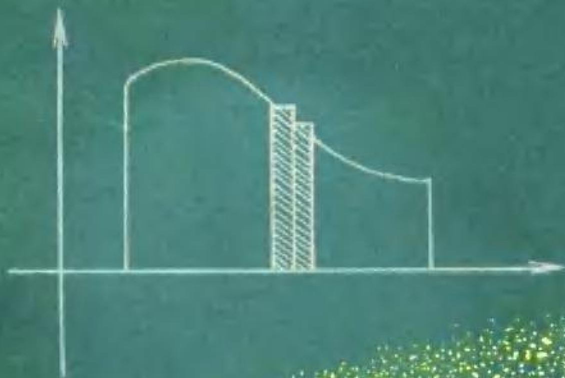
直说微积分

（是何物？有何用？）

项武义编著



复旦大学出版社

直说微积分

（是何物？有何用？）

项武义　编著

复旦大学出版社

直 说 微 积 分

（是何物？有何用？）

复旦大学出版社出版

新华书店上海发行所发行

宝山县蔡家弄印刷厂印刷

字数134千　开本850×1168　1/32　印张4.75

1986年5月第一版　　1986年5月第一次印刷

印数：1—10,000

书号：13253·040　　　定价：0.95元（平）

1.15元（软精）

内 容 提 要

本书从实数系出发，深入浅出地阐述了微积分的基本概念和基本方法，同时还介绍了这一学科的基础理论及其典型应用。全书讲解通俗，说理清晰，向读者直说微积分"是何物？有何用？"本书不但可供初学微积分的读者阅读，而且也可作为大中学校微积分教学的参考书。

自 序

开宗明义，试写这本小册子的目的，就是希望能够用朴实的说法，简明扼要地为读者解释明白“微积分”这门数学究竟“是何物？有何用？”概括地说，微积分就是变量数学，它是对于千变万化的变动事物进行数理分析的基础理论和基本工具。因为微分运算和积分运算就是变量数学中的两种基本算法，而且两者又具有密切的关联，所以通常也就把这门课程叫做微积分。它是近代大学课程中一门几乎人人必学的数学；但是它也往往是一个叫许多初学者头痛、甚至于害怕的“难关”。这实在是数学教学上一种极不理想的现象，也是应当想方设法加以解决的重大问题。试写这样一本简短的微积分参考书，所希望的也就是给初学微积分的读者提供一种朴实精简而又直截了当的入门途径。本质上，本书以认识论为着眼点，引导一个初学微积分的读者，逐步渐进地对微积分这门基本学问作一次探源、奠基的工作。换句话说，本书要和读者共同探讨微积分的来龙去脉(套用一个生物学名词，也就是微积分的进化历程)和治学方法。因此，读者在阅读本书时，应该有一个基本认识，那就是微积分并不是一本难念的“经”，它是经过实事求是的研讨和逐步渐进地总结而得出的一个知识体系。本书所要求于读者的，并不是虔诚被动的苦读者，而是多问肯想的主动求知者！

从整个数学的进化历史来看，大体上是先有几何学和代数学。几何学起源于对常用常见的各种形、体的研究分析，进而对空间的本质和基本性质进行的系统探讨。远在二三千年前，古希腊的几何学家就在这方面的研究中获得了辉煌的成就，成功地建立起 个初步完整的知识体系，这就是通常所说的欧氏几何学。代数学则起源于数量的计算和运算，换句话说，也就是加、减、乘、除这些常用的四则运算以及各

种各样能用四则运算加以表达的“代数方程”的求解。代数学的起步阶段大约是在我国的宋元时代和西方的中古时期，所以比起几何学的发展至少晚了一千多年。十六世纪是代数学在欧洲蓬勃发展的时期。接着，在十七世纪初产生了把形和数密切结合起来研究的解析几何学。有了解析几何学作基础，进而发展成微积分学，可以说是水到渠成、顺理成章地更上一层楼。由上面这一小段对基础数学演进的简述，可以看出微积分学的根据也就是中学数学课程中的几何、代数和解析几何。粗略地说，中学所学的几何、代数和解析几何大体上可称为“定量数学”，而微积分则是以前述定量数学为基础而建立起来的“变量数学”。从定量数学演进到变量数学，虽然是一种必然的、自然的演进，但是在概念上和方法论上都需要有相当大幅度的跃进。因此，在微积分的初学阶段，的确是有其本质上的种种难点的。本书所致力的探源奠基工作，其实也就是为读者计划好顺理成章的起跑线，安放好逐步渐进的起跳板。当然，要实现这个从定量数学到变量数学的跃进，最主要的动能应来自读者锲而不舍的求知精神。

