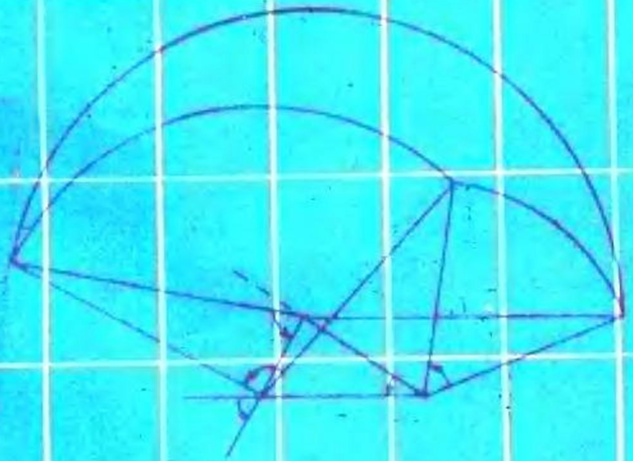
平面几何解题指导

——平移、旋转法解几何题

费林北　柴夏芬　编著



同济大学出版社

平面几何解题指导

——平移、旋转法解几何题

费林北
柴夏芬 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了平面几何图形平移、旋转等基本理论和技能。立足于当前平面几何的教学，充实平面几何思维训练。本书内容丰富，选材合理，坡度平缓，例题精粹，分析清晰，可作为初中学生学习平面几何的辅助读物，亦可作为平面几何教师的数学参考书。

责任编辑 许纪森

封面设计 王肖生

平面几何解题指导

费林北 柴夏芬 编著

同济大学出版社

（上海四平路 1239 号）

新华书店上海发行所发行

青浦任屯印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张 10.375 字数，249 千字

1990年11月第一版 1990年11月第一次印刷

印数，1——5000 定价：3.85元

ISBN 7-5608-0603-O/O.66

前　　言

平面几何的问题千变万化，用怎样的思维方法来指导解题历来是人们探索的一大课题。从解题实践中知，以图形运动、变化、发展的观点来指导解题，具有普遍性，并且是基本的思维方法

在中学几何里，体现图形运动、变化、发展的是图形的初等变换。尤其是其中的合同变换。现行平面几何教材，如果用图形变换的观点来指导，将会取得良好的效果。然而现教材缺少这方面的基本理论和思维方法。人们从长期的教学实践中体会到，充实和加强几何变换思想是必要的、可行的。它是中学几何教学改革的一个重要方面。正是这一原因，谨向读者奉献这本以图形平移、旋转为内容的解题指导书。这可谓笔者立书之动机吧。

几何的合同变换，即指把一个图形迁移到与自己全等的图形上去的那种变换。合同变换分为翻折变换、平移变换和旋转变换。平移变换是指图形上任意两点的距离及过两点的直线的方向保持不变的合同变换。旋转变换是指对应图形上对应点对另一定点保持等距离，且对该定点张定角的合同变换。本书专门介绍利用平移、旋转变换解几何题的规律和经验。

书中用典型例题给出示范性的解答。从中总结、归纳出一般问题解题的规律和方法。这对开拓思维、提高解题能力会有裨益。本书可作为中学生、知识青年的课外、业余的读物。也可作为中学数学教师教学参考资料。限于笔者水平，难免有不妥、错误

之处，恳请指正。徐嘉兴同志在本书的审定上，给予了很大帮助，谨致谢意。

编　　者

1990　9月

目　录

第一章　图形的平移、旋转及其基本理论

世界上一切事物都在运动。如人在街上行走，河水在江河中流动，轮子绕轴转动，人造卫星在天空中运行等等。什么是运动呢？一个物体对于其他物体的相对位置的变化，叫做运动(又叫做机械运动)。任何复杂的运动都可看作是由最简单、最基本的平动和转动组成。物体的运动反映在几何学上，就是几何图形的运动。物体平动在几何学上对应的即是图形平移，物体转动在几何学上对应的转动即是图形旋转。

几何图形的平移和旋转乃是几何学中的变换，而且还是最常见、最基本的变换。变换观点在现代数学中占有相当重要的地位。恰当地应用变换的观点和方法研究几何问题，将会对整个几何学带来深刻的影响，并在几何教学中开拓一个思维的新天地。

