

三体問題

汪家詠 編著

科學出版社



三 体 问 題

汪 家 詠 編 著

科 学 出 版 社

內 容 簡 介

“三体問題”是研究在万有引力的相互作用下三个質点的运动問題。宇宙火箭飞向月球的运动理論就属于三体問題的一个特殊問題——圓型限制三体問題。本书可作为研究宇宙火箭运动的基本力学理論的参考书。

本书从“ n 体問題”的一般理論开始，較完备地討論了“二体問題”，附带介紹了一些用到的分析动力学知識。关于三体問題本身的内容有：运动方程的降阶法，勃卢恩斯理論，庞卡萊理論，拉格朗日定型运动，圓型限制三体問題，碰撞問題和方程的正规化等。

本书主要讀者对象是已学过理論力学及具有一般高等数学知識的理工科大学生，天体力学和宇宙航行問題的业余爱好者，数学及力学工作者。

三 体 問 題

汪家詠 編著

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市书刊出版业登記許可証出字第 061 号

中国科学出版社印刷 新华书店总經售

1961 年 9 月第 一 版

1961 年 9 月第一次印刷

(京) 0001—9,000

书号: 1391 字数: 285,000

开本: 787×1092 1/16

印张: 12 1/3

定价: 1.50 元

序 言

三体問題是研究三个質点在相互万有引力的作用下的运动問題。这問題是研究行星运动的二体問題的直接推广。三体問題的理論发展到現在已有二百多年的历史,这是一个古老而至今尚未完全解決的問題。二百多年来,有許多伟大的数学家和力学家曾經研究过这个問題,象欧勒,拉格朗日,庞卡萊等都會对这問題作出了貢獻。以往在天体力学方面,三体問題主要是应用于研究月球的运动。近几年来,由于科学的发展,发射宇宙火箭的条件业已成熟,为了掌握宇宙火箭的运动規律,便應該研究属于三体問題的一个特殊問題——限制三体問題。自1959年苏联成功地发射了三个宇宙火箭以后,討論三体問題的书便成为国内很感需要的参考书。为此,作者不自謙陋,收集了前人的一些研究成果,以供同志們研究宇宙火箭的参考。

本书只討論三体問題的一般性理論。关于具体应用于宇宙火箭的运行計算,本书則不列入;关于月球运行的理論——月理——也不予介紹,因为月理在天体力学中早已成为一門特种科学。

书中某些地方推导的式子略多写了些,目的是想尽量排除一般讀者在閱讀上的困难;更重要的是希望爭取更多的讀者能順利地掌握这門科学。这是我主观上的意图,做得是否确当,希望讀者們提供意見。

汪家詠

1960年1月30日

目 录

第一章 n 体問題的一些基本知識	1
1. n 体問題的提法及其运动微分方程	1
2. n 体問題的十个一次积分	5
3. 雅科毕公式	9
4. 三体問題的运动方程及其积分	10
第二章 二体問題	12
1. 化二体問題为二个“单质点受有心力作用下的运动問題”	12
2. 一般中心力問題的解法	14
3. 平方反比律的中心引力問題解法	18
(A) 軌道方程	18
(B) 质点的速度公式	21
(C) 质点的矢径 (r) 公式	21
(D) 质点的极角 (θ) 公式	22
(E) 变数 E, F, G 与时间的关系式	23
(F) 质点作橢圓軌道运动的开普勒方程	24
(G) 开普勒方程的解法	27
(H) 质点在双曲綫軌道上的位置确定法	29
(I) 质点在拋物綫軌道上位置的确定法, 欧勒方程	31
第三章 有关的分析动力学知識	33
1. 拉格朗日方程	33
2. 广义动量及哈密頓方程	36
3. 雅科毕积分及能量积分	39
4. 循环坐标及循环积分	39
5. 消去時間降阶法	39
6. 接触变换	40
7. 伐夫式的双綫性共变式及其对动力学的应用	42
8. 哈密頓方程經接触变换保持形式不变	46
9. 应用能量积分哈密頓方程降阶法	47
10. 泊松括号及其对动力学的应用	48
第四章 三体問題的降阶法	51
1. 三体問題的哈密頓方程, 經典积分的广义坐标表示式	51
2. 降阶法之一	52
(A) 应用质心运动定理将动力方程組降为 12 阶	52
(B) 应用动量矩积分及消去节綫將动力方程組降为 8 阶	54

