加权余量法在结构分析中的应用

徐文焕　陈　虬　编著

中　国　铁　道　出　版　社

加权余量法在结构分析中的应用

徐文焕　陈　虬　编著

中　国　铁　道　出　版　社

内 容 提 要

本书结合结构分析介绍了加权余量法的基本概念，详细论述了在弹性力学的平面问题和空间问题，薄板与薄壳，以及在结构动力响应问题上的应用，此外还介绍了加权余量有限元法。各章举有实例，并附有用最小二乘边界配点法解弹性平面问题的计算程序。

本书可供从事设计、科研的工程技术人员及高等院校有关专业师生参考。

加权余量法在结构分析中的应用

徐文焕 陈 虬 编著

中国铁道出版社出版

责任编辑 冯秉明 封面设计 刘景山

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：4.75 字数：98 千

1 9 8 5 年2月 第1版 第1次印刷

印数：0001—5,000册 定价：1.05元

序　言

加权余量法也译作为加权残数法(Method of Weighted Residuals),它是一个强有力的数值解法。近年来由于电子计算机的广泛应用,该法得到了迅速的发展。这本小册子的初稿完成于1981年,曾在1982年5月召开的全国加权残数法学术会议上进行了交流,并先后在长沙铁道学院及西南交通大学用它作教材为研究生开设了这门课程;其中的部分内容,曾在1982年以新技术讲座的形式在《铁道标准设计通讯》杂志上连续刊载。在初稿的基础上,经过作者的修改补充,写成了这本加权余量法的普及读物。本书以应用为主,所介绍的内容多为国内外近年来的研究成果,其中也包括了作者所进行的一些研究工作。在基础理论方面,考虑到一些即将在国内翻译出版的外文专著中有所论述,部分内容将不在本书中重复。在本书的前三章里,对方法的基本概念作了极其简要的介绍;从第四章到第八章,每章介绍一个专题,各章自成体系,读者可以通读全书,也可根据个人需要选读其中的任何一章;在书末的附录里,介绍了一个用最小二乘边界配点法解弹性平面问题的计算程序,通过该程序说明编制加权余量法计算程序的一般步骤和一些特殊技巧。为了便于读者对某一专题作进一步的研究,在每章的末尾都介绍了一些必要的文献资料,但由于此法的发展过于迅速,所以介绍的资料很不全面。近年来,加权余量法在结构稳定、几何非线性以及各种动力耦合问题等各方面都取得了新的进展,而在板壳方面所取得的新成果则更引人注目,对此只能

目　　录

第一章 绪 论

§1.1 概 述

加权余量法（Method of Weighted Residuals）是一个求解微分方程的数值法。它在流体力学、热传导以及化学工程等方面应用的较为广泛，在土木工程界过去极少应用，所以大家对它比较陌生。关于此法的详细论述，可参阅文献[1]、[2]。

加权余量法的解题思想远在三十年代已经提出，那时主要是应用在数学领域里。到了五十年代，这一类方法才正式的被归纳统一为加权余量法[3]。近年来随着电子计算机的发展，加权余量法受到了国内外学者的普遍重视，国际知名学者O.C. Zienkiewicz在他的报告中[4]指出，在时空域中有限元的应用乃为加权余量法的特殊情况；C.A. Brebbia在研究边界元法中认为加权余量法最为有效，因而在他的著作里以加权余量法作为边界元公式化的基础[5]；C.S. Desai在他的著作里给出了一个图表，他将此法看作为最广泛使用的方法之一[6]；此法也早已引起我国学者的重视[7]，并在我国得到了迅速的发展。从总的发展形势分析，无论是在理论方面或应用方面，加权余量法的重要性正在与日俱增。

加权余量法在结构分析的领域内应用得较少，但是经过近几年来国内力学界及工程界的共同努力，在1982年召开的第一次"全国加权残数法学术交流会"上，收到的学术论文已达到64篇。论文内容已涉及到了结构分析的各个方面，既