§1　以运动的观点看几何学

几何学是研究几何图形的形状、大小和相互位置关系的一门科学。一切物体必然具有各种各样的属性，如颜色、重量、硬度、形状、大小、相互位置关系等等。当我们仅考察物体的形状、大小和相互位置关系，而不顾及其他的属性，这就从物体抽象出了几何图形。故几何图形完全是从客观世界的物体中，对其属性加以取舍，经过比较，概括出来的。

事物都是运动、变化、发展的。乍看起来，几何图形很难与“运动”这一名相词联系，事实又是怎样呢？任何一个具体的几何图形，如$\triangle ABC$，它是某一三角形形状的物体在运动的长过程中，在某一瞬时所留下的形态和相对位置。它不过是运动物体

相对静止的反映。几何图形中的点是运动物体的确定位置的反映；线是点连续运动的形态的反映；面是线连续运动的形态的反映。面的运动才构成几何体(简称为体)。

几何学所研究的主要对象是圆形的性质及其位置关系。研究的结果归结为几何命题。几何命题由假设和结论两部分组成。假设是命题的已知条件，结论是由已知条件引出的几何事实。对命题进行判断的主要工作是从假设推导出结论。这是一个逻辑推理过程。逻辑推理首先要有逻辑联系，而一切逻辑联系从根本上讲，都是从客观事物的运动、变化、发展中总结出来的。探讨几何命题，只有在图形的运动过程中才能找到满意的解答。静止的观点，将会把问题引向死胡同。

可以毫不夸大地说，全部几何学以及研究几何学的科学方法都是建立在“运动”这一基本观点之上，这是合乎科学的论断。

§2 图形的平移、旋转

为了对图形的平移、旋转有一个全面的认识，先对合同图形和合同变换给出定义。

定义 1-1 如果图形 F 上的点与图形 F' 上的点之间存在一一对应关系，并且F上任意两点间的距离与 F' 上两对应点间的距离保持相等，那么这两图形叫做合同图形。合同图形通常称为全等图形。

如图 1-1-1 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是两合同图形，因为 $\triangle ABC$ 上的点与 $\triangle A_1B_1C_1$ 上的点构成一一对应关系，并且 $\triangle ABC$ 上任意两点间的距离与 $\triangle A_1B_1C_1$ 上两对应点间的距离相等。又如 $\triangle ABC$与 $\triangle A_2B_2C_2$ 也是两合同图形，因为它们之间也完全满足合同图形的条件。

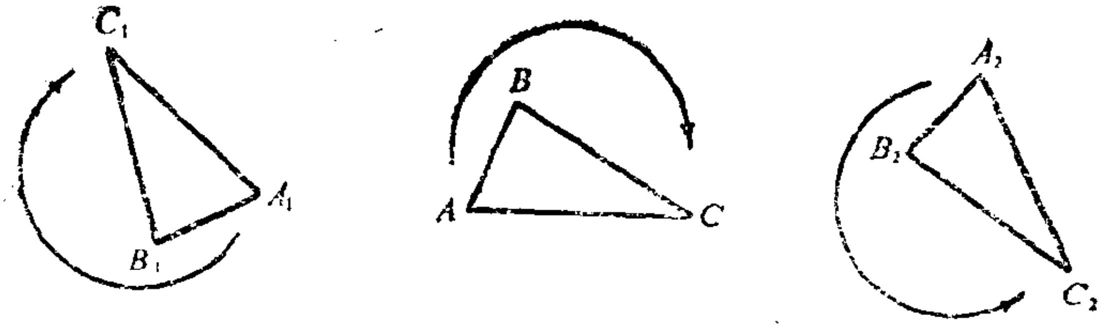


图1-1-1

从图1-1-1可以看出，两个合同图形的位置有两种不同的情况。一种对应点按相同方向排列（同时顺时针方向或同时逆时针方向），这时两图形叫做真正合同图形。如$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$是真正合同图形。另一种是对应点按不向方向排列（一图形是顺时针方向，另一图形是逆时针方向）这时两图形叫做镜照合同图形。如$\triangle ABC$与$\triangle A_2B_2C_2$是镜照合同图形。