3. 降阶法之二.....	59
(A) 应用质心运动定理将动力方程组降为 12 阶.....	59
(B) 应用动量矩积分及消去节线将动力方程组降为 8 阶.....	65
4. 平面三体问题降阶法.....	72
(A) 应用质心运动定理将动力方程组降为 8 阶.....	72
(B) 应用一循环坐标及一动量矩积分降阶.....	73
第五章 勃卢恩斯理论——三体问题除十个经典积分外无其它代数积分.....	76
1. 积分式的表法.....	76
2. 积分式中一定包含动量.....	77
3. 积分式中只有一个无理式.....	77
4. 积分式可表成二实多项式之除式.....	79
5. 除式积分式的分子和分母形式的推导.....	80
6. ϕ_0 中不含 s 的证明.....	86
7. 证明 ϕ_0 仅是动量和动量矩积分的函数.....	92
8. 证明 ϕ_0 是 T, L, M, N 的函数.....	100
9. 积分式不含 s 的勃卢恩斯理论的推导.....	103
10. 扩充勃卢恩斯理论到包含时间的积分.....	105
第六章 圆型限制三体问题及庞卡莱理论.....	107
1. 圆型限制三体问题的运动方程及雅科毕积分.....	107
2. 极坐标运动微分方程.....	110
3. 椭圆轨道参数运动微分方程.....	111
4. 庞卡莱理论.....	116
(A) H_0 的哈密式不为零的运动微分方程.....	116
(B) 庞卡莱定理的表述.....	117
(C) 证明 Φ_0 不是 H_0 的函数.....	118
(D) Φ_0 不能包含 q_1, q_2 变数的证明.....	119
(E) 一般情况下存在着单值函数的积分式是与 (C) 的结论矛盾的.....	120
(F) 系数 B_{m_1, m_2} 的限制条件的除去.....	122
(G) 庞卡莱定理的推导.....	123
第七章 拉格朗日的三体定型运动.....	124
1. n 体的定型运动关系式.....	124
2. 三体定型运动的基本条件.....	126
3. 等边三角形定型运动, 脱罗行星团.....	127
4. 三体直线形定型运动.....	128
5. 限制三体问题的三角形定型运动的稳定性.....	129
6. 限制直线定型运动的三种情况.....	135
7. 限制直线定型运动的不稳定性.....	136
第八章 具离心势能能曲面.....	140
1. 圆型限制三体问题的各种拉格朗日方程.....	140

(A) 地心坐标系的拉格朗日方程	140
(B) 轉动地心坐标系	142
(C) 轉动质心坐标系	143
2. 具离心势位函数及其一阶和二阶导数	145
3. $y = 0$ 平面上的具离心势位能曲线	146
4. ρ_k 和 σ_k 的极限值和不等式	149
5. $U(x, 0)$ 的极小值大小的比較	153
6. 具离心势位能曲面上仅有的五个动平衡点	154
7. 等位线和质点存在区域图	156
第九章 碰撞問題和答案的正規化	158
1. 动力方程的級数解法	158
2. 庞卡萊复数時間变换式	159
3. R 的等式和不等式. 孙德曼不等式	161
4. 发生一起碰撞的条件	166
5. 碰撞时的极限式	167
6. 三体問題的三质点碰撞	169
7. 用局部匀化变数的变换来正規化实数奇异点	173
第十章 二自由度动力方程的复变数变换	180
1. 二自由度动力方程的复变数变换式	180
2. 有心力作用下一质点的运动	185
3. 欧勒二心引力問題	190
4. 平面圓型限制三体問題的正規化	198
(A) 用代数函数变换式正規化一个奇异点	199
(B) 用超越函数变换式正規化二个奇异点	201
第十一章 空間限制三体問題	203
1. 空間圓型限制三体問題的微分方程	203
2. 一质点在等質量双星間的直綫运动	204
3. 瞬时面和速度短矢的欧勒角表式	206
4. 质点作近于平面曲线的运动求解法	207
附录	210
I. 降阶法 I(B) 的 H' 函数求法	210
II. 降阶法 I(B) 的动量矩积分	213
参考文献	214

