三 体 问 题

汪 家 訸 編著

科 学 出 版 社

三 体 问 题

汪家訸 編著

科 学 出 版 社

內 容 簡 介

“三体問題”是研究在万有引力的相互作用下三个質点的运动問題．宇宙火箭飞向月球的运动理論就属于三体問題的一个特殊問題——圓型限制三体問題．本书可作为研究宇宙火箭运动的基本力学理論的参考书．

本书从“n 体問題”的一般理論开始，較完备地討論了“二体問題”，附带介紹了一些用到的分析动力学知識．关于三体問題本身的內容有：运动方程的降阶法，勃卢恩斯理論，庞卡莱理論，拉格朗日定型运动，圓型限制三体問題，碰撞問題和方程的正規化等．

本书主要讀者对象是已学过理論力学及具有一般高等数学知識的理工科大学生，天体力学和宇宙航行問題的业余爱好者，数学及力学工作者．

三 体 問 題

汪家訸 編著

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）
北[redacted]市书刊出版业[redacted]許可証出字第061号
中国科学[redacted]印刷厂印刷　新华书店总經售

1961年9月第一[redacted]　书号[redacted]391　字数：285,000
1961年9月第一次印刷　开本：787×1092 1/18
（京）0001—9,000　印张：12 1/3

定价：1.50元

序　　言

三体問題是研究三个質点在相互万有引力的作用下的运动問題．这問題是研究行星运动的二体問題的直接推广． 三体問題的理論发展到現在已有二百多年的历史，这是一个古老而至今尙未完全解决的問題．二百多年来，有許多伟大的数学家和力学家曾經研究过这个問題，象欧勒，拉格朗日，庞卡萊等都曾对这問題作出了貢献．以往在天体力学方面，三体問題主要是应用于研究月球的运动．近几年来，由于科学的发展，发射宇宙火箭的条件业已成熟，为了掌握宇宙火箭的运动規律，便应該研究属于三体問題的一个特殊問題——限制三体問題．自 1959 年苏联成功地发射了三个宇宙火箭以后，討論三体問題的书便成为国内很感需要的参考书．为此，作者不自譾陋，收集了前人的一些研究成果，以供同志們研究宇宙火箭的参考．

本书只討論三体問題的一般性理論．关于具体应用于宇宙火箭的运行計算，本书則不列入；关于月球运行的理論——月理——也不予介紹，因为月理在天体力学中早已成为一門特种科学．

书中某些地方推导的式子略多写了些，目的是想尽量排除一般讀者在閱讀上的困难；更重要的是希望爭取更多的讀者能順利地掌握这門科学．这是我主观上的意图，做得是否确当，希望讀者們提供意見．

汪 家 訸

1960 年 1 月 30 日

目　　录

第一章　n 体問題的一些基本知識

n 体問題是天体力学中最一般性的基本問題. 它包括二体問題 ($n=2$) 和三体問題 ($n=3$). 其中二体問題是很容易求解的, 但是对三体問題数学力学家們就遇到了困难. 这問題至今尚未完全解决. 以往天体力学中解决三体問題是靠近似的摄动理論,这方法在旧天文学中占有极重要的地位. 一般性的三体問題仅应用于月球运动的理論. 自 1750 年至 1927 年关于三体問題的論文已超过八百多篇. 这些論文的作者大多是历史上有名的数学家. 自从苏联宇宙火箭发射成功后,三体問題就显示出它在現今星际航行問題上的重要地位. 預定宇宙火箭的飞行路綫和掌握它的运动規律就需要应用"限制三体問題的理論", 利用电子計算机近似地逐步地算出宇宙火箭各时間的位置.

为了研究宇宙火箭和人造月球卫星的运行,首先应該掌握三体問題的有关知識. 在此順便提出 n 体問題. 在这章中导出的方程和关系式,只要令 $n=3$, 就得到三体問題的对应表式.

1. n 体問題的提法及其运动微分方程

所謂 n 体問題可表述如下:

在空間中有 n 个質点,它們相互之間的作用力是万有引力,已知它們在 t_0 时的位置和速度,求它們在任何时 t 的位置和速度.