本书章节的大体安排如下：全书总共是简短的五章。第一章介绍变量数学的基本概念，而其中最最基本者莫过于那个用来表达种种“变量”的数系——实数系。本书第一章第一节所讨论的就是实数系的来龙去脉。我们将以长度的度量为例，详细地剖析古希腊几何学在度量问题上的转折与成就。这是几何学的基础理论中很基本而且也是很深刻的要点，所以读者在此千万不可掉以轻心；这实在是一个值得耐心细想、多读多推敲的探源奠基的关键所在！此外，在变量数学的研讨中，我们用变数符号来表示种种变量，用函数关系来描述一个变动事物中所含种种变量之间的相互关联。由此可见，函数乃是变量数学研究的中心课题，因此，关于函数的基本性质，就是变量数学需要研究的要点。这也就是本书第二章向读者介绍的内容。我们采用多举实例的办法，逐步渐进地剖析函数的几个基本性质，如单调性、极值、连续性、变率、求和等等。总之，第一章和第二章所讨论的就是微积分学概念上的探源和奠基。

在第三章中，我们开始介绍微积分学中贯穿全局的基本方法——逼近法和极限概念。它是整个分析学用来以简御繁、以已知事物进而探讨未知事物的根本大法，其基本想法是相当自然、十分简朴的。远在两千多年前，古希腊的几何学家欧都克斯就已成功地运用这种逼近法，克服了由于不可公度量的存在而在几何基础论中引起的困扰。逼近、极限和实数的连续性是三个密切相关的概念，而其要点在于它们的用法！所以读者要在运用这些概念的过程中，逐步分析、体会它们的用场和精要。当然，因为逼近法中所涉及的极限过程是一个无穷的步骤，所以在概念上和本质上的确有它的精微之处。因此，对于这种基本方法的学习和理解当然也是逐步渐进的，是有层次的。大体上来说，对于一个初学者，先要掌握其基本的想法，然后再从简明的实例，从种种简单而又基本的用法中明确其要点所在；至于它的运用之妙，用场之广泛与多样，则当然只有在往后的众多应用中逐步逐样去体会了。

总之，本书前三章讨论的是微积分的基本概念与基本方法。有了它们之后，再进而在第四章建立微积分的基础理论；第五章介绍某些典型的计算与应用，则是顺理成章、水到渠成的事了。但是限于篇幅，并考虑到本书在本质上只是一本参考用的小册子，所讨论的内容当然只限于微积分精简扼要的一小部分。本书只是为读者学习微积分学提供某种形式的启蒙罢了。作者希望本书能有助于读者克服微积分学“入门难”这个难关。

最后，作者谨以此书献给全中国的青年，并祝愿他们能通过微积分的学习，成长为善用数理分析去认识问题解决问题的能手，为我国的现代化多作贡献。

前　言

在近代的大学课程中，“微积分”可以说是一门几乎人人必学的数学课程，可是它却又偏偏叫许多初学者深感头痛，往往苦读了大半年还是莫名“微积分”之妙。其实，对于每个微积分的初学者，很自然地一开头就会有个老大的疑问，那就是：

“微积分这门学科究竟讨论些什么？学会微积分又究竟有些什么用场？”

象上面这种直接影响一个初学者学习心理状态的根本性问题，当然应该开宗明义、直截了当地给他们交待清楚，使微积分初学者一开始就能胸中有数，明确学习的目的性，这也是本书希望为读者所做的事。我们将试着采取返朴归真的论点，简明扼要地直说微积分究竟“是何物？有何用？”