由于合同图形的点与点之间存在一一对应关系，任意两对应点之间的距离保持相等，因此可以从作局部对应图形入手，来完成整个合同图形的作图。

问题 （1）求作已知图形Φ的合同图形Φ'；（2）已知图形Φ。P'、Q'是Φ的合同图形Φ'上的两对应点，求作Φ'。

对于（1），不妨设已知图形Φ为多边形$ABCDEF$如图1-1-2甲。先作任意一边DC的对应边$C'D'$，接着作出$\triangle E'C'D'$使$\triangle E'C'D'\cong\triangle ECD$。图1-1-2乙中的$\triangle E'C'D'$为$\triangle ECD$的真正合同图形，图1-1-2丙中的$\triangle E'C'D'$为$\triangle ECD$的镜照合同图形。

再作$\triangle B'C'E'$，使$\triangle B'C'E'\cong\triangle BCE$。照此继续下去作图，直到作出整个合同图形$A'B'C'D'E'F'$。图1-1-2乙中的多边形$A'B'C'D'E'F'$是$ABCDEF$的真正合同图形，图1-1-2丙中的多边形$A'B'C'D'E'F'$是$ABCDEF$的镜照合同图形。

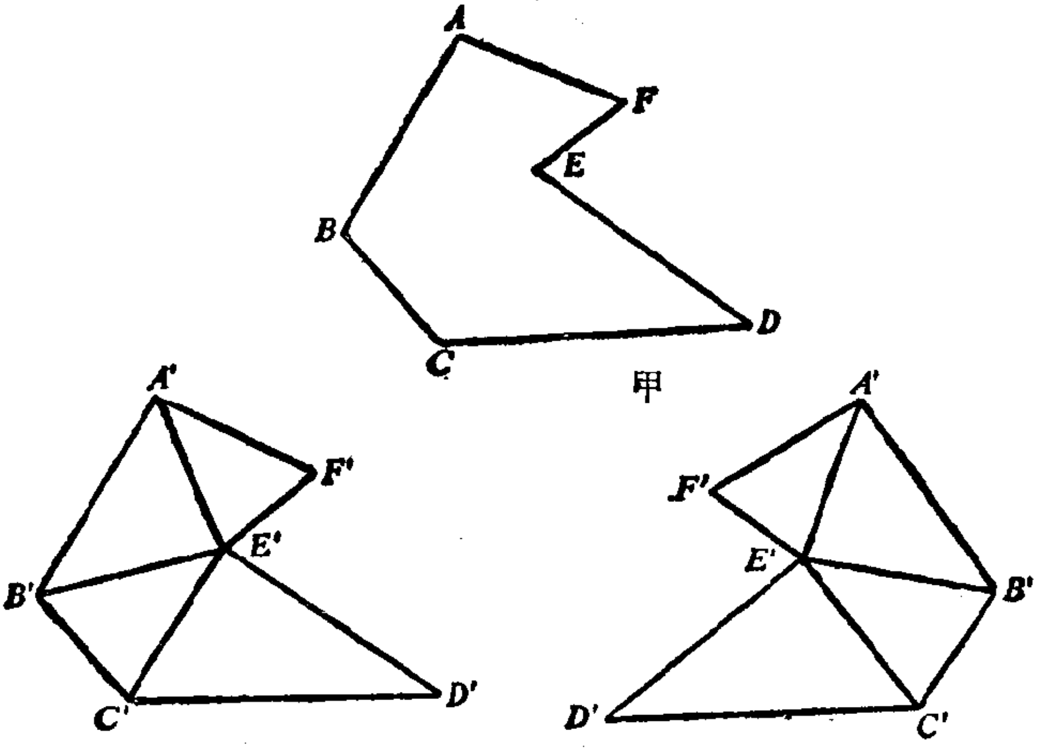


图 1-1-2

乙 丙

对于（2），不妨设已知图形 Φ 为多边形 $ABCDEF$，如图 1-1-3 甲。P'、Q' 为合同图形 Φ' 上的两对应点，连 $P'Q'$。

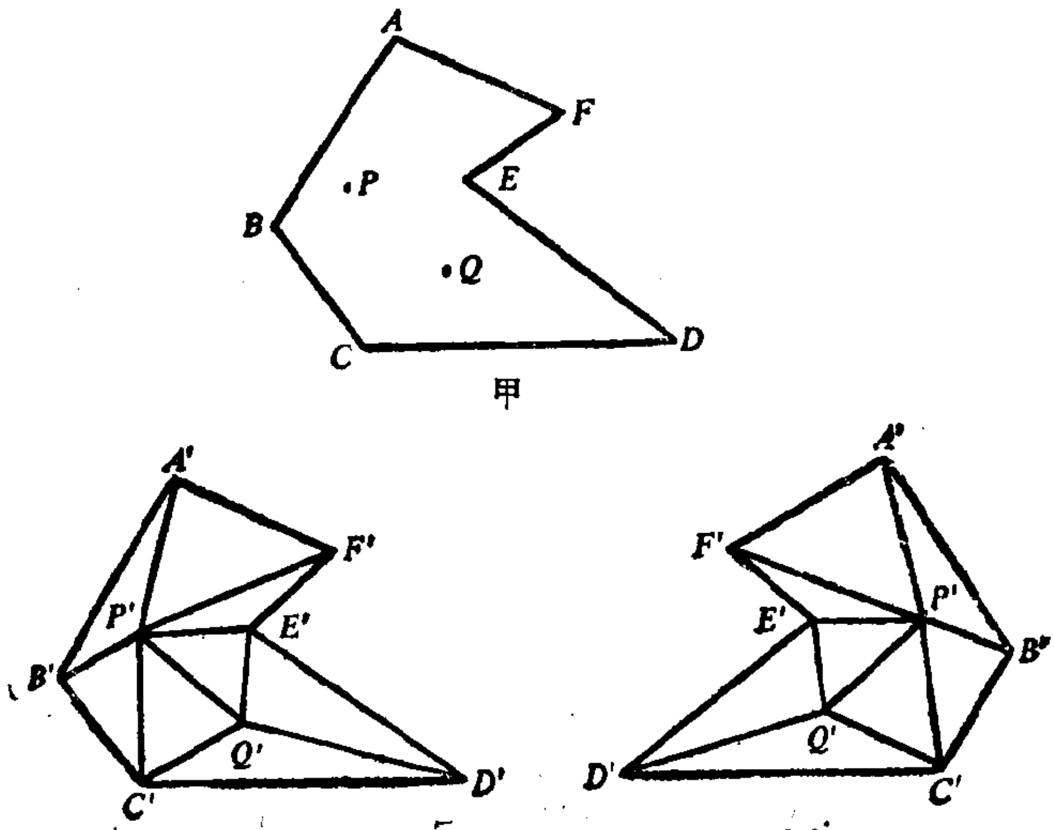


图 1-1-3

乙 丙