設 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, n 个質点,它們的質量分別是 $m_1, m_2, \cdots, m_n$; 它們对某慣性坐标系 $oxyz$ 的坐标分别是 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \cdots, (x_n, y_n, z_n)$; 对原点 O 的矢径分别是 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n$. 質点 P_i 与質点 P_j 之間的距离 $\overline{P_iP_j}$ 表为 r_{ij},那么 P_i 質点与 P_j 質点的作用力的大小是

$$F_{ij} = \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}^2}, \tag{1.1}$$

其中 $\gamma = 6.66 \times 10^{-8}$(厘米,克,秒单位制).

質点 P_j 作用于 P_i 的引力的方向是沿 $\overrightarrow{P_iP_j}$. 将 $\overrightarrow{P_iP_j}$ 表为 $\mathbf{r}_{ij}$, 那么由图 1有

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = -(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\mathbf{r}_{ji}, \tag{1.2}$$

于是 P_j 作用于 P_i 的引力可写为

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{ij}. \tag{1.3}$$

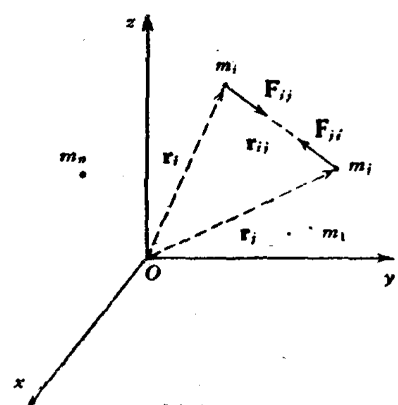

图 1

現在已知 t_0 时各質点的位置和速度:

$$(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}); \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy_i}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz_i}{dt}\right)_0\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

求各质点的运动规律，也就是求任何时候 t 的各质点位置和速度.

在 (1.1) 中与万有引力常数 γ 有关的物理量有力 F_{ij}，质量 m，距离 r_{ij}. γ 的量綱是 $L^3T^{-2}M^{-1}$. 所以我們可以适当地选择 L,T,M 三种单位，使 $\gamma=1$，而且尙保留再选择一种物理量的某大小为单位量的自由. 例如研究宇宙火箭的运动，当它在月球和地球之邻近区域时，可令月球和地球的質量和为 1.

为以后式子写法上的簡便起見，我們应用 $\gamma=1$ 的单位制. 这样公式(1.3)变成

$$\mathbf{F}_{ij}=\frac{m_im_j}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{ij}. \tag{1.4}$$

現在証明：若以各質点都在无穷远的位能当作 0，那么各質点系在有限空間內的总位能是

$$V=-\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}}+\frac{m_1m_3}{r_{13}}+\frac{m_1m_4}{r_{14}}+\cdots+\frac{m_1m_n}{r_{1n}}+\frac{m_2m_3}{r_{23}}\right.$$
$$\left.+\frac{m_2m_4}{r_{24}}+\cdots+\frac{m_2m_n}{r_{2n}}+\cdots+\frac{m_{n-1}m_n}{r_{n-1,n}}\right) \tag{1.5a}$$

或

$$V=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}\frac{m_im_j}{r_{ij}}\quad(n\geqslant j>i), \tag{1.5b}$$

証：設想起初各質点都在无穷远，此时質点系位能是 0. 然后将 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 各質点順次一个个平衡地移到有限空間的 $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\cdots,\mathbf{r}_n$ 处，求出引力所作之总功，这总功的值便是所求的位能的值.

各質点在无限远处相互之距离为无穷大，所以 P_1 与其它各質点的距离 $r_{1i}=\infty$，所以由 (1.1) $F_{1i}=0$，因而将 P_1 自无穷远移到 $\mathbf{r}_1$ 无需作功. 所以只有一質点 P_1 在有限空間的位能为 0.

