

数值天气预报的 数学物理基础

第 一 卷

曾庆存 著



科学出版社

数值天气预报的数学物理基础

第一卷

曾庆存 著

贵州师范学院内部使用

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是《数值天气预报的数学物理基础》的第一卷,叙述基础理论部分。意在将气象学、流体动力学和数学紧密地结合起来,充实数值天气预报的理论基础。内容大体上分为三个方面:一是从气象实际出发,建立大气动力学模式以及相应的边界条件和初始条件,提成一个物理学上合理、数学上适定的问题;二是对各种动力学模式的性质进行深入的分析,研究大气动力学的一些基本问题,其中包括大气运动的整体性质,特征波动,适应过程,准地转演变过程和非地转演变过程,球面上扰动的特点和低纬度地带扰动的特点,涡旋和波动的相互作用,以及各种尺度运动的非线性相互影响等,尤其是对原始方程和非地转演变过程有较多研究;三是研究各种模式初值问题解的适定性,给出了解的存在、唯一和稳定性的证明;还研究了一些数学方法,把动力学理论建立在较严密的数学论证基础之上。书中还涉及到旋转流体动力学的许多基本问题,以及相应的应用数学方法问题。

本书可供大气动力学和数值天气预报的研究工作者和专业人员参考,也可供教学参考和研究生等阅读。对流体力学、海洋动力学和应用数学方面人员也有一定参考意义。

图书在版编目(CIP)数据

数值天气预报的数学物理基础. 第一卷/曾庆存著. —北京:科学出版社, 2019. 4

ISBN 978-7-03-061036-2

I. ①数… II. ①曾… III. ①数学物理方法—应用—数值天气预报
IV. ①P456. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 070721 号

责任编辑:孟美岑/责任印制:吴兆东

封面设计:图阅盛世

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 4 月影印版 开本:787×1092 1/16

2019 年 4 月第一次印刷 印张:34 3/4

字数:805 000

定价:288.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

重印说明

《数值天气预报的数学物理基础（第一卷）》出版于1979年，是国际数值天气预报理论奠基人之一曾庆存院士的重要代表作。本书将气象学、流体动力学和数学紧密地结合起来，奠定了数值天气预报的理论基础。尽管以中文写就，该书出版后依然引起了国内外学者的极大重视。1981年日本《天气》杂志刊登日本科学家的评价，称该书是“世界上第一本这方面的著作，是气象学理论化的代表作”。1982年，拟出版英文版，美国著名气象学家 Smagorinsky 特为之作序，称：“这卷书的出版对发展动力气象学文献有突出的贡献，将立于世界优秀名著之林。……尽管科学发展很快，本书的选材、组织和给出的结果却具有持久的价值。”可惜后因作者工作繁忙而未竟此英文稿，致使该序连同英译本未曾问世。本书至今仍是相关专业研究生和科研人员的必备参考书，对我国数值天气预报事业的发展起到了重要作用；在国际上广为数值天气预报研究者所知晓和引用，数学界和流体力学界也很重视并多为引用。

2019年，本书在科学出版社数字图书平台“科学文库”上线后引起了很大的反响，其持久的学术价值和社会效益又一次得到证实。为满足广大读者的需求，科学出版社决定对本书进行重印，书中内容均保持原貌，未做改动。

序

本世纪五十年代以来,大气科学有了蓬勃发展,已经初步形成了一门近代科学。在这二十多年中,作为大气科学发展的一个重要成果,建立在数学物理学方法基础上的“数值天气预报”已在世界各国得到了广泛的应用。其他近代科学技术的成就还将大大促进它继续向前快速发展。利用空间技术和气象卫星等现代化工具能够及时获得全球大气从低层到高空的气象资料,近代大型电子计算机则提供了加工处理资料 and 进行计算的强有力工具,即使最复杂的大气动力学问题亦已有可能进行计算试验。同时,国计民生的需要又向大气科学提出了新的和更高的要求。看来,在数值天气预报继续向前发展的道路上,物质条件已经比较成熟,理论研究的重要性显得更为突出了。在数值天气预报理论方面,虽有不少光辉的研究成果,但毕竟还属年青,许多问题还有待解决。因此,用近代的观点和方法进行研究,系统总结以前的成果,创立新的理论和方法,充实理论基础,为今后的发展探索道路,将会是很有益处的。

数值天气预报研究的对象是天气演变过程,它的理论基础是大气动力学,而数学则是建立理论和解决问题的必不可少的一部分内容。因此,数值天气预报正处在气象学、流体动力学和数学这三者的汇合点上。它的有成效的发展历史说明,必须把这三者紧密地有机地结合起来。也就是说,必须从天气实际出发,掌握从实际总结出来的规律性,从此进行抽象,上升到理论,即建立相应的动力学模式。然后,对这些动力学模式进行深入分析,发展理论,建立解决理论问题的合适数学方法。然后再回到实际中去,检验理论是否正确,建立可供大规模应用的数值预报方法。数值天气预报业务在很大程度上正是每天都在大规模地检验着理论,淘汰不正确的和旧的,并在新的基础上提出新方法、新理论和新的研究课题。

本书意在遵循将气象问题、动力学理论和数学方法结合起来的途径,对数值天气预报的数学物理基础问题进行较系统和严密的研究,澄清一些问题,充实理论基础,希望有助于今后的研究工作。