在现实世界中的万物万象，绝大部分都是动态的，经常在相互作用，演变不休。例如我们所在的地球，虽然我们因为习以为常并不觉得它在动，其实它天天都在自转着，年年绕着太阳运行不休。另一方面，这样千变万化的宇宙万物，却又并非是杂乱无章的；在许多事物的表象上的多样性和复杂性的背后，常常蕴含着简洁的内在规则性。例如在中学理化课程中学到的“气体定律”，就明确地指出一个定量气体的压力、温度和体积这三种变量之间的内在关联；在中学的三角学中所学到的正弦定理和余弦定理，描述了一个任意三角形的三边和三角之间的基本函数关系。当然，也还有许许多多繁复多变的体系，人类对它们内在规律的理解依然是十分粗浅的。例如，气候的变幻莫测就是一个实例，我国有个惯用的比喻：“天有不测风云！”其实，归根结底，这句话仅

仅反映着某一时期内气象学的水平，对于地球上整个大气层这个复杂多变的体系的内在规律，我们掌握的知识离有效预测的境界还相去甚远。总之，我们迫切地需要有一套足以研究动态的宇宙万物，能够有效地对相互作用和演变不休的事物进行数量分析的数学体系，这就是微积分！总括起来说，微积分就是**变量数学**，它的用场就是为便于对种种事物进行数量的分析而提供切实好用的数学工具和基础理论。

也许读者接着会问：为什么不把它就叫做变量数学，却又偏偏采用“微积分”这样一个古怪的名称呢？也许还有许多爱好打破砂锅问到底的读者，除了上述名称问题之外，另有一大串实质性问题，例如：

(i) 微积分这门学问是如何演变而来的？

(ii) 微积分的基本概念是些什么？它们的直观背景又是些什么？

(iii) 微积分有哪些基本方法？这些方法如何用？

(iv) 微积分的基础理论和整体结构是否能够简明扼要地加以概括呢？

其实，要真正交待明白微积分究竟“是何物？有何用？”那就不能不对上述这些基本问题作某种程度的明确解说。大致上，本书各章要和读者讨论的课题，就是对上面这几个本质性问题，提供朴实精简的初步解答。我们希望读者在学习微积分的起步时刻，就能先有一个清晰的概念，也许因此在往后攻读或应用微积分时，会少几分陌生感而多几分自在感。这也是作者试写这本小册子的心意。

目　录

第一章　数、变数与函数

一般来说，常见的量可以归成两种类型。一类量如一群人、一群牛羊、一框鸡蛋等等，它们的共同特征是：都具有天然的个别单元，对于这种量的处理方法是“计数”它们的个数，我们可以把它们叫做是“个数型”的量。用来研究个数型数量问题的数学体系就是自然数系。另一类的量如长度、重量、温度、压力等等，它们的共同特征是：都可以无限细分，所以当然不可能有天然(也即不可再分)的单元。通常处理这一类量的办法是“度量”，因此，我们也可以把它们叫做“度量型”的量；其相应的数学体系就是我们下面所要讨论的实数系。换句话说，实数系是将度量型的各种量的通性抽象化和组织化而得出的数系；它是用来表达、计算和研究这一类型的量的数学工具。

另外，一个变动的事物中往往包含着好几种量，它们的数量随着该事物的变动而改变，可以统称为“变量”，而这些变量之间，又往往具有相互关联的属性(也就是该事物的内在结构与规则性在数量上的表现)。当我们从数量分析上来研究某一变动事物或体系时，我们采用“变数符号”来表达它的种种变量；运用“函数关系”去表达其中的变量之间的相互关联。总之，数、变数与函数是研究变量问题的基本概念，因此也就是本书第一章所要探讨的课题。

第一节　实数与度量

从概念上或实践上来看“度量”，就不象“计数个数”那样初等、那样

简单了。本书将以长度为例，从概念上分析度量和实数系。概括地说，关于直线段长度的度量，主要有下述两个步骤：首先是选定一个单位长，例如尺、公尺、英尺等等都是常用长度的“选定单位长”；其次则是要去确定一个“待量的”直线段和选定的单位长之间在长度上的“比值”。从概念上来看，第一步在本质上可以任意选一个单位长，所以是不成问题的。但是第二步中，两个直线段在长度上的“比值”这个概念，可就得下些功夫分析了。其实，远在古希腊时代（公元前五、四世纪），希腊的几何学家们就注意到这个“比值”概念的基本重要性，而且发现其中大有文章！直到今日，再来回顾两三千年前希腊几何学这一段关键性的演进历程，依然是发人深思、耐人寻味的，现择其精要，简述如下：

