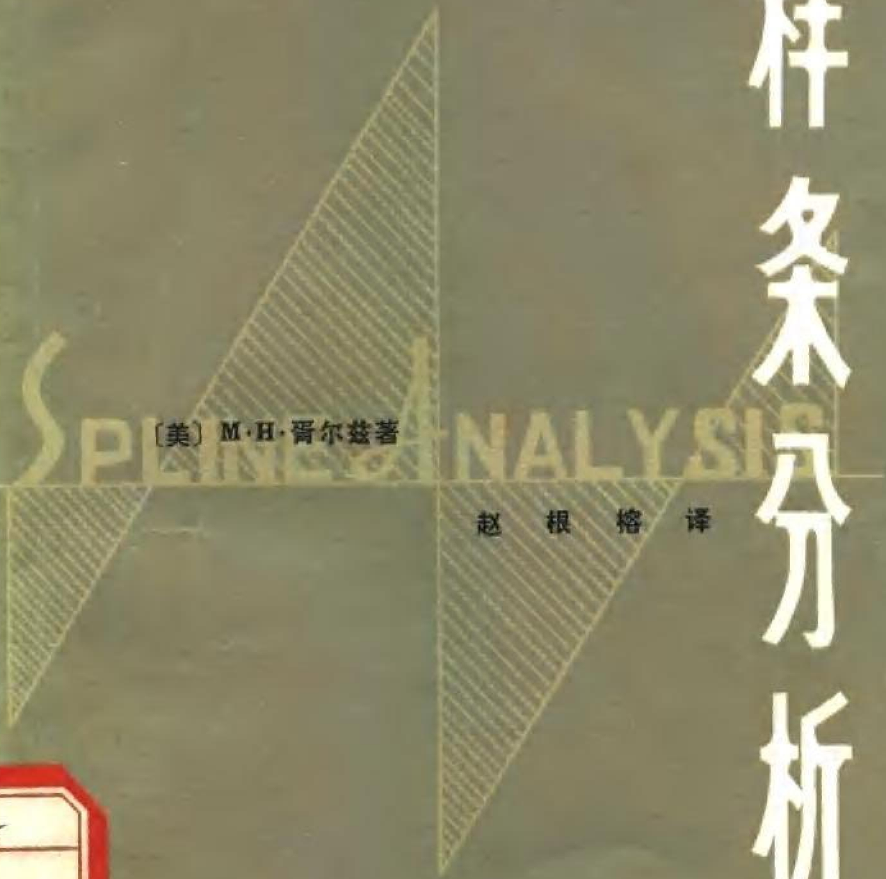
样条分析

上海

样条分析



〔美〕M·H·舒尔兹著

赵根榕译

版社

上海科学技术出版社

样 条 分 析

〔美〕M. H. 胥尔兹 著

赵 根 榕 译

上海科学技术出版社

SPLINE ANALYSIS
Martin H. Schultz
Prentice-Hall, Inc., 1973

样 条 分 析

〔美〕M. H. 胥尔兹 著
赵根榕 译
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 131,000
1979年8月第1版 1979年8月第1次印刷
印数 1—22,000

书号：13119·774 定价：0.58元

序

存在许多用高速数字计算机解连续的即无穷维问题的计算方法. 其中之一,有限元法,似乎是能普遍应用的.

本书用初等的讲法讨论有限元法的统一的、数学上严格的处理办法. 主要目的是介绍足够实用的、理论的细节,以便使读者能在数字计算机上有效地使用这个方法去解实际问题,或渊博地进行理论研究. 介绍中还包括有在内插问题、积分方程、最小二乘即回归问题,椭圆型微分方程、本征值问题、抛物型问题与最优控制问题方面的应用.

本书的材料是为具有微积分与线性代数知识的读者而编写的. 本书可以作为数值分析或数值方法课程中综合教材的补充或作为有限元法课程的教材.