在本卷里,研究三个方面的基础理论问题。第一个方面是建立动力学模式,即推出方程组以及边界条件和初始条件等。第二个方面是研究这些动力学模式的性质。第三个方面是研究有关的数学问题,寻求合适的数学方法。当然,这三方面是相互紧密地联系着的。

第一、二、七这三章以及第三章的一部分就是讲建立大气动力学模式的。当然,模式的正确性要通过实践的检验,但在建立模式的阶段,就应进行检查,力求其正确,即从实际问题出发,又要符合基本物理定律和数学上具有内在的逻辑统一性(适定性),这三者应是建立模式时的依据。因此,我们不是一开头就提出极简化的模式,而是从最一般的流体力学方程和大气的实际情况出发,逐步进行简化,逐步建立各种相应的模式。其次,边界条件和初始条件的正确提法也是很重要的,然而人们不够注意,故特辟专章(第二章)讨论这些问题。

有了动力学模式之后,对它的性质进行深入的分析研究,并和实际比较,修改和完善理论,从理性上认识大气运动的规律性,这就是大气动力学研究的主要课题,也是数值天气预报的理论基础。因此,本卷大部分篇章是研究这些课题的。

第三章研究各种模式的整体性质。大气是流体,要检验模式是否符合于基本物理规律,最主要的方法就是从整体上来考察。

第四、五、六这三章专讲小扰动的性质。这是最简单和最基本的运动形态,也是认识大气运动最基本性质的重要基础部分,因此书中作了系统的研究。

从第七章起专门研究大尺度流场的演变过程,这是大气动力学和数值天气预报的主要对象。第七章导出各种简化模式,第八章讲准地转模式的成就。在现代,研究原始方程以及非地转演变过程更加重要,因此,书中给以最大的注意(第九至第十一章)。一方面,大气运动中涡旋场保持着主导地位;另一方面,波动又常在合适的条件下激发出来。涡旋和波动并存,相互作用,演变过程和适应过程相互影响,这是大气运动的很重要特点。其他如球面上大规模扰动向纬圈环流输送能量的机理,各种尺度运动的非线性相互制约,中尺度天气系统以及锋区演变过程的特点等,这些过程都是只有用非地转模式才能较好地描述的,在书中都着重进行了研究。诚然,非地转演变过程理论研究课题远不止这些,需要大力开展研究。

第十二章专门研究各种模式在数学上的正确性问题,即讨论相应的初值-边值问题的适定性。书中给出了完全肯定的答案,从而论证了第一、二章和第七章所建立的各种模式,以及边界条件和初始条件,在数学物理上是合理的。

数学方法和动力学问题是密不可分的,因此书中始终贯串着数学问题的研究,不止是在第十二章。例如,由于小扰动方程的研究十分重要,在第四、五两章就对它进行了严密的数学分析。特别是为了解决球面问题,我们还不得不专门建立了定义在球面上的一些泛函空间,并对其性质进行研究。正是在这基础上,我们才解决了旋转球面上扰动方程(即历史上有名的拉普拉斯潮汐方程)初值问题解的存在性和解按特征函数的展开等基本问题。这些在以后(特别是在第十二章)也有多方面的应用。此外,在第七章关于摄动法,以及第九章求特解等问题中,也涉及许多数学研究问题。

本卷所讨论到的这些问题,只是数值天气预报理论的基础部分,意在对大气运动的纯动力学方面作尽可能深入的数学物理分析。我们将在第二卷中专门讲述数值天气预报中的计算数学问题。至于非绝热过程等则拟以后专门讲述。

阅读本书时要求有初步的动力气象和流体力学方面的知识,也要求有一定的高等数学知识。为使读者在数学上不致发生困难书中就一些基础问题给出详尽的数学推导。至于像摄动法、渐近展开和球面上的泛函空间等问题,书中也有讲述。

本书中相当多内容是作者十余年的研究结果,有一部分曾经在学术报告会上报告过,绝大部分只是在本书中才第一次公开发表。

本书材料早已准备好,1973年起开始正式逐章写作,时断时续,幸赖党组织关心和支持,得以完成。叶笃正同志和陶诗言同志给了作者许多教益;叶笃正同志还阅读了全部书稿,提供了宝贵的意见,作者谨致以衷心感谢。中国科学院计算技术研究所冯康同志阅读了第五章,并和作者多次讨论数学问题;大气物理研究所中和作者在一起工作的同志们以及业务处的同志则在各方面给以有效的帮助,作者也十分感谢。

目 录

第一章	基本方程 坐标变换	1
§ 1	描写大气运动的基本方程组	1
§ 2	球坐标	3
§ 3	准静力平衡 等压面坐标	4
§ 4	地形坐标(一)	6
§ 5	地形坐标(二)——推广	9
§ 6	地图投影坐标(一) 平面透视投影	10
§ 7	地图投影坐标(二) 非透视投影	15
§ 8	局地地平面坐标	17
§ 9	物质面坐标 等熵面坐标	18
§ 10	标准层结近似	22
第二章	边界条件 初始条件 初值问题和解的适定性	26
§ 1	垂直边界条件及其正确提法	26
§ 2	侧边界条件	31
§ 3	初始条件 初值问题	33
§ 4	整层无辐散近似	34
§ 5	小扰动问题解的唯一性和稳定性	36
§ 6	正压无辐散模式	38
§ 7	正压模式	41
§ 8	在复杂地形情况下使用的正压模式	44
第三章	运动的整体性质 保守属性和守恒量	47
§ 1	一些符号和定义	47
§ 2	质量守恒定律	49
§ 3	角动量原理	49
§ 4	带状环流和动量改变原理	52
§ 5	能量方程	53
§ 6	有效位能 有效相对位能和有效表面位能	57
§ 7	可容许的替代 灵活性方程组	58
§ 8	涡度和散度 能量的相互转换	59
§ 9	保守属性 位温	64
§ 10	位涡度	66
§ 11	正压无辐散模式 尺度守恒	67
§ 12	正压模式	72
第四章	小扰动 运动的分类	75
§ 1	小扰动方程	75
§ 2	坐标变换	79
§ 3	常定扰动 涡旋	81