有静力分析，也有动力和稳定分析，除了线弹性问题之外，几何非线性和材料非线性问题也取得了一些可喜的成果，这些成果充分显示出了加权余量法的强大生命力。

§1.2 基 本 概 念

首先通过一个简单的算例来说明此法的基本概念。

例1.1 对于图1.1所示的等截面悬臂梁，在全跨匀布荷载作用下，求B端的竖直位移Δ_b。

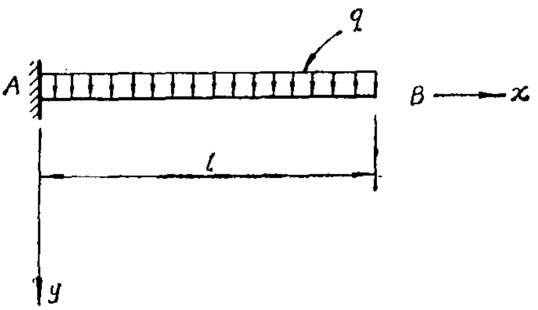

图 1.1

用加权余量法求解这一问题时，解题步骤如下：

首先列出梁轴的挠曲微分方程式

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}-q=0 \tag{1.1}$$

此方程称为问题的控制方程（Control Equation）。

列出问题的边界条件如下：

$$\left.\begin{aligned} &x=0\text{处} \quad y=0,\ \frac{dy}{dx}=0 \\ &x=l\text{处} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0,\ \frac{d^3y}{dx^3}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

现在的问题是要根据控制方程（1.1）及边界条件(1.2)解出悬臂梁的挠曲线方程$y=f(x)$。加权余量法不是严格地

求方程（1.1）的解析解，而是去求它的近似解，但这一近似解却可以精确到我们所需要的精确度。为了说明方法的实质，以下用一级近似来求出它的最粗略的解答。这里所说的一级近似是指在近似解中只包含一个待定参数，这样在求解中只需要补充一个条件方程即可。低级近似便于手算，由于电子计算机的广泛使用，目前多使用高级近似。

首先凭经验选取一条挠曲线作为方程（1.1）的近似解。设此近似解如下

$$\tilde{y}=c(x^5+lx^4-14l^2x^3+26l^3x^2) \qquad (1.3)$$

上式在本法中称为试函数（Trial Function）。应该注意，在试函数中包含有一些待定参数，在式（1.3）这个试函数中则只含有一个待定函数 c。根据什么判据补充一些条件方程去确定这些待定参数，是本法的一个主要关键。下边来讨论如何确定式（1.3）中的待定参数 c。

将试函数 $\tilde{y}$ 代入控制方程（1.1），由于 $\tilde{y}$ 为近似解，故代入式（1.1）后，控制方程将得不到平衡而产生余量 R（Residual），此余量方程将如下式

$$R=EJ\frac{d^4\tilde{y}}{dx^4}-q=EJc(120x+24l)-q \qquad (1.4)$$

很显然，在余量方程中将包含有待定参数 c。

可以采取各种不同的方法来消除余量。在消除余量的过程中即可建立起求解待定参数的方程。在本例中若令余量 R 在 $x=l$ 处为零，即

$$R|_{x=l}=0 \qquad (1.5)$$

则将 $x=l$ 代入式（1.4）后得

$$EJc(120l+24l)-q=0$$

由上式即可求得待定参数 c

$$c = \frac{q}{144EJl}$$

将 c 值代入式（1.3）得方程（1.1）的近似解如下

$$\tilde{y} = \frac{9}{144EJl}(x^5 + lx^4 - 14l^2x^3 + 26l^3x^2) \quad (1.6)$$

于上式中令 $x = l$ 得图1.1所示悬臂梁 B 端的竖直位移为

$$\varDelta_b = \frac{7ql^4}{72EJ} \quad (1.7)$$

精确解为 $\varDelta_b = \dfrac{ql^4}{8EJ}$，误差为22.2%。误差较大这是由于采用的是一级近似过于粗略的缘故。如利用高级近似或用其它消除余量的准则，即可获得较为精确的解答。关于这一问题，在下一章里再作进一步的论述。前边用到的求参数 c 的方法，属于后边将要讨论的配点法。