現在将 P_2 自无穷远移至 $\mathbf{r}_2$. 則因 P_2 受着 P_1 的引力 $\mathbf{F}_{21}$，所以必須加一个$(-\mathbf{F}_{21})$之力于質点 P_2，使它自无穷远平衡地移至 $\mathbf{r}_2$ 处. 設外力所作之功为 A_2，則

$$A_2=-\int_\infty^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}_{21}\cdot d\mathbf{r}_2=-\int_\infty^{\mathbf{r}_2}(X_{21}dx_2+Y_{21}dy_2+Z_{21}dz_2),$$

其中

$$\left.\begin{aligned}X_{21}&=-\frac{m_1m_2}{r_{21}^2}\frac{x_2-x_1}{r_{21}},\\Y_{21}&=-\frac{m_1m_2}{r_{21}^2}\frac{y_2-y_1}{r_{21}},\\Z_{21}&=-\frac{m_1m_2}{r_{21}^2}\frac{z_2-z_1}{r_{21}},\end{aligned}\right\}$$

故

$$A_2=m_1m_2\int_\infty^{\mathbf{r}_2}\frac{1}{r_{21}^3}[(x_2-x_1)dx_2+(y_2-y_1)dy_2+(z_2-z_1)dz_2].$$

因 P_1 質点在 $\mathbf{r}_1$ 使保持不动，故 $dx_1=dy_1=dz_1=0$. 于是 A_2 又可写成

$$
\begin{aligned}
A_2 &= m_1m_2\int_\infty^{r_2}\frac{1}{r_{21}^3}[(x_2-x_1)d(x_2-x_1)+(y_2-y_1)d(y_2-y_1)+(z_2-z_1)d(z_2-z_1)] \\
&= m_1m_2\int_\infty^{r_2}\frac{1}{2r_{21}^3}d[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2] \\
&= m_1m_2\int_\infty^{r_{21}}\frac{1}{2r_{21}^3}d(r_{21}^2)=m_1m_2\int_\infty^{r_{21}}\frac{dr_{21}}{r_{21}^2} \\
&= m_1m_2\left[-\frac{1}{r_{21}}\right]_\infty^{r_{21}}=-\frac{m_1m_2}{r_{21}}.
\end{aligned}
$$

現在再将 P_3 平衡地移动到 $\mathbf{r}_3$. 为此必須加 $(-\mathbf{F}_{31})$ 及 $(-\mathbf{F}_{32})$ 之力于 P_3，用以平衡 P_1 質点和 P_2 質点对 P_3 的引力. 加此二力于 P_3，移动 P_3 使它由无穷远至 $\mathbf{r}_3$ 处，所作之功表以 A_3，則 A_3 为

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \int_\infty^{\mathbf{r}_3}[(X_{31}+X_{32})dx_3+(Y_{31}+Y_{32})dy_3+(Z_{31}+Z_{32})dz_3] \\
&= -m_1m_3\int_\infty^{r_3}\frac{1}{r_{31}^3}[(x_3-x_1)dx_3+(y_3-y_1)dy_3+(z_3-z_1)dz_3] \\
&\quad -m_2m_3\int_\infty^{r_3}\frac{1}{r_{32}^3}[(x_3-x_2)dx_3+(y_3-y_2)dy_3+(z_3-z_2)dz_3] \\
&= -m_1m_3\int_\infty^{r_{31}}\frac{dr_{31}}{r_{31}^2}-m_2m_3\int_\infty^{r_{32}}\frac{dr_{32}}{r_{32}^2} \\
&= -\left(\frac{m_1m_3}{r_{31}}+\frac{m_2m_3}{r_{32}}\right),
\end{aligned}
$$

故 P_1, P_2, P_3 三質点在有限空間的总位能为

$$
V_3=A_2+A_3=-\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}}+\frac{m_1m_3}{r_{13}}+\frac{m_2m_3}{r_{23}}\right).
$$

显然上法可推广于 n 个質点而得到 (1.5a).