§ 4	特征函数和展开定理	83
§ 5	离散谱点	85
§ 6	初值问题的解	89
§ 7	水平区域为全平面的情况	91
§ 8	关于上边界条件的正确提法的附注	96
§ 9	特征波动 运动的分类	98
§ 10	正压大气情况	99
§ 11	$Q(\xi)$ 有间断点的情况	100
§ 12	$p_i > 0$ 的情况	105
§ 13	$c_\infty^2 \rightarrow \infty$ 及 $c_\infty^2 \rightarrow 0$ 的情况	106
§ 14	$c^2 = 0$ 的情况 惯性振动和惯性内波	109
第五章	球面上大气的小扰动	114
§ 1	球面上正压无辐散大气 惯性波	114
§ 2	球面上正压大气的特征波动	116
§ 3	一些守恒量和范数	121
§ 4	球面上的泛函空间 广义梯度及广义涡度和散度	129
§ 5	空间 $W_2^{(k)}$ 的性质	137
§ 6	空间 $\mathbf{W}_2^{(k)}$ 的性质	144
§ 7	空间 $W_2^{(k)}$ 和 $\mathbf{W}_2^{(k)}$	149
§ 8	广义初值问题 广义解和近似解	161
§ 9	通常解	168
§ 10	解的表达式和解按特征波动的展开	170
§ 11	再论特征波动和展开定理	180
§ 12	强迫扰动和特征曲线族的另外一些性质	187
§ 13	球面上斜压大气的特征波动及初值问题的解	192
§ 14	β 平面近似 扰动在近赤道地区的特性	196
第六章	地转适应过程	202
§ 1	地转适应过程	202
§ 2	内波的弥散	204
§ 3	表面波的弥散	207
§ 4	平面地面近似下地转适应的条件和快慢	211
§ 5	正压大气中“适应了”的场 初始扰动水平尺度的影响	216
§ 6	斜压大气中“适应了”的场	219
§ 7	初始扰动特性对“适应了”的场的影响	222
§ 8	应用和例 锋生过程	230
§ 9	惯性波的弥散和准地转平衡	237
§ 10	近赤道地带的适应过程	240
§ 11	球面上正压大气运动的准地转关系	243
§ 12	球面上大气内波的弥散	244
§ 13	边界层内和平流层以上高空扰动的特性	248
第七章	天气系统的演变过程 简化方程组	252
§ 1	引论	252

§ 2	特征量和特征参数 无量纲方程	253
§ 3	大气动力过程的阶段性 适应过程和演变过程	258
§ 4	准地转演变过程	260
§ 5	准平衡演变过程 平衡方程	263
§ 6	大尺度地形的影响	264
§ 7	球面上准地转-准无辐散模式	272
§ 8	超长波的演变过程	276
§ 9	泛函空间中的特征量和摄动法的收敛性问题	283
§ 10	球面上大气的动力学过程和方程组的简化	287
第八章	准地转演变过程	291
§ 1	常定流场	291
§ 2	倾向解	298
§ 3	流场的变形和能量的频散	303
§ 4	点源和波包的传播	307
§ 5	正压不稳定	310
§ 6	斜压大气中天气系统的发展和能量的转换	313
§ 7	斜压不稳定	316
§ 8	关于大尺度天气系统演变的一般问题	318
§ 9	边界和外源的影响	321
§ 10	准地转运动的能谱 指数循环	324
§ 11	大气能谱的统计特性	329
第九章	非地转演变过程(一)	338
§ 1	正压大气的常定流场	338
§ 2	斜压大气的常定流场	346
§ 3	在特殊地形上的斜压常定流场	361
§ 4	球面上大气的常定流场	366
§ 5	非线性特征波动 非频散解	376
§ 6	斜压大气的非频散解	385
§ 7	球面上大气的非频散解和周期解	393
§ 8	不含有快波的初始场	398
§ 9	球面上不含有快波的初始场	401
第十章	非地转演变过程(二)	403
§ 1	化微分方程为积分-微分方程	403
§ 2	非线性适应过程 适应过程和演变过程的相互影响	407
§ 3	散度场向涡旋场的适应	410
§ 4	斜压大气情况	411
§ 5	中尺度天气系统的适应过程及其特点	421
§ 6	正压大气扰动的非线性完全适应	425
§ 7	斜压扰动的非线性完全适应	433
§ 8	球面上正压大气的非线性旋转适应过程	440
§ 9	球面上斜压大气的非线性旋转适应过程	444
§ 10	非静力平衡情况下的非线性旋转适应过程	448