通过本算例可作一个小结如下：

1）建立问题的控制方程及边界条件方程。这些方程可以是常微分方程也可以是偏微分方程，可以是线性的或非线性的，也可以是方程组；

2）选择试函数作为方程的近似解，此试函数中包含一组待定参数。试函数可以是满足边界条件方程的，也可以不满足边界条件。关于如何选择试函数的问题，在以后的章节里将逐步加以讨论；

3）将试函数代入控制方程或边界条件方程。由于试函数一般不是问题的真实解答，故将得到包含有待定参数的所谓余量方程。可以用各种方法去消除余量。消除余量的条件方程式就是一组以待定参数为未知数的代数方程，由这一组代数方程即可解出待定参数。把这些参数代回到试函数，即得到问题的近似解。

以上三点是用加权余量法解题时的几个重要的不可缺少

的环节。所遇到的问题无论如何复杂，解题步骤并没有什么不同。概念上的简单明瞭，乃是此法的一个重大优点。

§1.3 一般公式

大量的结构分析问题，如板、壳的应力分析，各种形式的二维或三维弹性结构的计算，以及一维杆件的分析等等，这些问题往往都归结为在一定的边界条件或初始条件下求解微分方程的问题。为了一般化，称这类方程为控制方程。设问题的控制方程及边界条件方程分别如下

$$L(u)-f=0 \quad （在V域内） \tag{1.8}$$

$$B(u)-g=0 \quad （在S边界上） \tag{1.9}$$

上式中 u 为待求函数，L、B 为按某些规律进行微分运算的微分算子，f、g 为已知函数。

设方程（1.8）的近似解为

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n} c_i N_i \tag{1.10}$$

上式即为试函数，式中 c_i 为待定参数，N_i 是一组线性无关的基函数。

由于 $\tilde{u}$ 为近似解，故代入式（1.8）（1.9）后将得不到满足而出现余量。若 N_i 既不满足边界条件也不满足控制方程，则将 $\tilde{u}$ 代入式（1.8）（1.9）后，将出现余量 R_I 及 R_B。

$$L(\tilde{u})-f=R_I \tag{1.11}$$

$$B(\tilde{u})-g=R_B \tag{1.12}$$

可以根据不同的条件去消除余量，各种不同的条件可以用不同的权函数 W（Weighting Function）来反映，但可以写成如下的统一形式，即

$$\int_V R_I W_i dV+\int_S R_B T_i dS=0 \tag{1.13}$$

$$(i=1,2,3,\cdots n)$$

上式中W_i及T_i分别为在域内及边界上所采用的权函数。式(1.13)即为余量的加权积分为零。于上式中，若N_i满足所有的边界条件，则有$R_B=0$，从而得

$$\int_V R_I W_i dV=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots n) \qquad (1.14)$$

若N_i满足控制方程，则有$R_I=0$，从而得

$$\int_S R_B T_i dV=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots n) \qquad (1.15)$$

式（1.14）及（1.15）为式(1.13)的特殊情况。由式(1.13)可以得到一组包含待定参数c_i的代数方程。求出c_i代入式（1.10）即可得到问题的近似解。在下一章里将通过公式（1.14）详细讨论权函数W_i的含义。

§1.4 方法的特点

方法的特点也是它的一些优点。正是由于它的优点很突出，所以它才引起了人们的普遍重视。方法的优点主要表现在两个方面，一是理论，二是计算，分别讨论如下。

首先从理论方面来看，由于加权余量法是直接从控制方程出发去求解问题的，在理论上简单易懂，不象变分法那样需要复杂的数学处理，所以它深受广大工程技术人员的欢迎。由于它的应用与问题的能量泛函是否存在无关，因而它的应用范围较广，利用这一特点去建立有限单元法的刚度矩阵，大大扩大了有限单元法的应用范围，为有限元的发展开辟出了一条新途径。