第一章 n 体問題的一些基本知識

n 体問題是天体力学中最一般性的基本問題。它包括二体問題 ($n = 2$) 和三体問題 ($n = 3$)。其中二体問題是很容易求解的，但是对三体問題数学家們就遇到了困难。这問題至今尚未完全解决。以往天体力学中解决三体問題是靠近似的摄动理論，这方法在旧天文学中占有极重要的地位。一般性的三体問題仅应用于月球运动的理論。自 1750 年至 1927 年关于三体問題的論文已超过八百多篇。这些論文的作者大多是历史上有名的数学家。自从苏联宇宙火箭发射成功后，三体問題就显示出它在現今星际航行問題上的重要地位。預定宇宙火箭的飞行路綫和掌握它的运动規律就需要应用“限制三体問題的理論”，利用电子計算机近似地逐步地算出宇宙火箭各時間的位置。

为了研究宇宙火箭和人造月球卫星的运行，首先應該掌握三体問題的有關知識。在此順便提出 n 体問題。在这章中导出的方程和关系式，只要令 $n = 3$ ，就得到三体問題的对应表式。

1. n 体問題的提法及其运动微分方程

所謂 n 体問題可表述如下：

在空間中有 n 个質点，它們相互之間的作用力是万有引力，已知它們在 t_0 时的位置和速度，求它們在任何时 t 的位置和速度。

設 P_1, P_2, \dots, P_n , n 个質点，它們的质量分別是 m_1, m_2, \dots, m_n ；它們对某慣性坐标系 $oxyz$ 的坐标分別是 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ ；对原点 O 的矢径分別是 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ 。質点 P_i 与質点 P_j 之間的距离 $\overline{P_i P_j}$ 表为 r_{ij} ，那么 P_i 質点与 P_j 質点的作用力的大小是

$$F_{ij} = \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}^2}, \quad (1.1)$$

其中 $\gamma = 6.66 \times 10^{-8}$ (厘米, 克, 秒单位制)。

質点 P_j 作用于 P_i 的引力的方向是沿 $\overrightarrow{P_i P_j}$ 。将 $\overrightarrow{P_i P_j}$ 表为 \mathbf{r}_{ij} ，那么由图 1 有

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = -(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\mathbf{r}_{ji}, \quad (1.2)$$

于是 P_j 作用于 P_i 的引力可写为

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}. \quad (1.3)$$

現在已知 t_0 时各質点的位置和速度：

$$(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}); \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)_0, \left(\frac{dy_i}{dt} \right)_0, \left(\frac{dz_i}{dt} \right)_0 \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

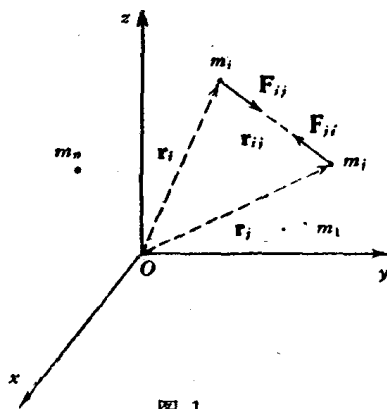


图 1

求各质点的运动规律,也就是求任何时候 t 的各质点位置和速度.

在(1.1)中与万有引力常数 γ 有关的物理量有力 F_{ij} , 质量 m , 距离 r_{ij} . γ 的量纲是 $L^3 T^{-2} M^{-1}$. 所以我们可以适当地选择 L, T, M 三种单位, 使 $\gamma = 1$, 而且尚保留再选择一种物理量的某大小为单位量的自由. 例如研究宇宙火箭的运动, 当它在月球和地球之邻近区域时, 可令月球和地球的质量和为 1.