§ 11 一些推论·····	455
第十一章 非地转演变过程(三) ·····	457
§ 1 快波的激发 原始方程对计算误差的敏感性·····	457
§ 2 快波的激发 超高速不稳定·····	460
§ 3 快波的激发 惯性不稳定和非地转不稳定·····	464
§ 4 快波的吸收 快波和慢过程的相互作用·····	471
§ 5 快波的吸收 快波波包的传播和演变·····	475
§ 6 中尺度系统动力学·····	484
§ 7 快波和中尺度系统与天气的关系 飚线·····	486
§ 8 斜压非地转扰动的特点·····	488
§ 9 锋区环流·····	494
第十二章 初值问题的适定性 ·····	498
§ 1 正压无辐散大气初值问题解的唯一性和稳定性·····	498
§ 2 正压大气初值问题解的唯一性和稳定性·····	503
§ 3 斜压大气初值问题解的唯一性和稳定性·····	506
§ 4 正压准地转-准无辐散模式初值问题解的存在性 ·····	508
§ 5 斜压准地转-准无辐散模式初值问题解的存在性 ·····	511
§ 6 正压大气初值问题解的存在性·····	515
§ 7 斜压大气初值问题解的存在性·····	518
§ 8 预报时效·····	523
§ 9 附录一 球面上一些积分不等式·····	526
§ 10 附录二 空间 $L_{2,2}$ 的分解·····	527
参考文献 ·····	529
符号一览表·····	532

第一章 基本方程 坐标变换

§ 1 描写大气运动的基本方程组

当我们研究地球大气圈内对流层和平流层中的宏观的大规模运动的时候, 可以认为大气是理想气体, 因此描写大气基本物理状态的宏观物理量如气压 p 、绝对温度 T 及密度 ρ 就符合所谓理想气体的状态方程

$$p = \mu^{-1} R_0 \rho T = R \rho T \quad (1.1)$$

其中 $R_0 = 8.31432 \times 10^7$ 厘米²·秒⁻²·度⁻¹ 为通用气体常数, “度”表绝对温度; μ 为空气分子量, $R = \mu^{-1} R_0$ 则称为空气气体常数. 由于在对流层及平流层中, 主要气体成分的混合比在相当精确的范围内是恒定的, 所以 μ 为常数, R 也为常数, 干空气的 $\mu = 28.9644$.

除状态方程之外, 描写气体宏观力学运动和物理状态变化的规律性的基本方程式就是运动方程、连续方程和热流入量方程等.

对于大气运动来说, 固定于地心, 只随地球一起绕太阳公转而不随地球作自转运动的参考坐标系, 完全可以看作是惯性坐标系. 但对我们来说, 比较方便的却是观察大气相对于地球的运动, 即必须取同时随着地球一起自转的一套非惯性坐标系作参考坐标系. 设大气质点相对于这套坐标系的相对速度为 $\mathbf{V}_3$, 该质点相对于坐标原点的向径为 $\mathbf{r}$, 地球自转的角速(即参考坐标系相对于惯性坐标系的角速)为 $\boldsymbol{\omega}$, 就有

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{g} + \mathbf{D} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_3 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

这里 t 是时间, $d\mathbf{V}_3/dt$ 是相对加速度; $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_3$ 就是所谓的科里奥利力, $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ 则是所谓的离心力; $\mathbf{P}$ ——气压梯度力, $\mathbf{g}$ ——地球重力, $\mathbf{D}$ ——耗散力; $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_3$ 等表示二向量的向量积. 和地球重力相比, 离心力 $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ 虽不能忽略, 但是比较小, 故对于研究大气的大规模运动来说, 可以把二者合起来, 称为表观重力 $\mathbf{G}$, 其大小等于二者的向量和, 而方向则认为与 $\mathbf{g}$ 相同, 即指向地心, 或即与 $-\mathbf{r}$ 同向. 再进一步, 由于平流层的高度在 60 公里以下, 和地球半径 a 相比是一个很小的量, 故还可以忽略 $|\mathbf{G}|$ 随空间的变化, 取为等于常数 g . 现在还没有什么特别的需要认为不能作这样的简化. 又气压梯度力 $\mathbf{P} = -\rho^{-1} \nabla p$. 于是运动方程就可写成

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{G} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{D} \quad (1.2)$$

其中 ∇p 是 p 的三度空间梯度

$$\nabla p \equiv \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.3)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为沿着相互垂直的右手坐标系 (x, y, z) 的坐标轴方向的单位向量.

运动着的大气既可看作连续介质, 此时质量守恒定律就表示为连续性方程

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.4)$$

其中 d/dt 和上面的一样, 表示“个别微商”, 即有

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla\rho \quad (1.5)$$

$\partial\rho/\partial t$ 就是“局地微商”; $\mathbf{V}_3 \cdot \nabla\rho$ 为二向量 $\mathbf{V}_3$ 及 $\nabla\rho$ 的数量积, $\nabla \cdot \mathbf{V}_3$ 为 $\mathbf{V}_3$ 的三度空间散度. 如记 $\mathbf{V}_3$ 沿 x, y, z 三坐标轴的分量各为 v_x, v_y, v_z , 就有

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_3 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

热力学第一定律可写成热流入量方程的形式

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{dQ}{dt} \quad (1.6)$$

这里 c_v 为空气的等容比热; dQ/dt 为在单位时间内输入单位质量空气的热流入量. 利用 (1.1), 还可把 (1.6) 改写成

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (1.6)'$$

或者

$$\frac{d}{dt} \left(c_p \ln \frac{T}{p^{R/c_p}} \right) = \frac{dQ}{T dt} \quad (1.6)''$$

其中 $c_p = c_v + R$ 就是空气的等压比热; $\ln F$ 为量 F 的自然对数. (1.6), (1.6)' 和 (1.6)'' 各有方便之处.