Martin H. Schultz

目　录

序
第 1 章　引论 ……………………………………………………1
　习题 ……………………………………………………………10
　参考文献 ………………………………………………………10
第 2 章　逐段线性内插…………………………………………11
　2.1　一维问题 ………………………………………………11
　2.2　二维问题 ………………………………………………14
　2.3　误差分析 ………………………………………………16
　习题 ……………………………………………………………24
　参考文献 ………………………………………………………26
第 3 章　逐段三次 Hermite 内插 ……………………………28
　3.1　一维问题 ………………………………………………28
　3.2　二维问题 ………………………………………………35
　3.3　误差分析 ………………………………………………37
　习题 ……………………………………………………………47
　参考文献 ………………………………………………………51
第 4 章　三次样条内插…………………………………………53
　4.1　一维问题 ………………………………………………53
　4.2　二维问题 ………………………………………………60
　4.3　误差分析 ………………………………………………63
　习题 ……………………………………………………………75
　参考文献 ………………………………………………………77
第 5 章　线性积分方程…………………………………………79
　习题 ……………………………………………………………83

参考文献 ……………………………………………………84
第 6 章　有限元回归……………………………………………85
6.1　一维问题 ……………………………………………85
6.2　二维问题 ……………………………………………93
6.3　误差分析 ……………………………………………96
习题 ……………………………………………………104
参考文献 ……………………………………………………105
第 7 章　椭圆型方程的 Rayleigh-Ritz-Galerkin 方法 ……………………………………………107
7.1　引论 ……………………………………………107
7.2　线性二阶两点边值问题 ……………………………………………108
7.3　半线性二阶两点边值问题 ……………………………………………115
7.4　平面上的二阶问题 ……………………………………………122
7.5　误差分析 ……………………………………………127
习题 ……………………………………………………136
参考文献 ……………………………………………………138
第 8 章　本征值问题的 Rayleigh-Ritz-Galerkin 方法 ……………………………………………143
8.1　引论 ……………………………………………143
8.2　一维问题 ……………………………………………143
8.3　误差分析 ……………………………………………148
习题 ……………………………………………………153
参考文献 ……………………………………………………154
第 9 章　抛物型方程的半离散 Galerkin 方法 ……………156
9.1　线性问题 ……………………………………………156
9.2　半线性问题 ……………………………………………161
9.3　计算的考虑 ……………………………………………165
习题 ……………………………………………………172
参考文献 ……………………………………………………172

第 10 章　最优控制问题的 Ritz 方法 ……………………174
10.1　**方法的表述** ……………………174
10.2　**误差界** ……………………179
习题 ……………………186
参考文献 ……………………186

第 1 章

引　论

在本书中，将对各式各样的基本数值分析问题给出统一的处理．特别是，要着重讨论将无穷维的即连续的问题变成“离散”问题以求得在计算上引人重视的、近似的有限维问题．

我们的办法是用变分表述与逐段多项式函数的空间．这种结合，1943 年首先由 Courant 用以研究振动问题（参考 [1.3]），自此以后曾被工程师们成功地加以采用，他们把它叫做“有限元方法”．

因为我们想在数字计算机上计算有限维问题的解，自然要用到逐段多项式函数（例如样条函数）的空间，而对这种空间，我们能够事先构造它的适当的基底函数．与变分办法结合起来，这些基底函数就产生近似的有限维问题，其中包含能用 Gauss 消去法或迭代法有效地解出的稀疏的良定的线性组．进而还能证明，近似问题一般有唯一解，而且我们能给出一般的先验误差界，它们表明所得的逼近是高阶精确的．

总之，我们把各式各样的许多问题表述为在无限维函数空间 V 上求实值泛函 F 的极小的问题，然后在 V 的由适当选取的逐段多项式函数所组成的有限维子空间 S 上求 F 的极小，就得到计算上引人重视的、近似的有限维问题．其次，我们的目的只是给出分析与结果的基本思想与一般技术的概括评述．我们将不介绍和证明最清晰的或最一般可能的数学定理，而代之以考察各式各样的简单模型问题．例如，我们只

考察二阶微分方程，区域是区间或正方形，逐段多项式的次数是一次或三次．我们把扩张和推广留到习题和参考文献中，它们是为了适应于指导读者进一步研究而选取的．

现在引进一些在本书中到处用到的基本数学记号和结果．命

$$I\equiv[0,\ 1]\equiv\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

$$U\equiv[0,\ 1]\times[0,\ 1]\equiv\{(x,\ y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\ \text{且}\ 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