我們也可以将 (1.5a) 写成更对称的形式如下：

$$
\begin{aligned}
V=-\frac{1}{2}\Big\{0&+\frac{m_1m_2}{r_{12}}+\frac{m_1m_3}{r_{13}}+\cdots+\frac{m_1m_n}{r_{1n}} \\
&+\frac{m_2m_1}{r_{21}}+0+\frac{m_2m_3}{r_{23}}+\cdots+\frac{m_2m_n}{r_{2n}} \\
&+\frac{m_3m_1}{r_{31}}+\frac{m_3m_2}{r_{32}}+0+\cdots+\frac{m_3m_n}{r_{3n}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\frac{m_nm_1}{r_{n1}}+\frac{m_nm_2}{r_{n2}}+\frac{m_nm_3}{r_{n3}}+\cdots+0\Big\},
\end{aligned}
\tag{1.5c}
$$

或

$$
V=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_im_j}{r_{ij}}\quad(i\neq j). \tag{1.5d}
$$

作用于質点 P_i 的力是

$$\sum_{j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (j \neq i), \tag{1.6}$$

所以 n 体問題的运动微分方程可写为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (j \neq i;\ j, i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.7a}$$

其中 $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 是 $\mathbf{r}_i$ 对时間 t 的二次导数，它表示质点 m_i 的加速度．如将 (1.7a) 写成分量式則有

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= \sum_{j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(x_j - x_i), \\ m_i \ddot{y}_i &= \sum_{j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(y_j - y_i), \\ m_i \ddot{z}_i &= \sum_{j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(z_j - z_i). \end{aligned}\right\} \tag{1.7b}$$

现在应用矢量分析中的陡度运算符

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i}\mathbf{k},$$

那么

$$\begin{aligned} -\nabla_i V &= -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i}\mathbf{k}\right) V \\ &= -\nabla_i\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}\right) = m_i \sum_{j} m_j \nabla_i\left(\frac{1}{r_{ij}}\right) \\ &= m_i \sum_{j} m_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i}\mathbf{k}\right)\frac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ &= m_i \sum_{j} \frac{m_j}{r_{ij}^3}[(x_j - x_i)\mathbf{i} + (y_j - y_i)\mathbf{j} + (z_j - z_i)\mathbf{k}] \\ &= \sum_{j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \sum_{i} \mathbf{F}_{ij} \quad (j \neq i). \end{aligned}$$

所以 n 体問題的动力方程 (1.7a) 可簡写为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i V \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.8a}$$

或写成分量式：

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}. \tag{1.8b}$$

如定义 $U = -V$ 的坐标函数为力函数，即

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{1.9}$$

那么 (1.8a) 和 (1.8b) 可分别写为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i U \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.10a}$$

及

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{1.10b}$$

上式是 $3n$ 个二阶微分方程，所以这质点系的运动微分方程組是 $6n$ 阶．$6n$ 阶的微分方程組，它的解案包括 $6n$ 个任意常数．这 $6n$ 个常数由初位置 (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) 和初速度 $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy_i}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz_i}{dt}\right)_0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 完全确定．我們要想掌握 n 体問題的运动規律，就要解微分方程組 (1.10b)，求出的解案具有下面的形式：

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(x_{10}, y_{10}, z_{10}; x_{20}, y_{20}, z_{20}; \cdots; x_{n0}, y_{n0}, z_{n0};\\ &\qquad v_{1x0}, v_{1y0}, v_{1z0}; \cdots; v_{nx0}, v_{ny0}, v_{nz0}; t),\\ y_i &= y_i(x_{10}, y_{10}, z_{10}; x_{20}, y_{20}, z_{20}; \cdots; x_{n0}, y_{n0}, z_{n0};\\ &\qquad v_{1x0}, v_{1y0}, v_{1z0}; \cdots; v_{nx0}, v_{ny0}, v_{nz0}; t),\\ z_i &= z_i(x_{10}, y_{10}, z_{10}; x_{20}, y_{20}, z_{20}; \cdots; x_{n0}, y_{n0}, z_{n0};\\ &\qquad v_{1x0}, v_{1y0}, v_{1z0}; \cdots; v_{nx0}, v_{ny0}, v_{nz0}; t). \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.11)$$