对于大气的大规模运动来说, dQ/dt 可以只考虑为三部分之和, 即分子传热或湍流传热、辐射传热及水汽相变加热. D 则是由于空气的内摩擦或湍流动量传输所导至的耗散力, 而在靠近大气的边界, 例如地表, 还要考虑和边界的摩擦力作用. 假如 D 及 dQ/dt 为已知的量, 或者可以通过大气自身的运动状态及物理状态 $\mathbf{V}_3, p, T$ 等表示出来的话, 则方程组 (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) 对于描写大气运动来说就完全足够了, 不必另外加入别的方程, 亦即这组方程是“封闭的”了. 一切其他的规律性都可以由这组基本的方程组推导出来.

诚然, 云和雨等现象是气象观测和预报的最重要对象之一, 通过水汽相变过程, 它们反过来对大气的运动状态如 $\mathbf{V}_3, p, T$ 等都有不小的影响. 至于像台风那样的天气系统, 运动状态和云雨现象之间更是互相依赖、相辅相成的统一体了. 此外, 云雨、水汽以及臭氧等还是吸收和发射辐射能的一些主要成员, 可是它们的含量却是变化着的, 也不完全由运动状态及物理状态等决定. 因此, 要更好地描写和预报大气运动, 水汽自身的变化、云雨甚至臭氧含量等也是应该考虑和预报的对象. 但因对于像高空“槽”“脊”等天气系统和一般的大气大规模运动来说, 已经知道水汽相变等的“反馈”作用毕竟是第二性的; 而且研究在没有外热源或已知外热源情况下的大气运动的规律性, 对于了解和预报大规模的大气运动来说, 也有着基础性的意义. 本书首先着重研究大气运动的纯动力学的基本问题, 暂时把 D 及 dQ/dt 看作已知的量.

忽略 D 就是所谓“自由大气”近似. 除靠近地表面的“摩擦层”而外, 对于以一天为时间单位的运动来说, 使用自由大气近似大体上是可以的. 忽略 dQ/dt 就是“绝热”近似, 除靠近地表的“热力边界层”内、位于平流层中的臭氧层内以及有着严重的水汽相变过程的区域而外, 对于时间以一天为单位的运动来说, 绝热近似大体上也是可以的. 现在各国通

用这两种近似, 来作时效为 1 至 3 天的数值天气形势预报。有的则以此为基础, 再引入一些订正。本书在许多场合下也使用这两种近似。至于有关自由大气近似及绝热近似的合理性的论证, 读者可参阅动力气象学教科书和已有的数值预报的书^[1]。

§2 球 坐 标

如果不计地形起伏, 地球表面可以较好地用一个旋转椭球面来逼近, 甚至用一个球面来逼近。一般说来, 对于研究大气运动来说, 用球面近似就足够了; 目前尚无明显的证据, 也无特别的需要, 说明必须考虑地表面不是球面。因此最自然的就是用球坐标来研究大气运动, 坐标的原点即地心, 球面上的正交坐标系就是经度 λ 和纬度或余纬 θ 。设在点 $B(\theta, \lambda, r)$ 上沿子午圈方向的单位向量为 θ^0 , 向南为正; 沿纬圈的单位向量为 λ^0 , 向东为正; 沿向径方向(垂直方向)的单位向量为 r^0 , 向上为正; 而 r 则为向径的长度, 即 $r = \overline{OB}$, 如图 (1.1)。速度 V_s 沿这三方向的投影各为 v_θ, v_λ, v_r , 即

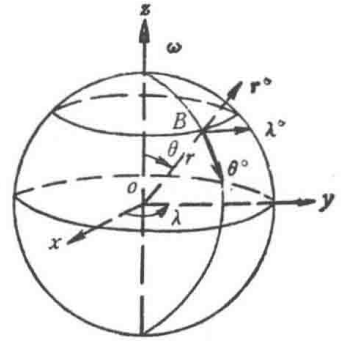


图 1.1

$$V_s = \theta^0 v_\theta + \lambda^0 v_\lambda + r^0 v_r \quad (1.7)$$

而按速度的定义, 又有

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \equiv r\dot{\theta}, \quad v_\lambda = r \sin \theta \frac{d\lambda}{dt} \equiv r \sin \theta \dot{\lambda}, \quad v_r = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} \quad (1.8)$$

这里 $d\theta/dt$ 等就是空气质点的坐标对时间的微商。于是某一个量 F 的个别变化 $\dot{F}$ 就是

$$\begin{aligned} \dot{F} &\equiv \frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{F(\theta(t+\Delta t), \lambda(t+\Delta t), r(t+\Delta t); t+\Delta t) - F(\theta(t), \lambda(t), r(t); t)\} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) F \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \right) F \end{aligned} \quad (1.9)$$