古希腊的几何学家们，在分析长度的度量这个基本概念时，首先提出下述“可公度的”这样一个自然的概念：

定义 设有两条直线段 a 和 b，若存在着另一直线段 c 使得 a,b 都恰好是 c 的整数倍，例如 $a=m\cdot c$，$b=n\cdot c$，则称 a 和 b 是可公度的，而这样的 c 则称为 a 和 b 的一个“公度”。另外一种等价的说法是：若存在适当的正整数 m 和 n，使得 $n\cdot a$ 和 $m\cdot b$ 恰好等长，则称 a 和 b 为可公度的。

他们接着就问下述耐人寻味的问题：

长度度量基本问题 是否任给的两条直线段 a,b 一定都是可公度的呢？

在长度度量的实践中，通常我们用一根单位长的“直尺”去逐段丈量。假如不能恰好整量之，则设法把直尺作适当的等分，再用“分尺度”去丈量其“余段”。所以，在概念上提出可公度性和上述关于度量的基本问题可以说是顺理成章的。下面让我们从正反两面来对它加以分析：

（一）当 a,b 是可公度时，也即存在适当的正整数 m,n 使得 $a=m\cdot c$，$b=n\cdot c$（或者说 $n\cdot a=m\cdot b$），则两者长度的比值 $a:b$ 当然就应该定义为分数 $\frac{m}{n}$。所以假若对上述度量基本问题的答案是肯定的话，上述这种长度比值的定义，就已具有普遍性，而且比值总是一个分数。

（二）反之，假若上述基本问题的答案是否定的话，也即存在着彼此不可公度的一对直线段 a, b，则两者长度之间的比值还"有待定义"，而且其比值也肯定不是一个分数！

（三）长度是一个极其基本的几何量，因此上述可公度性是否普遍成立？这是一个直接影响整个几何学基础理论的根本性问题。下面就用希腊几何学发展史中几个关键性的转折与进展，来说明上述度量问题的基本重要性。

（A）毕氏学派的几何基础论

话说当年（约在公元前六、五世纪）由毕达哥拉斯创立的毕氏学派，主观地主张可公度性是普遍成立的；并且以这个主张（当时他们把它作为公理之一）作为几何学中论证的基础，对于许多具有基本重要性的几何事实给出了"证明"。例如下面对相似三角形定理的论证就是他们当年的一个得意之作。

相似三角形定理 设有两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，它们的三个角对应相等，也即 $\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$，则它们的三对对应边的边长成比例，即有

（1）$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$。

毕氏学派的证明 因为他们认定任何两个直线段总是可公度的，所以他们一开始就设 $AB : A'B' = \frac{m}{n}$。然后设法运用当时业已具备的关于恒等三角形的知识，来证明其他两对对应边的比值也等于 $\frac{m}{n}$。下面所叙述的，大致上就是他们当年的证法：

按假设 $AB : A'B' = \frac{m}{n}$，我们可以用分点 $\{B_i : 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$ 把 AB 等分为 m 段；同样地用分点 $\{B_j' : 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$ 把 $A'B'$ 等分为 n 段，则有 $AB_1 = A'B_1'$。如图 1.1 所示，过 B_i 和 B_j' 分别作 BC 和 $B'C'$ 的平行线，交 AC 和 $A'C'$ 于 C_i 和 C_j' 点，容易看出 $\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle A'B_1'C_1'$ 恒等。所以我们只要再能证明：