为以后式子写法上的简便起见, 我们应用 $\gamma = 1$ 的单位制. 这样公式(1.3)变成

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}. \quad (1.4)$$

现在证明: 若以各质点都在无穷远的位能当作 0, 那么各质点系在有限空间内的总位能是

$$V = - \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_4}{r_{14}} + \dots + \frac{m_1 m_n}{r_{1n}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_2 m_4}{r_{24}} + \dots + \frac{m_2 m_n}{r_{2n}} + \dots + \frac{m_{n-1} m_n}{r_{n-1, n}} \right) \quad (1.5a)$$

或

$$V = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (n \geq j > i), \quad (1.5b)$$

证: 设想起初各质点都在无穷远, 此时质点系位能是 0. 然后将 P_1, P_2, \dots, P_n 各质点顺次一个个平衡地移到有限空间的 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ 处, 求出引力所作之总功, 这总功的值便是所求的位能的值.

各质点在无限远处相互之距离为无穷大, 所以 P_1 与其它各质点的距离 $r_{1i} = \infty$, 所以由(1.1) $F_{1i} = 0$, 因而将 P_1 自无穷远移到 \mathbf{r}_1 无需作功. 所以只有一质点 P_1 在有限空间的位能为 0.

现在将 P_2 自无穷远移至 \mathbf{r}_2 . 则因 P_2 受着 P_1 的引力 \mathbf{F}_{21} , 所以必须加一个 $(-\mathbf{F}_{21})$ 之力于质点 P_2 , 使它自无穷远平衡地移至 \mathbf{r}_2 处. 设外力所作之功为 A_2 , 则

$$A_2 = - \int_{\infty}^{r_2} \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 = - \int_{\infty}^{r_2} (X_{21} dx_2 + Y_{21} dy_2 + Z_{21} dz_2),$$

其中

$$\left. \begin{aligned} X_{21} &= - \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \frac{x_2 - x_1}{r_{21}}, \\ Y_{21} &= - \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \frac{y_2 - y_1}{r_{21}}, \\ Z_{21} &= - \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \frac{z_2 - z_1}{r_{21}}, \end{aligned} \right\}$$

故

$$A_2 = m_1 m_2 \int_{\infty}^{r_2} \frac{1}{r_{21}^3} [(x_2 - x_1) dx_2 + (y_2 - y_1) dy_2 + (z_2 - z_1) dz_2].$$

因 P_1 质点在 \mathbf{r}_1 使保持不动, 故 $dx_1 = dy_1 = dz_1 = 0$. 于是 A_2 又可写成

$$\begin{aligned}
A_2 &= m_1 m_2 \int_{\infty}^{r_2} \frac{1}{r_{21}^3} [(x_2 - x_1)d(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)d(y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)d(z_2 - z_1)] \\
&= m_1 m_2 \int_{\infty}^{r_2} \frac{1}{2r_{21}^3} d[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \\
&= m_1 m_2 \int_{\infty}^{r_{21}} \frac{1}{2r_{21}^3} d(r_{21}^2) = m_1 m_2 \int_{\infty}^{r_{21}} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} \\
&= m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r_{21}} \right]_{\infty}^{r_{21}} = -\frac{m_1 m_2}{r_{21}}.
\end{aligned}$$

現在再将 P_3 平衡地移动到 r_3 . 为此必须加 $(-F_{31})$ 及 $(-F_{32})$ 之力于 P_3 , 用以平衡 P_1 质点和 P_2 质点对 P_3 的引力. 加此二力于 P_3 , 移动 P_3 使它由无穷远至 r_3 处, 所作之功表以 A_3 , 则 A_3 为

$$\begin{aligned}
A_3 &= \int_{\infty}^{r_3} [(X_{31} + X_{32})dx_3 + (Y_{31} + Y_{32})dy_3 + (Z_{31} + Z_{32})dz_3] \\
&= -m_1 m_3 \int_{\infty}^{r_3} \frac{1}{r_{31}^3} [(x_3 - x_1)dx_3 + (y_3 - y_1)dy_3 + (z_3 - z_1)dz_3] \\
&\quad - m_2 m_3 \int_{\infty}^{r_3} \frac{1}{r_{32}^3} [(x_3 - x_2)dx_3 + (y_3 - y_2)dy_3 + (z_3 - z_2)dz_3] \\
&= -m_1 m_3 \int_{\infty}^{r_{31}} \frac{dr_{31}}{r_{31}^2} - m_2 m_3 \int_{\infty}^{r_{32}} \frac{dr_{32}}{r_{32}^2} \\
&= -\left(\frac{m_1 m_3}{r_{31}} + \frac{m_2 m_3}{r_{32}} \right),
\end{aligned}$$