先作以 $P'Q'$ 为一边与 $\triangle EPQ$ 对应的 $\triangle E'P'Q'$，图 1-1-3 乙中的 $\triangle E'P'Q'$ 为 $\triangle EPQ$ 的真正合同图形，图 1-1-3 丙中的 $\triangle E'P'Q'$ 为 $\triangle EPQ$ 的镜照合同图形。再以 $\triangle E'P'Q'$ 为基础，逐步扩展对应的三角形，它们为 $\triangle C'P'Q'$、$\triangle B'C'P'$、$\triangle A'B'P'$、$\triangle A'F'P'$、$\triangle E'F'P'$、$\triangle C'D'Q'$、$\triangle D'E'Q'$，直到作出整个合同图形 $A'B'C'D'E'F'$。图 1-1-3 乙、丙分别为 $ABCDEF$ 的真正合同图形和镜照合同图形。

中学几何的曲线图形主要是圆。求作定 $\odot O$ 的合同图形并不难。只要取任一点 O' 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径作圆，则 $\odot O'$ 是 $\odot O$ 的合同图形。

判别两个合同图形是真正合同图形还是镜照合同图形，可从局部对应图形来进行。设图形 F 和 F' 互为合同图形，$\triangle EPQ$ 和 $\triangle E'P'Q'$ 分别是 F 和 F' 上的任意两对应三角形，仍用图 1-1-3。显然当 $\triangle EPQ$ 和 $\triangle E'P'Q'$ 是真正合同图形或镜照合同图形时，则 F 和 F' 便是真正合同图形或镜照合同图形。

定义 1-2 如果图形 F 经过某种变换成为图形 F'，且 F' 是 F 的合同图形，称此变换为合同变换（或称移置）。

合同变换即是把一个图形 F 变为与它全等的图形 F' 上的那种几何变换。显然 F 到 F' 是一个合同变换，那么 F' 到 F 也可构成一个合同变换。故合同变换的逆变换也是合同变换。