对于每个正整数 t，

$$D^t\varphi(x)\equiv\frac{d^t\varphi}{dx^t}(x),$$

$$D_x^t\varphi(x,\ y)\equiv\frac{\partial^t\varphi}{\partial x^t}(x,\ y),$$

$$D_y^t\varphi(x,\ y)\equiv\frac{\partial^t\varphi}{\partial y^t}(x,\ y),$$

且

$$R^t\equiv\{(x_1,\ \cdots,\ x_t)\,|\,x_i\ \text{是实数},\ 1\leqslant i\leqslant t\},$$

即 R^t 是 t 维 Euclid 空间．对于每个非负整数 t 与每个 p，$1\leqslant p\leqslant\infty$，命 $PC^{t,p}(a,\ b)$是满足下列条件的所有实值函数 $\varphi(x)$的集：

(1) $\varphi(x)$是 $t-1$ 次连续可微的，

(2) 存在 γ_i，$0\leqslant i\leqslant s$，且

$$a=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_s<\gamma_{s+1}=b,$$

使得在每个开子区间$(\gamma_i,\ \gamma_{i+1})$，$0\leqslant i\leqslant s$，上 $D^{t-1}\varphi$ 是连续可微的，且

(3) $D^t\varphi$ 的 L^p 范数是有限的，即

$$\|D^t\varphi\|_p\equiv\left(\sum_{i=0}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}}|D^t\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}<\infty.$$

对于 $p=\infty$ 的特殊情形，要求

$$\|D^t\varphi\|_\infty \equiv \max_{0\leqslant i\leqslant s} \sup_{x\in(\gamma_i,\gamma_{i+1})} |D^t\varphi(x)| < \infty.$$

如无其他说明，单元函数 φ 的 L^p 范数 $\|\varphi\|_p$ 以后意指在 $I=[0,1]$ 上的 L^p 范数．同样，对于每个非负的整数 t 和每个 p，$1\leqslant p\leqslant\infty$，命 $PC^{t,p}(U)$ 为满足下列条件的所有实值函数 $\varphi(x,y)$ 的集：

(1) $\varphi(x,y)$ 是 $t-1$ 次连续可微的，即

$$D_x^l D_y^k \varphi(x,y),\quad 0\leqslant l+k\leqslant t-1$$

存在且连续，

(2) 存在 γ_i，$0\leqslant i\leqslant s$，与 μ_j，$0\leqslant j\leqslant r$，且

$$0=\gamma_0<\cdots<\gamma_{s+1}=1,\quad 0=\mu_0<\cdots<\mu_{r+1}=1,$$

使得在每个开子矩形

$$(\gamma_i,\ \gamma_{i+1})\times(\mu_j,\ \mu_{j+1}),\quad 0\leqslant i\leqslant s,\ 0\leqslant j\leqslant r$$

上，有连续可微的

$$D_x^l D_y^k \varphi,\quad 0\leqslant l+k\leqslant t-1,$$

(3) 对于所有的 $0\leqslant l+k\leqslant t$，$D_x^l D_y^k\varphi$ 的 L^p 范数是有限的，即

$$\|D_x^l D_y^k\varphi\|_p \equiv \left(\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{r}\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}}\int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} |D_x^l D_y^k\varphi|^p dy\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

对于 $p=\infty$ 的特殊情形，要求

$$\|D_x^l D_y^k\varphi\|_\infty \equiv \max_{\substack{0\leqslant i\leqslant s\\0\leqslant j\leqslant r}} \sup_{(x,y)\in(\gamma_i,\gamma_{i+1})\times(\mu_j,\mu_{j+1})} |D_x^l D_y^k\varphi(x,y)|$$

$$<\infty.$$

如无其他说明，二元函数 φ 的 L^p 范数 $\|\varphi\|_p$ 以后指 $U=[0,1]\times[0,1]$ 上的 L^p 范数．其次，

$$PC_0^{1,p}(a,b)\equiv\{\varphi\in PC^{1,p}(a,b)\,|\,\varphi(a)=\varphi(b)=0\}$$

而且

$$PC_0^{1,p}(U)\equiv\{\varphi\in PC^{1,p}(U)\mid\varphi(x,\ y)=0,\text{对于 }U\text{ 的边界上的所有}(x,\ y),\text{即 }x=0\text{ 或 }1,\text{或 }y=0\text{ 或 }1\text{ 的}(x,\ y)\}.$$