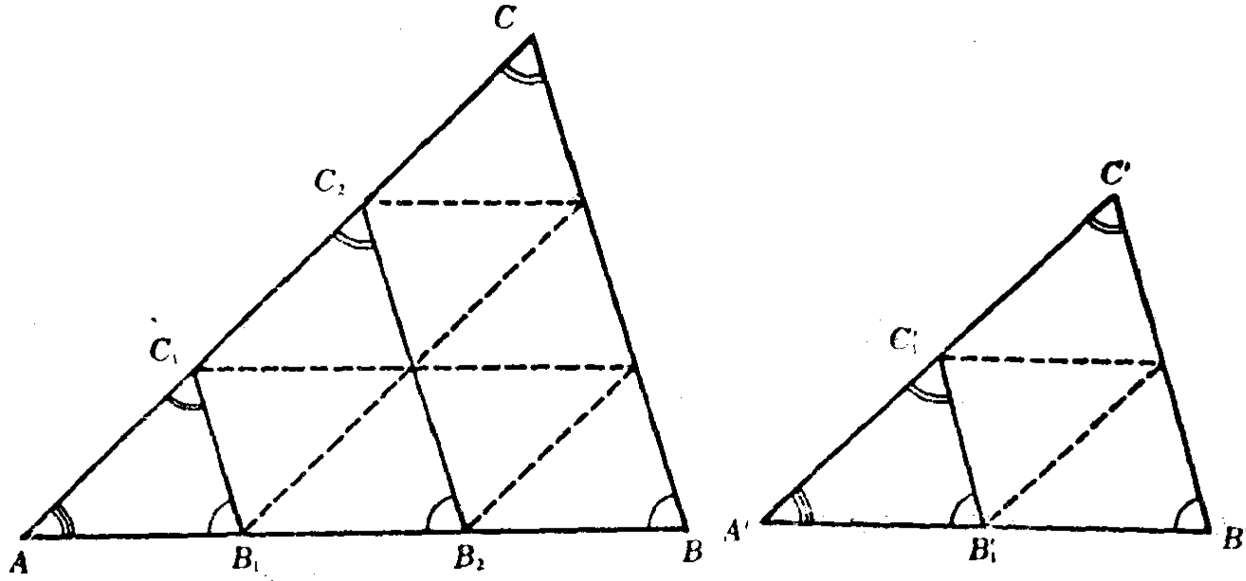


图 1·1

$$(2)\ \begin{cases} AC = mAC_1,\ A'C' = nA'C_1' \\ BC = mB_1C_1,\ B'C' = nB_1'C_1' \end{cases}$$

即可由 $AC_1 = A'C_1'$ 和 $B_1C_1 = B_1'C_1'$ 得出 $AC:A'C'$ 和 $BC:B'C'$ 也等于 $\frac{m}{n}$。下面就让我们对 m 使用归纳法，来论证：

$$AC = m\cdot AC_1 \text{ 和 } BC = m\cdot B_1C_1。$$

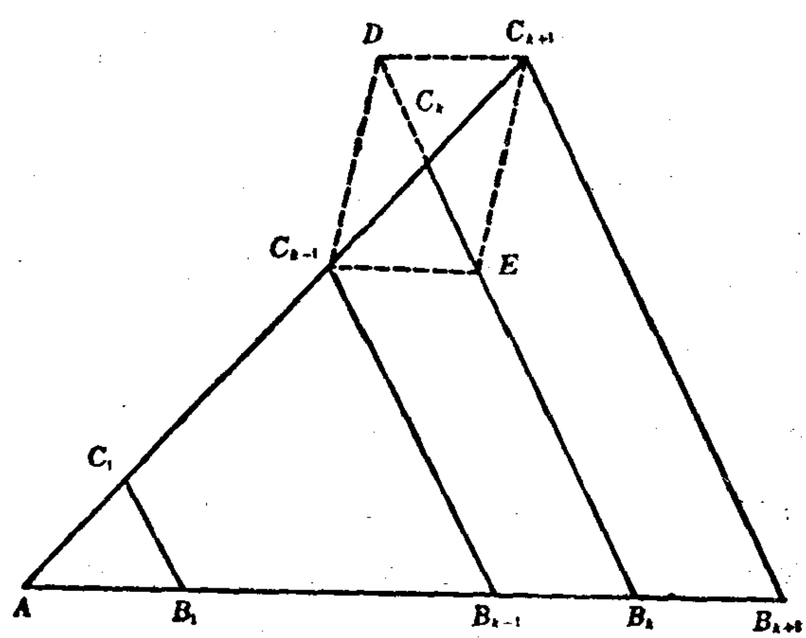


图 1·2

当 $m=1$ 时是显然成立的，所以我们只要在 $m\leqslant k$ 时成立的假设之下，去证明 $m=k+1$ 时也因而成立。

如图 1·2 所示，

$$(3)\quad \begin{cases} AB_i = i\cdot AB_1, \\ B_iC_i \parallel B_1C_1,\ 1\leqslant i\leqslant k+1 \end{cases}$$

由归纳假设，有

$$(4)\quad \begin{cases} AC_i = i\cdot AC_1 \text{ 和} \\ B_iC_i = i\cdot B_1C_1,\ 1\leqslant i\leqslant k \end{cases}$$