在球坐标中, 运动方程 (1.2) 就分解为下面三个方程

$$\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{1}{r} (v_r v_\theta - v_\lambda^2 \cot \theta) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2\omega \cos \theta v_\lambda + D_\theta \quad (1.10)$$

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{1}{r} (v_r v_\lambda + v_\theta v_\lambda \cot \theta) = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - 2\omega \cos \theta v_\theta - 2\omega \sin \theta v_r + D_\lambda \quad (1.11)$$

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{1}{r} (v_\theta^2 + v_\lambda^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\omega \sin \theta v_\lambda + D_r \quad (1.12)$$

其中 D_θ, D_λ, D_r 为 D 的分量, g 是重力加速度的数值。而连续方程就具有形式

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.13)$$

至于热力学第一定律则仍保留 (6) 的形式, 只需将 d/dt 用 (1.9) 式代入就行了。

由于地球半径 $a \approx 6371$ 公里, 而在我们所研究的大气层内, $|r-a| \leq 60$ 公里, 故在 (1.9) — (1.13) 中凡是以系数出现的时候 r 都可以用 a 来代替; 此外, 对于大范围运动来

说,还可在(1.13)中略去 $2v_r/r$ 一项,于是(1.9)–(1.13)就可简化成

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (1.9)'$$

$$\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{1}{a}(v_r v_\theta - v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta) = -\frac{\partial p}{\rho a \partial \theta} + 2\omega \cos \theta v_\lambda + D_\theta \quad (1.10)'$$

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{1}{a}(v_r v_\lambda + v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta) = -\frac{\partial p}{\rho a \sin \theta \partial \lambda} - 2\omega \cos \theta v_\theta - 2\omega \sin \theta v_r + D_\lambda \quad (1.11)'$$

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{1}{a}(v_\theta^2 + v_\lambda^2) = -\frac{\partial p}{\rho \partial r} - g + 2\omega \sin \theta v_\lambda + D_r \quad (1.12)'$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.13)'$$

以后我们将使用(1.9)'–(1.13)', 不用(1.9)–(1.13).

§3 准静力平衡 等压面坐标

气象观测资料表明,气压沿高度的分布可以相当准确地用“静力平衡”关系来表示

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g \quad (1.14)$$

由此就得到所谓压力-高度公式

$$p(z) = p_s \exp \left\{ - \int_{z_s}^z \frac{g}{RT} dz \right\} \quad (1.15)$$

这里 z_s 是地表面的海拔高度, p_s 是地表面上的大气压力, $z=r-a$ 是观测点的高度, $\exp\{x\} \equiv e^x$.就是说,除气压梯度力而外,在(1.12)'中其余各项与重力相比在很高的精确度下可以忽略不计,就好像大气处于相对静止状态一样,重力和气压梯度力相平衡.理论上的分析也完全得到同样的结论(可参阅[1]).

以后在关于能量问题的讨论中将会明白,既然在(1.12)'中略去了 $2\omega \sin \theta v_\lambda$,则在(1.11)'中亦应略去相应的项 $-2\omega \sin \theta v_r$,否则不能满足科里奥利力不作功的原则.其实,即使从量级的分析中也可以发现,由于大规模的大气运动中垂直速度 v_r 比 v_θ 或 v_λ 要小二个数量级,除在赤道附近而外, $2\omega \sin \theta v_r$ 和 $2\omega \cos \theta v_\lambda$ 或 $2\omega \cos \theta v_\theta$ 相比完全可以忽略.此外,由于 v_r 很微小,在(1.10)'–(1.11)'中的 $v_r v_\theta$ 及 $v_r v_\lambda$ 项也可以忽略.进一步的分析还表明,由于大范围大气流场或即所谓“天气系统”的水平尺度比 a 要小得多,故除水平尺度特别大的运动而外, $a^{-1}v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta$ 及 $a^{-1}v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta$ 和 $a^{-1}v_\theta \partial v_\theta / \partial \theta$ 等项相比亦可忽略不计,不过为保持一般性,我们仍然保留这两项.

由(1.14)可见, p 是 r 的单调降函数,在任一点 (θ, λ) 上,在任一指定时刻 t , p 和 r 是一一对应的,故可用压力坐标 p 来代替 r ,即用所谓等压面坐标系 $(\theta, \lambda, p; t)$ 来代替原来坐标系 $(\theta, \lambda, r; t)$,这在研究气象问题中常常是很方便的.为区分起见,我们改记等压面坐标系为 $(\theta^*, \lambda^*, p; t^*)$,即新坐标是原坐标系的函数

$$t^* = t, \quad \theta^* = \theta, \quad \lambda^* = \lambda, \quad p = p(\theta, \lambda, r; t) \quad (1.16)$$

于是在新坐标系中个别微商 $\dot{F}$ 就是

$$\begin{aligned}
\dot{F} &\equiv \frac{dF}{dt} = \lim_{dt^* \rightarrow 0} \frac{1}{dt^*} \{F(\theta^* + \dot{\theta}^* dt^*, \lambda^* + \dot{\lambda}^* dt^*, p + \dot{p} dt^*; t^* + dt^*) - F(\theta^*, \lambda^*, p; t^*)\} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta}^* \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \dot{\lambda}^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) F \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) F
\end{aligned} \tag{1.17}$$

其中用了关系式

$$\dot{\theta}^* \equiv \frac{d\theta^*}{dt^*} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \quad \dot{\lambda}^* \equiv \frac{d\lambda^*}{dt^*} = \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}$$