最后，命

$$\Delta:0=x_0<x_1<\cdots<x_{N+1}=1$$

是 I 的一般划分，其中的点 x_i，$0\leqslant i\leqslant N+1$，叫分点、网格点或结点，如

$$\Delta_y:0=y_0<y_1<\cdots<y_{M+1}=1$$

是另一种这样的划分，则命 $\rho\equiv\Delta\times\Delta_y$ 是 U 的划分，即 ρ 由形如

$$(x_i,\ x_{i+1})\times(y_j,\ y_{j+1}),\quad 0\leqslant i\leqslant N,\ 0\leqslant j\leqslant M$$

的子矩形组成．其次，命

$$h\equiv\max_{0\leqslant i\leqslant N}(x_{i+1}-x_i),\quad \underline{h}\equiv\min_{0\leqslant i\leqslant N}(x_{i+1}-x_i)$$

分别为 Δ 的最大与最小步长，

$$k\equiv\max_{0\leqslant j\leqslant M}(y_{j+1}-y_j),\quad \underline{k}\equiv\min_{0\leqslant j\leqslant M}(y_{j+1}-y_j)$$

分别为 Δ_y 的最大与最小步长，而且

$$\bar{\rho}=\max(h,\ k),\quad \underline{\rho}=\min(\underline{h},\ \underline{k}).$$

现在讨论本书要反复用到的几个数学结果．我们由 Rolle 定理的推广开始．我们给出的证明仿照[1.4]．

定理 1.1

如 $f\in C^n[a,b]$，$n\geqslant1$，即 f 在$[a,\ b]$上是 n 次连续可微的，而且 f 在 x_i，$1\leqslant i\leqslant k$，有阶数至少为 m_i 的零点，这里

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_k=b\text{ 且 }\sum_{i=1}^{k}m_i\geqslant n+1,$$

那末就存在 $\xi\in[a,\ b]$，使 $D^nf(\xi)=0$．其次，$\xi\in(a,\ b)$，但当 $k=1$ 且 $x_1=a$ 或 b 时是例外，在此情形 $\xi=x_1$．

【证明】 如 $k=1$, 则选取 $\xi=x_1$, 就得到结果. 如 $k>1$, 关于 n 用归纳法.

对于 $n=1$, $f(x)$有两个不同的零点, 从而结果恰好是微积分中的标准 Rolle 定理. 假设结果对于所有直到 $n-1$ 的整数都成立, 命 $g(x)=Df(x)$. 函数 $g(x)$ 以每个 x_i, $1\leqslant i\leqslant k$, 为零点, 其阶数至少为 m_i-1, 因而(由 $n=1$ 时的结果)对于 $1\leqslant i\leqslant k-1$, 在每对 x_i 与 x_{i+1} 之间有一个一阶零点 ξ_i. 所以 g 的零点总数为

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)+k-1\geqslant n,$$

由归纳法假设, 存在 $\xi\in(a,\ b)$, 使得

$$D^{n-1}g(\xi)=D^nf(\xi)=0.$$ 证毕

下一个要证明的结果叫 Rayleigh-Ritz 不等式. 我们给出 Hurwitz 的 Fourier 级数证明法; 参考[1.1].

定理 1.2

如 $f\in PC_0^{1,2}(a,\ b)$, 则

$$(1.1)\qquad \pi^2\int_a^b f^2(x)dx\leqslant(b-a)^2\int_a^b(Df(x))^2dx.$$

其次, 当且仅当对于某个实数 a_1,

$$f(x)=a_1\sin(\pi(b-a)^{-1}(x-a))$$

时, 我们有等式.

【证明】 将 $f(x)$ 与 $Df(x)$ 展成它们各自的 Fourier 级数, 则有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(n\pi(b-a)^{-1}(x-a)),$$

$$Df(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n n\pi(b-a)^{-1}\cos(n\pi(b-a)^{-1}(x-a)).$$

由 Parseval 关系式(参考[1.1]),

$$\int_a^b (f(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2,$$

$$\int_a^b (Df(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n n\pi (b-a)^{-1})^2,$$

由此推出(1.1). 证毕

现在来讨论 Peano 核定理. 如 E 是 $PC^{n+1,1}(a, b)$ 上的实值函数, 且对于所有的 $f, g \in PC^{n+1,1}(a, b)$, 有

$$E(cf) = cE(f),$$

$$E(f+g) = E(f) + E(g),$$

则称 E 为向量空间

$$PC^{n+1,1}(a, b), \quad n \geqslant 0$$

上的线性泛函.