延长 B_kC_k，在其上取 D 点使得 $B_kD=B_{k+1}C_{k+1}$。然后，过 C_{k-1} 点作 AB_k 的平行线交 B_kC_k 于 E 点。则由所作容易看出

$$(5)\quad \begin{cases} C_{k-1}E \text{ 和 } B_{k-1}B_k \text{ 平行等长} \\ DC_{k+1} \text{ 和 } B_kB_{k+1} \text{ 平行等长} \end{cases} \Longrightarrow C_{k-1}E \text{ 和 } DC_{k+1} \text{ 平行等长}$$

因此 $C_{k-1}EC_{k+1}D$ 是一个平行四边形，所以其对角线互相平分。这也就是说，$C_kC_{k+1}=C_{k-1}C_k=AC_1$ 和 $ED=2ED_k=2(B_kC_k-B_{k-1}C_{k-1})=2\cdot B_1C_1$。因此即有

$$(4)_{k+1}\quad \begin{cases} AC_{k+1}=AC_k+C_kC_{k+1}=k\cdot AC_1+AC_1=(k+1)AC_1 \\ B_{k+1}C_{k+1}=B_kE+ED=B_{k-1}C_{k-1}+2\cdot B_1C \\ \qquad =[(k-1)+2]\cdot B_1C_1 \end{cases}$$

这就完成了归纳的论证，所以也就完成了

$(1')$ $AB:A'B'=\dfrac{m}{n}\Longrightarrow AC:A'C'$ 和 $BC:B'C'$ 也等于 $\dfrac{m}{n}$ 的论证。

注 话说当年，毕氏学派认为可公度性的普遍成立乃是天经地义毋容置疑的"事实"，所以他们认为上面这个用平行分割把相似三角形定理归于恒等形的论证，业已完整无缺严密得无懈可击的了。殊不知他们一直认定是天经地义的论证基础却偏偏是和事实不符的！长话短说，大约到了公元前五世纪中期，毕氏的门人希伯斯坚持以实事求是的态度去钻研"可公度性究竟是否普遍成立"这个根本问题，最后终于发现并且证明：一个正五边形的边长和对角线长是不可公度的！（随后

他又证明了正方形的边长和对角线长也是不可公度的。）这个划时代的惊人发明，对于人类的理性文明来说，其意义有如发现了知识领域的一个新大陆。但是对于当时的希腊几何学界，特别是毕氏学派，这简直是几何学中一个翻天覆地的大地震。因为他的发现和其清新严格的论证，事实胜于雄辩地否定了当时几何理论的一个根本性的论证基础！因此，许多原先认为业已完全论证得无懈可击的定理（例如前述的相似三角形定理），都不得不向事实低头；承认那只能算是对于可公度的特殊情形所给的证明。换句话说，不可公度的情形还有待补证。所以希伯斯的发现的确给当时古希腊的几何理论带来了空前的危机与挑战。闲话少说，还是让我们来说说希伯斯的发现和论证吧。

（B）希伯斯的发现和证明

要实事求是地研究可公度性是否普遍成立，当然先得想出一个切实可行的办法，来检验两个给定线段 a, b 是否可公度。所以让我们先来介绍一下辗转丈量检定法：

（一）设 a, b 是可公度的，即存在适当的公尺度 c 使得 $a=m\cdot c$, $b=n\cdot c$；若 l 是 m, n 的最大公约数，则 $c'=l\cdot c$ 就是同时能够整量 a,b 的最长公尺度。再者，我们还可以用下述辗转丈量法由 a, b 出发去求出两者的最长公尺度 c'。（它和由 m、n 用辗转相除法去求出m, n的最大公约数 l 是密切相应的。）