反过来, 原坐标也可以表成新坐标的函数. 为了气象学问题的方便, 常用高度 $z = r - a$ 代替 r , 于是有

$$t = t^*, \quad \theta = \theta^*, \quad \lambda = \lambda^*, \quad z = r - a = z(\theta^*, \lambda^*, p; t^*) \tag{1.18}$$

当原坐标 z 按 (1.18) 用新坐标表示的时候, 代入 (1.16) 中最末一式中去, 就有恒等式

$$p = p(\theta, \lambda, z(\theta^*, \lambda^*, p; t^*) + a; t) \tag{1.19}$$

这里右边的第一个符号 p 是作为 $\theta, \lambda, z+a, t$ 的函数看待的. 将 (1.19) 作为新坐标的函数进行微商, 就有

$$1 = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial p} = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial z}{\partial p} \tag{1.20}$$

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} + \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial \theta^*} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial z}{\partial \theta^*} \tag{1.21}$$

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda^*} + \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial \lambda^*} = \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial z}{\partial \lambda^*} \tag{1.22}$$

这里位于小括号内的偏微商, 如 $(\partial p / \partial r)$ 等, 是指函数 p 对原坐标系的偏微商. 将 (1.14) 代入 (1.21), (1.22), 便可得到气压梯度力的水平分量是

$$P_\theta = -\frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial \phi}{a \partial \theta^*}, \quad P_\lambda = -\frac{1}{\rho a \sin \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) = -\frac{1}{a \sin \theta^*} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda^*} \tag{1.23}$$

其中

$$\phi = gz \tag{1.24}$$

就是等压面 $p =$ 常数的重力位势. 于是在新坐标系中运动方程的前二个便可写成

$$\frac{dv_\theta}{dt} - \frac{1}{a} v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta^* = -\frac{\partial \phi}{a \partial \theta^*} + 2\omega \cos \theta^* v_\lambda + D_\theta \tag{1.25}$$

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{1}{a} v_\lambda v_\theta \operatorname{ctg} \theta^* = -\frac{\partial \phi}{a \sin \theta^* \partial \lambda^*} - 2\omega \cos \theta^* v_\theta + D_\lambda \tag{1.26}$$

而第三个运动方程就退化为静力平衡方程 (1.14), 将 (1.14) 和 (1.20) 结合起来就可得到

$$RT = -p \frac{\partial \phi}{\partial p} \tag{1.27}$$

用 $\rho = -g^{-1} (\partial p / \partial r)$ 代入 (1.13)', 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) \right\} = 0, \tag{1.28}$$

按 (1.17) 则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right) + v_\theta \frac{\partial}{a\partial\theta}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right) + v_\lambda \frac{\partial}{a\sin\theta\partial\lambda}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right) + v_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dp}{dt}\right) - \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial p}{a\partial\theta}\right) - \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial p}{a\sin\theta\partial\lambda}\right) - \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\end{aligned}$$

但是

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta^*} + \left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) \frac{\partial}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda^*} + \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial p} \quad (1.29)$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dp}{dt}\right) &\equiv \left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}, \\ &- \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial p}{a\partial\theta}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v_\theta \sin\theta}{a\sin\theta\partial\theta}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\left[-\left(\frac{\partial p}{a\partial\theta}\right) \frac{\partial v_\theta}{\partial p} + \left(\frac{\partial v_\theta \sin\theta}{a\sin\theta\partial\theta}\right)\right] \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{\partial v_\theta \sin\theta^*}{a\sin\theta^*\partial\theta^*} - \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial p}{a\sin\theta\partial\lambda}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v_\lambda}{a\sin\theta\partial\lambda}\right) \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\left[-\left(\frac{\partial p}{a\sin\theta\partial\lambda}\right) \frac{\partial v_\lambda}{\partial p} + \left(\frac{\partial v_\lambda}{a\sin\theta\partial\lambda}\right)\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{\partial v_\lambda}{a\sin\theta^*\partial\lambda^*}\end{aligned}$$

代入 (1.28), 最后就将连续方程化为

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{1}{a\sin\theta^*} \left\{ \frac{\partial v_\theta \sin\theta^*}{\partial\theta^*} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda^*} \right\} = 0 \quad (1.30)$$

至于热力学第一定律, 此时以用 (1.6)' 为宜, 而且可保留原状, 即

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \dot{p} = \frac{dQ}{dt} \quad (1.31)$$

其中 T 还可通过 (1.27) 由 p 和 ϕ 表示出来.

方程 (1.25), (1.26), (1.27), (1.30), (1.31) 和关系式 (1.17) 就是在准静力平衡近似下在 $(\theta^*, \lambda^*, p; t^*)$ 坐标系中的基本方程式组. 这里 v_r 不再出现, 代替它的是 $\dot{p}$, $\dot{p}$ 和 v_r 的联系可通过 v_r 的定义给出, 再将静力平衡条件代入, 就有

$$\begin{aligned}v_r = \frac{dr}{dt} &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t^*} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial z}{\partial\theta^*} + \frac{v_\lambda}{a\sin\theta^*} \frac{\partial z}{\partial\lambda^*} + \dot{p} \frac{\partial z}{\partial p} \\ &= \frac{\partial z}{\partial t^*} + v_\theta \frac{\partial z}{a\partial\theta^*} + v_\lambda \frac{\partial z}{a\sin\theta^*\partial\lambda^*} - \frac{\dot{p}}{\rho g}\end{aligned} \quad (1.32)$$

在下一章中引入边界条件之后, 我们还可以进一步利用 (1.30) 建立 $\dot{p}$ 和 v_θ , v_λ 等的函数关系, 亦即静力平衡条件的引入便消去了一个独立的变量 v_r 或 $\dot{p}$.