从计算方面看，此法的计算程序十分简单，所需求解的代数方程组的阶数较低，对计算机的内存容量要求不高，可以充分发挥微型机的作用。在微型机广泛应用的今天，这一点有着十分重要的意义。其次，在计算中所需要的原始数据

较少，大大减轻了准备工作所需要的人力。此外，加权余量法在求得结果的同时，可以给出余量的大小，而余量的大小可以直接反映出解答的精确程度，这一优点可以说是较为独特的。

加权余量法的优点是极其显著的。但由于过去长期的停滞不前，今天又刚刚起步，所以它的理论和应用还很不完善。我们深信，在广大的数学力学工作者和广大工程技术人员的共同努力下，在我们的四化建设的生产实践中，加权余量法必将日益发挥其巨大的作用。

参 考 文 献

〔1〕B.A. Finlayson: The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New Yark and London, 1972.

〔2〕B.A. Finlayson & L.E. Seroven: The Method of Weighted Residuals——A Review, Applied Mechanics Review, Vol.19, No 9, 1966.

〔3〕S.H. Crandall, Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956.

〔4〕O.C. Zienkiewicz: Finite Element in the Time Domain, 合肥有限元邀请报告会，1981年5月。

〔5〕C.A. Brebbia: New Development, 国际有限元会议论文集，1982年8月，上海。

〔6〕C.S.德赛，J.T.克里斯琴 主编：岩土工程数值方法，卢世深等译，中国建筑工业出版社，1981。

〔7〕徐次达：加权残数法解固体力学问题及展望，同济大学科情资料， 1978年11月。

第二章 试函数及权函数的选择及方法的分类

§2.1 试函数的选择及方法的分类

试函数的选择是一个重要问题，在低级近似的计算中，它直接影响到结果的精度。在高阶近似中，从理论上说，不同的试函数对计算结果影响不大。不过应该指出的是不同的试函数对计算工作量的大小却有较大的影响。不少读者总希望在如何选择试函数方面给出一些很具体的作法，但遗憾的是到目前为止并没有找到一种能够通用于各种问题的试函数，而且对目前使用的各种试函数，也还缺少系统的总结。因此在讨论这一问题时就不可能很具体，在这里只能提出一些大的原则供大家参考。

从理论上讲，选择一个完备的函数集作试函数必能保证得到满意的结果，但是选择什么类型的函数集，如何达到完备的要求，却不是那么容易作到的[1]。最近几年来，我国学者在试函数的选择方面，作了不少工作，除了常用的幂级数及三角级数外，对样条函数[2]、贝塞尔函数[3]、切比雪夫多项式[4]和勒让德多项式[5]等各种各样的函数都进行了研究并取得了一定成果。

在加权余量法中，由于微分算子出现在积分号内，对试函数的连续性要求较高，但通过分部积分，连续性的要求往往可以减弱，对此可参阅[1]，此处不加重复。

试函数的选择往往和结构的具体情况有关，在具体选择试函数时，类似问题已知的精确解，或该问题在特殊情况下

的解答，均可供作选取试函数时的参考。另外充分利用结构的对称性和已知的边界条件，对于试函数的选取，也可有很大的帮助。试函数的选择较为灵活，在这方面经验的积累是十分重要的。

按照试函数的性质来分类，加权余量法可分为三类，即内部法、边界法和混合法。

所选试函数如果能满足所有的边界条件，但不能满足控制方程，那么就称之为内部法，在第一章中的例1.1中，试函数（1.3）是满足全部的边界条件的，因之该题的解法属于内部法。