先用线段 a, b 中的较短者 b 去丈量 a；若 b 恰能整量 a，则 b 本身就是所求的最长公尺度，不然，即得一段 r_1，亦即

(6) $$a=q_1\cdot b+r_1,\ r_1 \text{ 比 } b \text{ 短},$$

再用 r_1 去丈量 b：若 r_1 恰能整量 b，则 r_1 就是所求的最长公尺度；不然，则又得一余段 r_2，亦即

(6′) $$b=q_2\cdot r_1+r_2,\ r_2 \text{ 比 } r_1 \text{ 短},$$

然后再用 r_2 去丈量 r_1……如此辗转丈量，即可得一个 r_k，它恰能整量 r_{k-1}。r_k 就是所求的 a, b 线段的最长公尺度。

（二）反之，设有两个给定线段 a'，b'；若能证明象上面这样的辗转

丈量永无止境，那就证明了 a', b' 是不可公度的！下面就让我们来介绍希伯斯远在公元前四五百年就发现的实例和他的论证吧。

［例 1］ 设 a, b 分别是一个正五边形的对角线长和边长，则 a 和 b 不可公度！

证明 我们所要证明的，就是用 a, b 来辗转丈量，永远不可能有整量的情形出现，亦即永无止境！

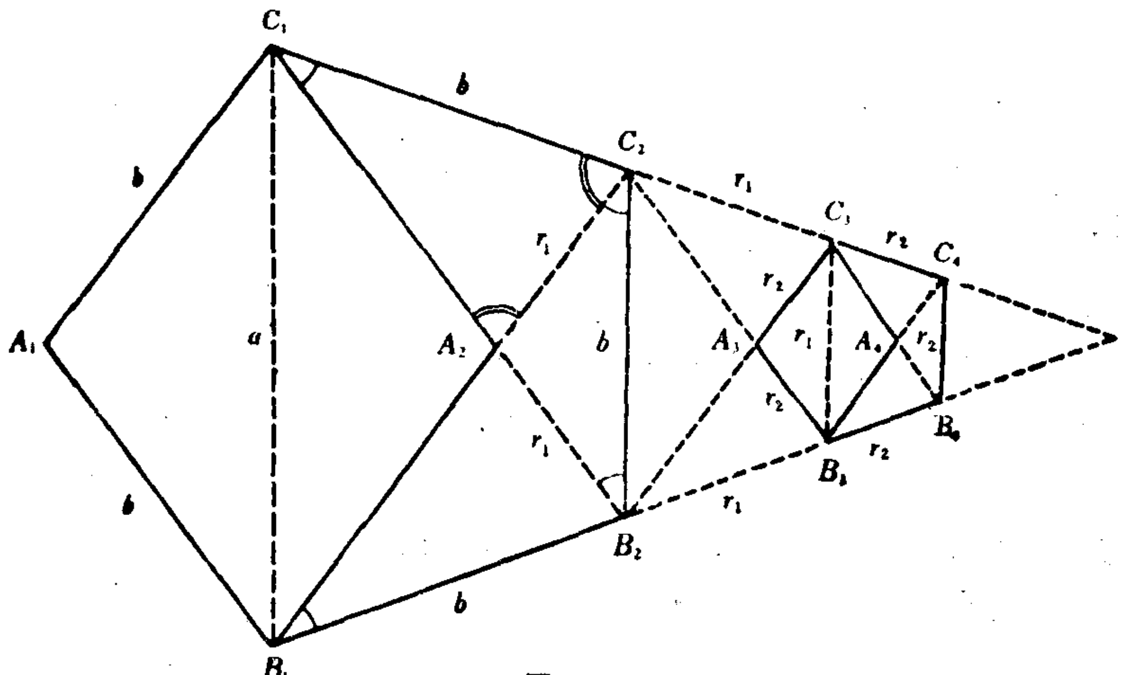


图 1·3

如图 1.3 所示，$A_1B_1B_2C_2C_1$ 是一个五边形，它的五条边长都是 b 五条对角线长都是 a，它的五个内角都是 $\frac{3\pi}{5}(=108^\circ)$。

$\triangle C_1B_2C_2$ 是等腰的，因此其两底角 $\angle C_1B_2C_2=\angle B_2C_1C_2=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{5}(=36^\circ)$。同理也有 $\angle B_2C_2B_1=\frac{\pi}{5}(36^\circ)$。所以 $\triangle A_2B_2C_2$ 是等腰的，而且 $\angle B_2A_2C_2=\pi-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$。另外，由于 $\angle C_1A_2C_2=\pi-\frac{3\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}(=72^\circ)$ 和 $\angle C_1C_2A_2=\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}(=72^\circ)$，即得 $\triangle C_1A_2C_2$ 也是等腰的。

因此，$a=C_1B_2=C_1A_2+A_2B_2=b+r_1$，$r_1=A_2B_2$。分别延长 B_1B_2