以后我们仍记 θ^*, λ^*, t^* 为 θ, λ, t . 但要记住, 这里对 θ, λ, t 的偏微商是沿着等压面 p 来作的. 以后当有必要回复到原坐标系时, 其偏微商亦不再写到小括号内. 无论在新的还是旧的坐标系内, 偏微商项加不加小括号其意义都一样, 只要记住微商时是对新的还是旧的坐标系进行的就可以了.

§4 地形坐标 (一)

(θ, λ, p, t) 坐标系的一个缺点是地表面不是等压面, 提边界条件时常有不便之处. 特别是在有山脉起伏的地区, 地表面的水平气压梯度很大, 要把地表面近似地看作等高面

或等压面都是不容许的。为了准确地和方便地提边界条件起见，就应对原坐标系进行变换，使在新坐标系中起伏不平的地表面仍然是一个坐标等值面。这样的坐标系可以是 $(\theta, \lambda, z/z_s, t)$ ，其中 $z_s = z_s(\theta, \lambda)$ 是地表面的海拔高度，或叫地形函数；也可以用坐标系 $(\theta^*, \lambda^*, \pi, t^*)$

$$\theta^* = \theta, \lambda^* = \lambda, \pi = \pi(\zeta), t^* = t \quad (1.33)$$

其中 $\zeta = p/p_s$, $p_s = p(\theta, \lambda, z_s, t)$ 为地表气压；而 $\pi(\zeta)$ 表 ζ 的单调上升函数。我们称这样的坐标为地形坐标。这时地表面就是等 π 面。如进一步要求 $\pi(1) = 1$, $\pi(0) = 0$ ，则地表面就是 $\pi = 1$ ，而大气上界 $p = 0$ 就是 $\pi = 0$ 。

在坐标系 (1.33) 中有

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta}^* \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \dot{\lambda}^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \dot{\pi} \frac{\partial}{\partial \pi} \right) F \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \dot{\pi} \frac{\partial}{\partial \pi} \right) F \end{aligned} \quad (1.34)$$

且

$$\dot{\pi} = \frac{d\pi}{d\zeta} \dot{\zeta} = \pi' \frac{1}{p_s} (\dot{p} - \zeta \dot{p}_s) \quad (1.35)$$

其中 $\pi' \equiv d\pi/d\zeta$ 。又因 $p_s = p_s(\theta, \lambda, t) = p_s(\theta^*, \lambda^*, t^*)$ ，故有

$$\dot{p}_s = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta}^* \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \dot{\lambda}^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right) p_s = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + v_\theta \frac{\partial}{a \partial \theta^*} + v_\lambda \frac{\partial}{a \sin \theta^* \partial \lambda^*} \right) p_s \quad (1.36)$$

但要注意，这里的 v_θ, v_λ 为质点所在处而不是地表面处的速度分量。利用 (1.35)，还可以将 $\dot{p}$ 表成

$$\dot{p} = \zeta \dot{p}_s + \frac{p_s}{\pi'} \dot{\pi} = \zeta \dot{p}_s + p_s \dot{\zeta} \quad (1.37)$$

此外，对新坐标 $(\theta^*, \lambda^*, \pi; t^*)$ 及原坐标 $(\theta, \lambda, p; t)$ 的偏微商关系如下

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \right) = \left(\frac{\partial \pi}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\pi'}{p_s} \frac{\partial}{\partial \pi} \quad (1.38)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \left(\frac{\partial \pi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\partial}{\partial \theta^*} - \pi' \zeta \left(\frac{\partial \ln p_s}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\partial}{\partial \theta^*} - \pi' \zeta \frac{\partial \ln p_s}{\partial \theta^*} \frac{\partial}{\partial \pi} \quad (1.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \left(\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \pi' \zeta \frac{\partial \ln p_s}{\partial \lambda^*} \frac{\partial}{\partial \pi} \quad (1.40)$$

这里要注意的是，求偏微商 $(\partial \pi / \partial \theta)$ 及 $(\partial \pi / \partial \lambda)$ 时 p 是不变的，故有

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial \theta} \right) = \pi' \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) = \pi' p \left(\frac{\partial p_s^{-1}}{\partial \theta} \right) = -\pi' \zeta \left(\frac{\partial \ln p_s}{\partial \theta} \right)$$

且因 p_s 不依赖于 p 及 π ，故又有 $(\partial \ln p_s / \partial \theta) = \partial \ln p_s / \partial \theta^*$ 等等。

由 (1.38) 得到

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = \frac{\pi'}{p_s} \frac{\partial \phi}{\partial \pi}$$

我们仍应用静力平衡近似，代入 (1.27)，就有

$$RT = -\pi' \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \pi} \quad (1.41)$$

或者

$$RT = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \ln p} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial \ln \zeta} \quad (1.41)'$$