2. n 体問題的十个一次积分

我們所研究的"n 体問題"的空間中，假想只存在着这 n 个質点作为討論基础，所以这 n 个質点的質点系无外力和外力矩的作用．应用理論力学中大家熟知的"动量守恆定理"，"質心运动定理"，"动量矩守恆定理"，立刻得到(1.10b)的 9 个一次积分．n 体問題是可以发生碰撞現象的．在沒有碰撞的时候，n 个質点間只有万有引力一种相互作用的力．从 (1.5d) 的推导知道万有引力存在着位函数 V，它仅是質点位置坐标 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的函数．V 的梯度就是作用力．在这样的力作用下，質点系的机械能不会耗損，所以我們称它为**保守系統** (Conservative system)．这样又得到一个一次积分——能量积分．合起来共十个一次积分．这种积分对簡化动力方程組 (1.10b) 起着很重要的作用．对三体問題，我們将专立一章来討論．

由于这种积分对簡化方程組的重要性，在此再应用上节推得的 n 体問題的运动微分方程来推导这些一次积分，以增加对这些积分的力学概念；另一方面所得到的关系式，可供以后討論之用．

(A) 动量守恆定理及質心运动定理．

因

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

及

$$\mathbf{F}_{ji} = \frac{m_j m_i}{r_{ji}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

可見

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}. \quad (1.12)$$

上式表示：質点与質点間的万有引力适合"反作用定律"．我們在电动力学中知道：运动着的电子与电子之間的相互作用力并不适合反作用定律．(1.12)也可以写成

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0. \quad (1.13)$$

应用上式，我們将(1.8a)对脚标 i 求和得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j} \mathbf{F}_{ij} = 0. \tag{1.14}$$

将上式对时間积分一次，即得动量守恆定理：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{c}_1, \tag{1.15a}$$

其中 $\mathbf{c}_1$ 是常矢量．上式可写成分量式如下：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i &= c_{1x}, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i &= c_{1y}, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i &= c_{1z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.15b}$$

将 (1.15a) 及 (1.15b) 对时間 t 再积分一次，得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \tag{1.16a}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i &= c_{1x} t + c_{2x}, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i y_i &= c_{1y} t + c_{2y}, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i z_i &= c_{1z} t + c_{2z}, \end{aligned}\right\} \tag{1.16b}$$

上式就是所要求的关系式．我們知道：一个質点系总有一个"質心"．質心的坐标定义为

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}, \tag{1.17}$$

其中

$$M = \sum_i m_i = \text{質点系总質量}. \tag{1.18}$$

所以 (1.16b) 可以写成

$$\left.\begin{aligned} M x_c &= c_{1x} t + c_{2x}, \\ M y_c &= c_{1y} t + c_{2y}, \\ M z_c &= c_{1z} t + c_{2z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

上式是質心的运动方程，所以我們称这結果为"質心运动定理"．(1.15b) 和 (1.16b) 共六个一次积分．

(1.15a) 也可以写成

$$M \dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{c}_1, \tag{1.20}$$

即质心是等速直綫地运动着．其特例 $\mathbf{c}_1 = 0$，表示質心是靜止的．事实上我們知道"运动是相对的"，牛頓力学对任何慣性系統都同样成立．所以我們研究的坐标的原点固定在質心上，而不失其普遍性．这样对以后的研究可以大大簡化，因对这种坐标有 $c_{1x} = c_{1y} = c_{1z} = c_{2x} = c_{2y} = c_{2z} = 0$．

(B) 动量矩守恆定理．

将 (1.7b) 的第二式两端同乘以 z_i，第三式两端同乘以 y_i，然后两式相減得

$$m_i(\ddot{z}_i y_i - z_i \ddot{y}_i) = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}[(z_j - z_i)y_i - z_i(y_j - y_i)]$$

$$= \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(z_j y_i - z_i y_j).$$

将上式两边对脚标 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{z}_i y_i - z_i \ddot{y}_i) = \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(z_j y_i - z_i y_j) = 0.$$

将上式对时間积分一次，得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{z}_i y_i - z_i \dot{y}_i) = c_{3x},$$