由于合同图形有真正合同图形与镜照合同图形之分，因此合同变换也有真正合同图形的变换与镜照合同图形的变换之别。

定义 1-3 如果图形 F 与 F' 是真正合同图形，那么由 F 至 F' 的变换叫做真正的合同图形的变换，简称真正合同变换；如果它们是镜照合同图形，那么就叫做镜照合同图形的变换，简

称镜照合同变换。

不难理解，一个图形 F 不论经过多少次连续的真正合同变换所得的图形 F'，与 F 仍为真正合同图形。

如图 1-1-4，$\triangle ABC$ 经过连续两次与三次真正合同变换，所得的 $\triangle A_2B_2C_2$ 和 $\triangle A_3B_3C_3$ 均与 $\triangle ABC$ 成为真正合同图形。

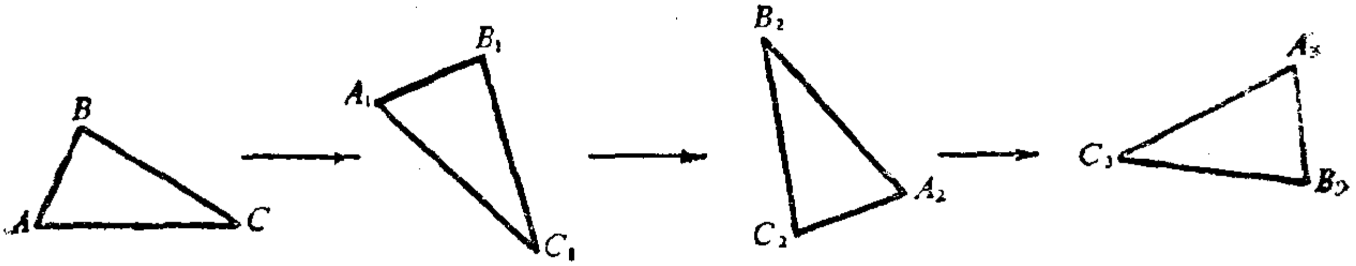


图 1-1-4

一个图形 F 经过一次或连续多次的镜照合同变换所得的图形 F'，或是真正合同图形，或是镜照合同图形。

如图 1-1-5 $\triangle ABC$ 经过连续两次与三次镜照合同变换，所得的 $\triangle A_2B_2C_2$ 和 $\triangle A_3B_3C_3$ 分别与 $\triangle ABC$ 成为真正合同图形和镜照合同图形。显然，凡经过奇数次连续的镜照合同变换，F' 与 F 是镜照合同图形；经过偶数次连续的真正合同变换，F' 与 F 是镜照合同图形。

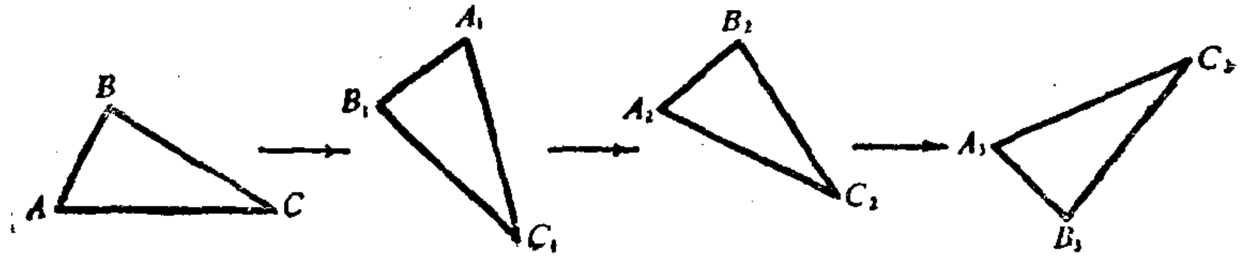


图 1-1-5

从真正合同变换定义可知，它有两种不同的形式。一种是平移变换，一种是旋转变换。镜照合同变换仅有一种轴对称变

换，也可形象地称它为线翻折变换。本书专门介绍平移变换和旋转变换。但要研究这两种变换之间的关系，势必要涉及轴对称变换。

定义 1-4 如果图形 F 合同变换到图形 F'，F 上任一点到 F' 上的对应点的距离为定值，且方向相同，称这种合同变换叫做平移变换，简称平行移动或平移。其中移动的方向叫做平移方向，移动的距离叫做平移距离。