和前者相反，若所选试函数满足控制方程，但不能满足边界条件，则称之为边界法。

若试函数既不满足控制方程又不满足边界条件，则称之为混合法。混合法中选择试函数有较大的随意性，但计算工作量往往较大。

§2.2 权函数及方法的分类

在第一章里曾经指出，各种不同的消除余量的方法可以统一用式（1.13）表示。若试函数满足所有的边界条件，则可得（1.14）式，即

$$\int_V R_I W_i dV = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots n) \qquad (1.14)$$

不同的权函数 W_i，反映了在消除余量时的不同准则，加权余量法可以根据不同的权函数而区分为下列各种方法：子域法、配点法、最小二乘法、伽辽金法及矩法等等。权函数在不同的方法中有不同的含义，下面以内部法为例，对各种方法作一简要介绍。

（1）子域法（Subdomain Method）

若试函数内包含有 n 个待定参数，一种简单的作法是把

整个求解域V分成为n个子域(单元)，在q每一个子域里，令余量的积分为零作为消除余量的准则，以V_j代表第j个子域，则

$$\int_{V_j} R dV_j = 0 \quad (j=1,2,\cdots n) \tag{2.1}$$

n个子域可给出n个条件方程式，可用以解出试函数中的n个待定参数。随着子域数目增多即待定参数数目n的增加，控制方程将在愈来愈小的更多的子域中得到满足，所求得的解答也将趋于精确解。在这个方法里，如果把权函数W_j看作是如下的函数

$$W_j = \begin{cases} 1 & (\text{在子域}V_j\text{内}) \\ 0 & (\text{不在子域}V_j\text{内}) \end{cases} \tag{2.2}$$

那末式（2.1）可写作下式

$$\int_V W_j R dV = 0 \quad (j=1,2,\cdots n) \tag{2.3}$$

上式即为余量R的加权积分等于零的统一公式（1.14）。

如果在各个子域里分别选取试函数，那么它的求解在形式上将类似于有限元法，这一解法目前被称作为加权余量有限元法，实质上它属于子域法。关于加权余量有限元法将在第八章里详细讨论。

（2）配点法（Collocation Method）

前边谈到的子域法是令余量在一个子域里的总和为零。配点法则是令余量在一些指定的点上为零，若试函数中包含有n个待定参数，则可以选定n个点，令余量R在这n个点上为零，这样就可以得到n个条件方程，可用以解出n个待定参数。这些被选定的点可称为配点，n个配点余量为零的条件可写作下式

$$R|_{x=x_j} = 0 \quad (j=1,2,\cdots n) \tag{2.4}$$

上式同样与写成式（1.14）余量的加权积分等于零的统一形式，在这种情况下要用到脉冲函数δ或称作狄拉克δ函数。δ函数的定义式是

$$\left.\begin{array}{l}\delta(X-X_i)=\begin{cases}0 & \text{当} X-X_i\neq 0\\ \infty & \text{当} X-X_i=0\end{cases}\\ \text{及}\\ \int_a^b\delta(X-X_i)dx=\begin{cases}0 & (X_i\text{不在}a,b\text{区间内})\\ 1 & (X_i\text{在}a,b\text{区间内})\end{cases}\end{array}\right\}\tag{2.5}$$

令权函数W_j等于δ函数

$$W_j=\delta(X-X_j)\tag{2.6}$$

则余量的加权积分式为

$$\int_V W_j R dV=\int_V R\delta(X-X_j)dV=R|_{X=X_j}$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots n)\tag{2.7}$$

故条件（2.4）可写作下式

$$\int_V W_j R dV=0\quad(j=1,2,\cdots n)$$

此式即为加权余量积分式的统一形式。

配点法的计算只在若干离散点上进行，它不需要作繁难的积分，所以在加权余量法中它是最为简单的一种方法。

配点法还可以与其它加权余量法联合使用。属于配点法一类的方法称为离散型的加权余量法，它是目前深受大家重视而且发展较为迅速的一种解法，在第三章里将再作进一步的介绍。

（3）最小二乘法（Least Square Method）

这是一个大家十分熟悉的经典方法，作为误差平方估计的概念早在十八世纪已经确立，最小二乘法作为求解微分方