上式的眞确性可以对时間微分来証明．上式中 c_{3x} 是积分常数．应用同样的运算再可得另二式，现在集合如下：

$$\left.\begin{aligned}\sum m_i(\dot{z}_i y_i - z_i \dot{y}_i) &= c_{3x},\\ \sum m_i(\dot{x}_i z_i - x_i \dot{z}_i) &= c_{3y},\\ \sum m_i(\dot{y}_i x_i - y_i \dot{x}_i) &= c_{3z},\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

上式就是所要求的动量矩定理的一次积分式．(1.21)的三式可合写成矢量式如下：

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{c}_3, \tag{1.22}$$

上式中 $\mathbf{c}_3$ 是常矢量．上式表示 n 个質点对坐标原点的总动量矩是一个常矢量．常矢量具有方向的不变性．所以动量矩矢量在原点有确定不变的方向．通过原点作一个平面垂直 $\mathbf{c}_3$．那么动量矩矢量对这个平面的投影是零．但不論 n 个質点如何运动，$\mathbf{c}_3$ 的方向是永远不变的，所以这个平面的位置在空間也是确定不变的．对于以質心为原点的慣性坐标系，具有上述性質的平面是通过質心的一个固定平面，我們称它为**不变面**，見图 2．不变面的特性是"質点系的总动量矩垂直于这个平面"，也就是質点系对于在这平面上的任一軸的动量矩分量是零．

对于太阳系也有一个不变面．太阳系的动量矩 98% 决定于四大行星：木星，土星，天王星，海王星．拉普拉斯 (Laplace) 曾建議以不变面作为太阳系的計算参考坐标面，不过它在天体力学上的实用价值不大．下面研究三体問題的时候，将用到"不变面"的概念．

現在附带説明一下，一質点系对空間不同二点 O, O' 的动量矩关系式(图 3)．以

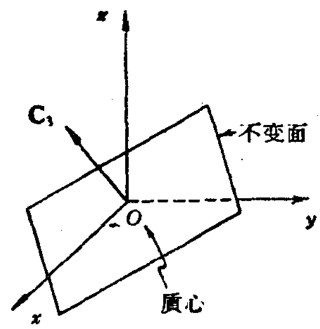

图 2

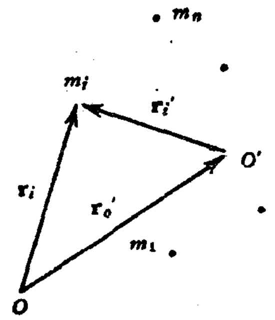

图 3

$\mathbf{P}_o$ 及 $\mathbf{P}_{o'}$ 分别表示质点系对 O 及 O' 的动量矩,那么由定义,有

$$\mathbf{P}_o = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

及

$$\mathbf{P}_{o'} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt},$$

以 $\mathbf{r}_{o'}$ 表示 O' 对 O 的矢径,则 $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{o'}$. 又因 O' 和 O 是假想静止着的,所以 $\mathbf{r}_{o'}$ 为常矢量,而有 $\frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt} = 0$. 于是

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{o'}) \times m_i \frac{d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{o'})}{dt}$$

$$= \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \mathbf{r}_{o'} \times \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt},$$

但

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M\mathbf{v}_c,$$

故得 $\mathbf{P}_o$ 和 $\mathbf{P}_{o'}$ 的关系式

$$\mathbf{P}_{o'} = \mathbf{P}_o - \mathbf{r}_{o'} \times M\mathbf{v}_c. \tag{1.23}$$

若 $\mathbf{v}_c = 0$, 则 $\mathbf{P}_{o'} = \mathbf{P}_o$, 即质点系的质心静止时, 则质点系对空間各点的动量矩都相同. 从这事实知道: 如果取固定于质心的惯性坐标系, 那么不变面垂直于质点系对这坐标空間中任一点的动量矩.

(C) 能量积分.