定理 1.3

如 E 是 $PC^{n+1,1}(a, b)$, $n \geqslant 0$, 上的线性泛函, 且对于所有的 n 次多项式 p, 有 $E(p(x)) = 0$, 则对于所有的 $f \in PC^{n+1,1}(a, b)$,

$$(1.2) \qquad E(f) = \frac{1}{n!} E_x\left[\int_a^b D^{n+1} f(t)(x-t)_+^n dt\right],$$

其中

$$(x-t)_+^n \equiv \begin{cases} (x-t)^n, & x \geqslant t, \\ 0, & x < t, \end{cases}$$

而且 E_x 表示作用于看成 x 的函数的表达式

$$\int_a^b D^{n+1} f(t)(x-t)_+^n dt$$

的线性泛函 E.

【证明】 用所引进的记号, 具有精确余项的 Taylor 定理能写成

(1.3) $$f(x)=f(a)+Df(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{n!}D^nf(a)(x-a)^n$$
$$+\frac{1}{n!}\int_a^b D^{n+1}f(t)(x-t)_+^n dt,$$

将 E 作用于恒等式(1.3)的两边，并用 E 的线性与 E 在所有 n 次多项式上为零这一事实，就推出结果. 证毕

本章下面两个结果，对于第二至四章的结果来说，是基本的.

定理 1.4

如 f 与 $g\in PC^{0,2}(I)$，且

$$(f, g)_2\equiv\int_0^1 f(x)g(x)dx=0,$$

则

(1.4) $$\|f\|_2^2+\|g\|_2^2=\|f+g\|_2^2.$$

【证明】 由定义，

$$\|f+g\|_2^2=(f, f)_2+2(f, g)_2+(g, g)_2,$$

而由正交条件就推出结果. 证毕

推理

如 f 与 $g\in PC^{k,2}(I)$, $k\geqslant 0$, 且$(D^kf, D^kg)_2=0$, 则

(1.5) $$\|D^kf\|_2^2+\|D^kg\|_2^2=\|D^kf+D^kg\|_2^2.$$

进而，如 $g(x)$ 在 I 上 $n\geqslant k$ 次为零（把重数计算在内），且 $\|D^kg\|_2=0$, 则在 f 上，$g(x)\equiv 0$.

【证明】 等式来自定理 1.4，在其中用 D^kf 替换 f，用 D^kg 替代 g. 进而，由 Rolle 定理，存在点 $\xi\in I$，使 $D^{k-1}g(\xi)=0$.

所以，对于所有的 $x\in I$，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$|D^{k-1}g(x)| = \left|\int_\xi^x D^k g(s)\,ds\right| \leqslant \int_\xi^x |D^k g(s)|\,ds$$

$$\leqslant \int_0^1 |D^k g(s)|\,ds \leqslant \|D^k g\|_2 = 0,$$

从而 g 一定是次数至多为 $k-2$ 的多项式. 但 g 在 n 个点上为零, 因而一定是零多项式. 证毕

这一章最后的一个结果叫 Schmidt 不等式.

定理 1.5

如 $p_n(x)$ 是 $n=1, 2$ 或 3 次多项式, 则

$$(1.6)\quad \int_a^b [Dp_n(x)]^2 dx \leqslant 4k_n(b-a)^{-2}\int_a^b [p_n(x)]^2 dx,$$

其中 $k_1 \equiv 3$, $k_2 \equiv 15$, 且

$$k_3 \equiv \frac{1}{2}(45+\sqrt{1605}) \approx 42.6.$$

【证明】 先考察 $a=-1$ 且 $b=1$ 的特殊情形. 如果定义 Legendre 多项式

$$L_0(x) \equiv \sqrt{1/2},$$
$$L_1(x) \equiv \sqrt{3/2}x,$$
$$L_2(x) \equiv \sqrt{5/8}(3x^2-1),$$
$$L_3(x) \equiv \sqrt{7/8}(5x^3-3x),$$