如图 1-1-6，$\triangle ABC$ 变换到 $\triangle A'B'C'$ 是一个平移。因为 $\triangle ABC$ 上任一点到 $\triangle A'B'C'$ 上的对应点的距离等于定线段 l 的长，方向与 l 相同。这里 l 的方向即平移方向，l 的长即平移距离。

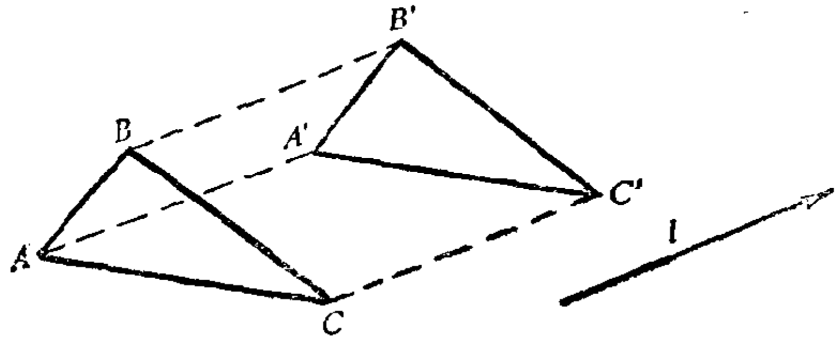


图 1-1-6

一般地，判别一个合同变换是否平移，一要看对应点之间是否保持等距，二要看引向对应点的方向是否相同。因此，“等距”和“定向”是决定平移的两个要素。顾名思义，在一个平面内，把图形 F 沿着某一定向线段 l 移动到 F'，这是一平移。

有时为了便于书写，常把平移简记为 $F\xrightarrow{(l)}F'$或$F\xrightarrow{(AA')}F'$。F' 称为 F 平移 l 或 AA' 的像，F 称为 F' 的原像。

定义 1-5 如果是图形 F 合同变换为图形 F'，F 上任一点和它在 F' 上的对应点与一定点的距离相等。且该定点与任一双对应点所张的角为定角，方向相同，那么这种合同变换叫做

旋转变换，简称旋转。其中定点叫做旋转中心，定角叫做旋转角。

如图 1-1-7，$\triangle ABC$ 变换到 $\triangle A'B'C'$ 是一旋转。因为 $\triangle ABC$ 上任一点和它的对应点与定点 O 的距离相等，且 O 与任一双对应点所张的角为定角φ，方向都是逆时针方向。

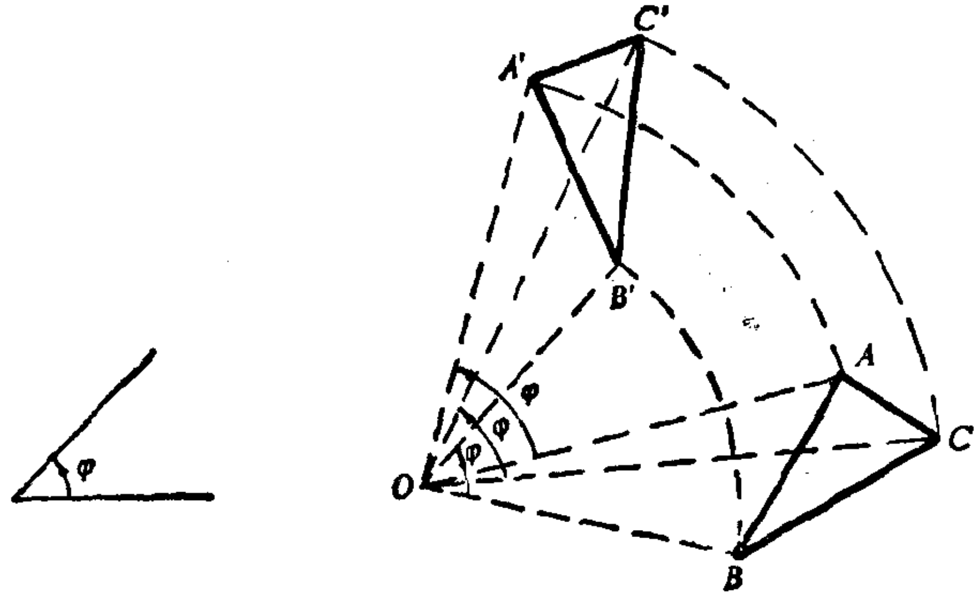


图 1-1-7

一般地，判别一个合同变换是否旋转，一要看是否存在一定点，对应点到这一定点等距，二要看每双对应点对这一定点是否张一定角。因此，“等距”和“定角”(包括方向）是决定旋转的两个要素。顾名思义，在一个平面内，把图形 F 绕着一定点 O 旋转到 F'，这是一旋转。