因 n 体問題的力学系統在不发生碰撞的时候是保守系統,即存在着位函数 V,所以可以得机械能守恆定律:

$$\frac{1}{2} \sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V = h, \tag{1.24}$$

現在应用 (1.8b) 推导如下: 将 (1.8b) 順次乘以 $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$, 然后三式相加再对脚标 i 求和得

$$\sum_i m_i(\dot{x}_i \ddot{x}_i + \dot{y}_i \ddot{y}_i + \dot{z}_i \ddot{z}_i) = -\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \dot{z}_i\right),$$

即

$$\sum_i \frac{m_i}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2) = -\frac{dV}{dt},$$

或

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)+V\right]=0.$$

积分上式,即得

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)+V=h. \tag{1.25}$$

以T表示質点系的总动能,即

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2),$$

則(1.25)可写成

$$T+V=h, \tag{1.26}$$

或

$$T=h+U. \tag{1.27}$$

利用以上十个一次积分,可将n体問題的运动微分方程組自$6n$阶降低十阶,成为$6n-10$阶. 关于三体問題利用这些积分的降阶法,以后专門一章来討論.

3. 雅科毕公式

$\sum_i m_i r_i^2$可以定义为質点系对原点O的极轉动慣量,用R^2表示,則有

$$R^2=\sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \tag{1.28}$$

現在要証明的雅科毕公式是

$$\frac{d^2}{dt^2}R^2=4T+2V. \tag{1.29}$$

上式的推导如下:将(1.8b)分别乘以x_i, y_i, z_i, 然后相加,再对脚标i求和,得

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i\ddot{x}_i+y_i\ddot{y}_i+z_i\ddot{z}_i)=-\sum_{i=1}^n\left(x_i\frac{\partial V}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial V}{\partial y_i}+z_i\frac{\partial V}{\partial z_i}\right). \tag{1.30}$$

因

$$x_i\ddot{x}_i=\frac{d}{dt}(x_i\dot{x}_i)-\dot{x}_i^2=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x_i^2)-\dot{x}_i^2,$$

同样

$$y_i\ddot{y}_i=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(y_i^2)-\dot{y}_i^2,$$

$$z_i\ddot{z}_i=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(z_i^2)-\dot{z}_i^2.$$

将上三式相加,則有

$$(x_i\ddot{x}_i+y_i\ddot{y}_i+z_i\ddot{z}_i)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2).$$

将上式两边乘以 m_i 然后对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\ddot{x}_i + y_i\ddot{y}_i + z_i\ddot{z}_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{2}m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\right]$$

$$- \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \tag{1.31}$$

从 V 的表式(1.5c)知道：V 是 x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的 (-1) 阶齐次函数. 关于齐次函数有著名的欧勒定理：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 次齐次函数的充要条件是下式成立：

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = nf. \tag{1.32}$$

将上式应用于位函数 V，則有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial V}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial V}{\partial y_i} + z_i\frac{\partial V}{\partial z_i}\right) = (-1)V, \tag{1.33}$$

应用(1.31)和(1.33)，則(1.30)变成

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{2}m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\right] - \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = V,$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}R^2 - 2T = V,$$

故

$$\frac{d^2}{dt^2}R^2 = 4T + 2V.$$

应用能量方程(1.26)，上式又可写成

$$\frac{d^2}{dt^2}R^2 = 2(T + h), \tag{1.34}$$

其中 h 是质点系的总机械能，可正可負；而动能 T 恆为正量. 当 $T > |h|$ 时不論 h 为正为負而有

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right) > 0.$$

故 $\frac{d}{dt}(\sum m_i r_i^2)$ 随时間无限增大，因之至少有一質点的 r_i 无限地随时間增大. 这样，一質点系中有質点随时間增大而运动到无限远空間中去的情况下，这質点系称为**发散系**. 若某質点系不是发散的，卽質点系的各質点始終保持在有限空間里，那么自(1.34)必須 $T + h < 0$. 因 $T > 0$，故必須有 $h < 0$，及 $|h| > T$. 这是一質点系不是发散系的必須条件. 当然这条件不是充分的.

4. 三体問題的运动方程及其积分

由(1.5a)，三体問題的位函数是

$$V = -\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_3m_1}{r_{31}}\right), \tag{1.35}$$