则

$$\int_{-1}^1 L_i(x)L_j(x)\,dx = \delta_{ij} \equiv \begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i \neq j,\end{cases}$$

$0 \leqslant i, j \leqslant 3$, 而且存在实数 β_0, β_1, β_2 与 β_3, 使

$$(1.7)\quad p_n(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i L_i(x).$$

用 $p_n(x)$ 的以 Legendre 多项式为项的表示(1.7), 我们有

$$k_n = \sup_{\beta \neq 0} \frac{\int_{-1}^{1} [Dp_n(x)]^2 dx}{\int_{-1}^{1} [p_n(x)]^2 dx} = \sup_{\beta \neq 0} \frac{\beta^T A_n \beta}{\beta^T \beta}$$

$$\equiv \sup_{\beta \neq 0} R[\beta],$$

其中 $A_n \equiv [a_{ij}]_{0<i,j<n} \equiv \left[\int_{-1}^{1} DL_i(x) DL_j(x) dx\right]_{0<i,j<n}$

是对称非负定的，而 $R[\beta]$是 A_n 的 Rayleigh 商．进而，我们能计算

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

与

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{21} \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & \sqrt{21} & 0 & 42 \end{bmatrix}.$$

根据对称矩阵特征值以 Rayleigh 商表示的变分表征(参考[1.2])，我们有 $k_n = A_n$ 的最大特征值，而不等式(1.6)由直接计算即可推出．为对于任意的 a 与 b 证明(1.6)，我们用自变数变换

$$y \equiv 2(a-b)^{-1}(a-x) - 1,$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [D_x p_n(x)]^2 dx \\
&= 2(b-a)^{-1} \int_{-1}^{1} \left[D_y p_n\left(a + \frac{1}{2}(y+1)(b-a)\right)\right]^2 dy \\
&\leqslant 2(b-a)^{-1} k_n \int_{-1}^{1} \left[p_n\left(a + \frac{1}{2}(y+1)(b-a)\right)\right]^2 dy \\
&\leqslant 4(b-a)^{-2} k_n \int_a^b [p_n(x)]^2 dx.
\end{aligned}$$

证毕

习　题

(1.1) 试证：如 $w \in PC^{1,2}(a, b)$，且 $w(a)=w(b)=0$，则

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|w(x)| \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^{1/2}\left(\int_a^b [Dw(t)]^2 dt\right)^{1/2}.$$

注意，这是一般 Соболев 不等式的特殊情形．$\Big[$提示：用等式 $w(x)=\frac{1}{2}\left\{\int_a^x Dw(t)dt - \int_x^b Dw(t)dt\right\}$ 与 Cauchy-Schwarz 不等式.$\Big]$

(1.2) 试证：如 $w \in PC^{1,q}(a, b)$，且 $w(a)=w(b)=0$，则

$$\left(\int_a^b [w(x)]^p dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^{1+p^{-1}-q^{-1}}\left(\int_a^b [Dw(x)]^q dx\right)^{1/q}.$$

[提示：与(1.1)中一样进行，但用 Hölder 不等式.]

(1.3) 试证：如 $f \in PC^{1,2}(a, b)$ 且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$，则

$$\pi^2\int_a^b (f(x))^2 dx \leqslant 4(b-a)^2\int_a^b (Df(x))^2 dx.$$

(1.4) 试证：如 $p\geqslant q$ 且 $\{a_i\}_{i=1}^N$ 与 $\{b_i\}_{i=1}^N$ 是使 $a_i^{1/p}\leqslant b_i^{1/q}$，$1\leqslant i\leqslant N$ 的任意正数，则

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^N b_i\right)^{1/q}.$$

[提示：用 Jensen 不等式；参考[1.1, p. 18].]

参 考 文 献

[1.1] Beckenbach, E. F., and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin (1965).

[1.2] Bellman, R., *Introduction to Matrix Theory*. McGraw-Hill, New York (1960).

[1.3] Courant, R., Variational Methods For the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **49**, 1～23(1943).

[1.4] Wendroff, B., *Theoretical Numerical Analysis*. Academic Press, New York (1966).