数中含有自变量时，则称此为**变系数线性微分方程**．

习　题

试确定下列微分方程是常微分方程还是偏微分方程？阶数是多少？线性还是非线性？

1．$\dfrac{dy}{dx}+x^2y=xe^x$

2．$\dfrac{d^3y}{dx^3}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+3y=\sin x$

3．$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$

4．$x^2dy+y^2dx=0$

5．$\dfrac{d^4y}{dx^4}+3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^5+5y=0$

6．$\dfrac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+u=0$

7．$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y\sin x=0$

8．$\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\sin y=0$

9．$\dfrac{d^6x}{dt^6}+\dfrac{d^4x}{dt^4}\,\dfrac{d^3x}{dt^3}+x=t$

10．$\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^3=\sqrt{\dfrac{d^2r}{ds^2}+1}$

习　题　解　答

1．常微分方程，一阶，线性．

2．常微分方程，三阶，线性．

3．偏微分方程，二阶，线性．

4．常微分方程，一阶，非线性．

5. 常微分方程，四阶，非线性。

6. 偏微分方程，四阶，线性。

7. 常微分方程，二阶，线性。

8. 常微分方程，二阶，非线性。

9. 常微分方程，六阶，非线性。

10. 常微分方程，二阶，非线性。

1.2 微分方程的产生

微分方程出现在理论科学及应用科学各个方面。本节将讨论几个数学方面的微分方程问题。

例 1 试从下式中消去〔 〕内的常数，建立微分方程。

(i) $x^2+y^2=cx$ 〔c〕 (ii) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-x$ 〔c_1，c_2〕

解 (i) 将原方程两边对x求导，即得

$$2x+2yy'=c$$

由上式与原式消去c，便得

$$x^2+y^2=(2x+2yy')x \quad 即 \quad 2xyy'+x^2-y^2=0$$

此即为所求。

(ii) 将原方程两边对x求导两次，得

$$y'=c_1e^x-c_2e^{-x}-1, \qquad y''=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

由以上二式与原式消去c_1、c_2，即得

$$y=y''-x \quad 或 \quad y''-y=x$$

此即为所求。

例 2 试从下式中消去〔 〕内的常数，建立偏微分方程。

(i) $z^2=ax^2+by^2$ 〔a，b〕

(ii) $u=ax+by+cz$ 〔a，b，c〕

解 (i) 将原方程两边分别对x、y求偏导数，得

$$z\frac{\partial z}{\partial x}=ax, \quad z\frac{\partial z}{\partial y}=by$$

由以上二式与原式消去a、b，即得所求偏微分方程为：

$$z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$$

(ii) 由原方程可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=b,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=c$$

从以上三式与原式消去a、b、c，即得所求偏微分方程为：

$$u=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

例3 试从下列式中消去〔 〕内的函数，建立偏微分方程。

(i) $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 〔φ〕

(ii) $z=x^n f(y)+g(y)$ 〔f, g〕

(iii) $z=f(y+ax)+g(y-ax)$ 〔f, g〕

解 (i) 由原式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

将以上二式分别乘以x、y然后相加，即得偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(ii) 由原式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}f(y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=n(n-1)x^{n-2}f(y)$$

由此即得

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(n-1)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

(iii) 由原式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=af'(y+ax)-ag'(y-ax),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(y+ax)+g'(y-ax)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2f''(y+ax)+a^2g''(y-ax)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(y+ax)+g''(y-ax)$$