旋转简记为 $F\xrightarrow{(0,\angle\psi)}F'$。$F'$ 称为 F 旋转$(0,\angle\psi)$的像，F 称为 F' 的原像。

旋转角等于 180° 的旋转是一种特殊的旋转。这时求一点 A 绕 O 点旋转 180° 的对应点 A'，可由连结 AO 并延长至 A'，使 $A'O=AO$ 来得到。点A'又称为点A关于点 O 的中心对称点。若把点 A 改为图形 F，点 A' 改为图形 F'，那么F'称为 F

关于点 O 的中心对称图形。

旋转角等于 $180°$ 的旋转已构成一种独特的合同变换，称这种变换为中心对称变换，又称为点反射。也可形象地称它为点翻折变换。本书后在面讨论用旋转法解几何题时，把这种情况除外。

图形的平移和旋转是物体的平动和转动在几何学上的反映。物体的运动往往比较复杂，并非单一的平动或转动。然而各种复杂的物体运动，一般总可分解为平动和转动这两种简单的运动。于是在几何图形的运动上相应有类似的情况。

如图 1-1-8 中的 $\odot O$ 在直线 l 上滚动，半径 OT 是开始位置。当 $\odot O$ 滚动到 $\odot O_1$ 位置，OT 已变换到 O_1T_1 的位置。显然 OT 运动到 O_1T_1 是经过许许多多的瞬时间的复合变换的结果。而每一瞬时的复合变换可分解为一个平移和一个旋转。就 OT 变换到 O_1T_1 作为一瞬时变换来分解。即可看作是先把 OT 平移到 O_1T' 再把 OT' 旋转到 O_1T_1 的结果。