由后两式即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

习　　题

1．试从下列各式中消去〔 〕内的常数，建立微分方程．

(i) $y=ce^{-x}$　〔c〕

(ii) $y=\sin(x+c)$　〔c〕

(iii) $y=cx+\sqrt{1+c^2}$　〔c〕

(iv) $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$　〔a〕

(v) $y=ae^{\alpha x}+be^{\beta x}$　$(\alpha\neq\beta)$　〔a, b〕

(vi) $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$　〔c_1, c_2〕

(vii) $y=ae^x+bxe^x$　〔a, b〕

(viii) $y=ax^2+bx+c$　〔a, b, c〕

2．试从下列各式中消去〔 〕内的常数，建立偏微分方程．

(i) $z=(x+a)(y+b)$　〔a, b〕

(ii) $z=x\cos\alpha+y\sin\alpha+\beta$　〔α, β〕

(iii) $u^3=ax^3+by^3+cz^3$　〔a, b, c〕

(iv) $x^2+y^2+z^2=r^2$　〔r〕

3．试从下列各式中消去〔 〕内的函数，建立微分方程．

(i) $z=(x+y)f(x^2-y^2)$　〔f〕

(ii) $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$　〔f〕

(iii) $z=f(\frac{y}{x})+xg(\frac{y}{x})$ 〔f, g〕

(iv) $u=f(x+y+z,\ xyz)$ 〔f〕

习 题 解 答

1. (i) 由$y=ce^{-x}$及$y'=-ce^{-x}$，得

$y'+y=0$

(ii)由$y=\sin(x+c)$ 及$y'=\cos(x+c)$ ，得

$y^2+y'^2=1$

(iii) 由 $y=cx+\sqrt{1+c^2}$及$y'=c$，得

$y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$

(iv) 将原式对x求导，便有

$x-a+(y-a)y'=0$ 即 $a=(x+yy')/(1+y')$

从而可得 $x-a=\frac{(x-y)y'}{1+y'}$ $y-a=-\frac{x-y}{1+y'}$

将此式代入所给方程，得

$$(x-y)^2(1+y'^2)=(x+yy')^2$$

即 $$(y-xy')^2=2xy(1+y'^2)$$

(v) 若从$y=ae^{\alpha x}+be^{\beta x}$，$y'=a\alpha e^{\alpha x}+b\beta e^{\beta x}$，$y''=a\alpha^2e^{\alpha x}+b\beta^2e^{\beta x}$中消去$a$，$b$，便有

$$\begin{vmatrix} y & e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ y' & \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \\ y'' & \alpha^2 e^{\alpha x} & \beta^2 e^{\beta x} \end{vmatrix}=0 \text{ 即 } e^{(\alpha+\beta)x}\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & \alpha & \beta \\ y'' & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}=0$$

由此可得

$$y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=0$$

(vi) 由$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$，$y'=-c_1a\sin ax+C_2a\cos ax$，$y''=-c_1a^2\cos ax-c_2a^2\sin ax=-a^2y$

即得 $$y''+a^2y=0$$

(vii) 若从$y=ae^x+bxe^x$，$y'=ae^x+b(x+1)e^x$，$y''=ae^x$

$+b(x+2)e^x$中消去a、b、c，则有

$$\begin{vmatrix} y & e^x & xe^x \\ y' & e^x & (x+1)e^x \\ y'' & e^x & (x+2)e^x \end{vmatrix}=0 \quad 即\quad e^{2x}\begin{vmatrix} y & 1 & x \\ y' & 1 & x+1 \\ y'' & 1 & x+2 \end{vmatrix}=0$$

由此可得

$$y''-2y'+y=0$$

(viii) 因$y=ax^2+bx+c$，$y'=2ax+b$，$y''=2a$，$y'''=0$，故所求微分方程为 $y'''=0$

2．(i) 由$z=(x+a)(y+b)$得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+b$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+$

因此，所求微分方程为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

(ii) 由$z=x\cos\alpha+y\sin\alpha+\beta$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\alpha,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\sin\alpha$$

因此，所求微分方程为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1$$

(iii) 由$u^3=ax^3+by^3+cz^3$，$3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=3ax^2$，$3u^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=3by^2$，$3u^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=3cz^2$，得

$$u^3=\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)x+\left(u^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)y+\left(u^2\frac{\partial u}{\partial z}\right)z$$

因此，所求微分方程为

$$u=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

(iv) 对$x^2+y^2+z^2=r^2$求全微分，有

$$xdx+ydy+zdz=0$$

如将此式中的x、y视为自变量，则可得方程

$$z\frac{\partial z}{\partial x}+x=z\frac{\partial z}{\partial y}+y=0$$

3. (i) 由$z=(x+y)f(x^2-y^2)$，$\frac{\partial z}{\partial x}=f+2(x+y)xf'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f-2(x+y)yf'$，得所求微分方程为

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)f=z$$

(ii) 由$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=f(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})$，$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}f'$，$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}f'$，得所求微分方程为

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

(iii) 由$z=f\left(\frac{y}{x}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'+g-\frac{y}{x}g',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'+g',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'+\frac{y^2}{x^4}f''+\frac{y^2}{x^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''-\frac{y}{x^2}g'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''+\frac{1}{x}g''$$

因此，所求微分方程为

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(iv) 在$u=f(x+y+z,\ xyz)$中，若设$\xi=x+y+z$，$\eta=xyz$，则

$$u_x=f\zeta+yzf\eta,\quad u_y=f\zeta+zxf\eta,\quad u_z=f\zeta+xyf\eta$$