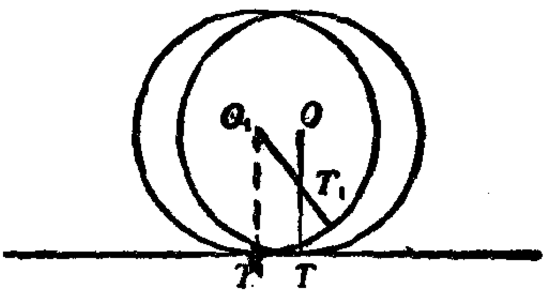


图 1-1-8

§3 平移与旋转的关系

平移和旋转是两种不同的合同变换，然而它们之间却有内在的联系。现用轴对称变换的知识对它们作一剖析。

定理 1 如果图形 F 到图形 F' 是一个平移，则存在轴对称变换（见下“注”），经过连续两次变换可使 F 变换到 F'。其中两

对称轴 l_1 和 l_2 与平移方向垂直，一轴的位置可以任意选定，而另一轴则对前一轴的距离等于对应点连线的一半。

注：如果图形 F 和 F' 关于直线 l 对称，那么 F 变换到 F' 叫做轴对称变换。又称直线反射，简称反射。轴对称变换形象地说即是线翻折变换。

证明 欲使图形 F 变换到 F'，我们只要使 F 中任意一点 A 变换到 F' 中相对应的点 A' 上去就可以了。

于是我们来研究任意一对对应点的变换规律。

设 A 是 F 上任意一点，A' 是 A 沿 t 平移所至。作任意直线 l_1，使 $l_1 \perp AA'$。如图 1-1-9。

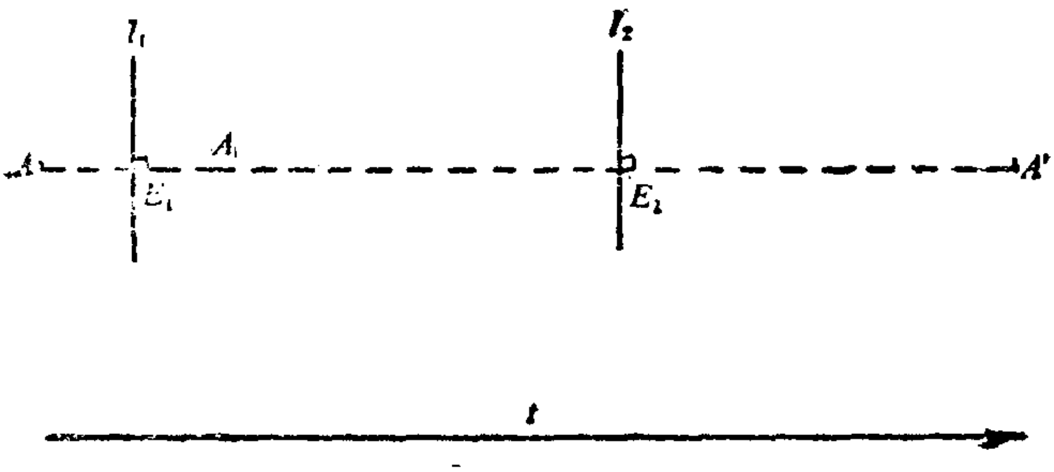


图 1-1-9

把 A 点沿 l_1 翻折到 A_1，那么 A_1 必定在 AA' 上。

作直线 $l_2 /\!/ l_1$，使 l_2 与 l_1 相距为 AA' 的一半，即 $\frac{1}{2}t$。则 $l_2 \perp AA'$。

于是

$$A_1E_2 = E_1E_2 - E_1A_1 = E_1E_2 - AE_1 = \frac{1}{2}AA' - AE_1。$$

而 $E_2A' = AA' - AE_1 - E_1E_2 = AA' - AE_1 - \frac{1}{2}AA'$

$$= \frac{1}{2}AA' - AE_1,$$

$\therefore$ $A_1E_2 = E_2A'$。

又知 $l_2 \perp A_1A'$，故点 A_1 沿 l_2 翻折过来，落在 A' 位置。这就是说，F 对于 l_1 和 l_2 经过两次轴对称变换落到了 F' 位置。

定理 2 如果 F 到 F' 是一个旋转，经过连续两次的轴对称变换，可使 F 变换到 F'。两对称轴 l_1 和 l_2 通过旋转中心，一轴的位置可以任意选定，而另一轴则与前一轴的夹角等于旋转角的一半（方向相同）。

证明 与定理 1 的思维相同，只要研究 F 和 F' 的任意一对对应点的变换规律即行。

设 A 是 F 上任意一点，A' 是 A 绕旋转中心 O 按逆时针方向旋转 $\angle\varphi$ 所至，如图 1-1-10。

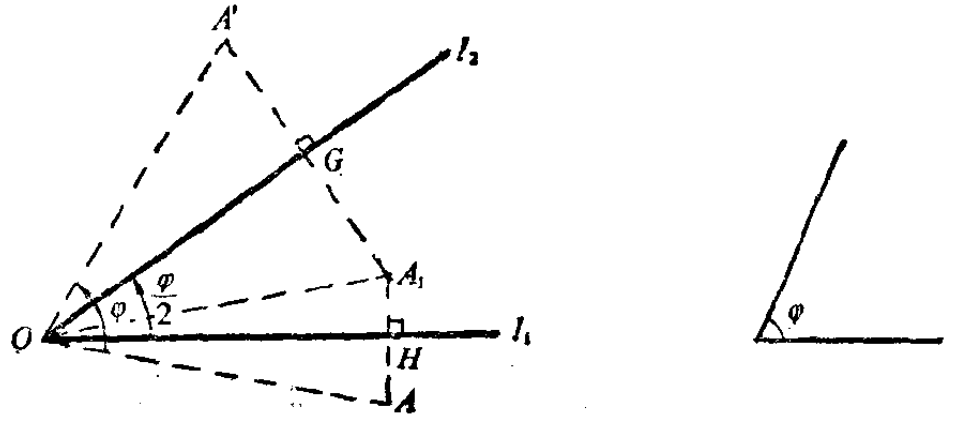


图 1-1-10

过 O 点作任意直线 l_1，把 A 点沿 l_1 翻折到 A_1。那么

$$A'O = AO = A_1O。$$

而 $\angle HOA_1 = \angle HOA$，