故 P_1, P_2, P_3 三质点在有限空间的总位能为

$$V_3 = A_2 + A_3 = -\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right).$$

显然上法可推广于 n 个质点而得到 (1.5a).

我們也可以将 (1.5a) 写成更对称的形式如下:

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{1}{2} \left\{ 0 + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \dots + \frac{m_1 m_n}{r_{1n}} \right. \\
&\quad + \frac{m_2 m_1}{r_{21}} + 0 + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \dots + \frac{m_2 m_n}{r_{2n}} \\
&\quad + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{m_3 m_2}{r_{32}} + 0 + \dots + \frac{m_3 m_n}{r_{3n}} \\
&\quad \dots \dots \dots \\
&\quad \left. + \frac{m_n m_1}{r_{n1}} + \frac{m_n m_2}{r_{n2}} + \frac{m_n m_3}{r_{n3}} + \dots + 0 \right\}, \tag{1.5c}
\end{aligned}$$

或

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (i \neq j). \tag{1.5d}$$

作用于质点 P_i 的力是

$$\sum_j \mathbf{F}_{ij} = \sum_j \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \quad (j \neq i), \quad (1.6)$$

所以 n 体问题的运动微分方程可写为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \quad (j \neq i; j, i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.7a)$$

其中 $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 是 \mathbf{r}_i 对时间 t 的二次导数, 它表示质点 m_i 的加速度. 如将 (1.7a) 写成分量式则有

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (x_j - x_i), \\ m_i \ddot{y}_i &= \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (y_j - y_i), \\ m_i \ddot{z}_i &= \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (z_j - z_i). \end{aligned} \right\} \quad (1.7b)$$

现在应用矢量分析中的梯度运算符

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{k},$$

那么

$$\begin{aligned} -\nabla_i V &= -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{k} \right) V \\ &= -\nabla_i \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \right) = m_i \sum_j m_j \nabla_i \left(\frac{1}{r_{ij}} \right) \\ &= m_i \sum_j m_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{k} \right) \frac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ &= m_i \sum_j \frac{m_j}{r_{ij}^3} [(x_j - x_i)\mathbf{i} + (y_j - y_i)\mathbf{j} + (z_j - z_i)\mathbf{k}] \\ &= \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \sum_j \mathbf{F}_{ij} \quad (j \neq i). \end{aligned}$$

所以 n 体问题的动力方程 (1.7a) 可简写为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i V \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.8a)$$

或写成分量式:

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}. \quad (1.8b)$$

如定义 $U = -V$ 的坐标函数为力函数, 即

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (1.9)$$

那么 (1.8a) 和 (1.8b) 可分别写为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i U \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.10a)$$

及

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (1.10b)$$

上式是 $3n$ 个二阶微分方程, 所以这质点系的运动微分方程组是 $6n$ 阶。 $6n$ 阶的微分方程组, 它的解案包括 $6n$ 个任意常数。 这 $6n$ 个常数由初位置 (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) 和初速度 $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy_i}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz_i}{dt}\right)_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 完全确定。 我们要想掌握 n 体问题的运动规律, 就要解微分方程组 (1.10b), 求出的解案具有下面的形式:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(x_{10}, y_{10}, z_{10}; x_{20}, y_{20}, z_{20}; \dots; x_{n0}, y_{n0}, z_{n0}; \\ &\quad v_{1x0}, v_{1y0}, v_{1z0}; \dots; v_{nx0}, v_{ny0}, v_{nz0}; t), \\ y_i &= y_i(x_{10}, y_{10}, z_{10}; x_{20}, y_{20}, z_{20}; \dots; x_{n0}, y_{n0}, z_{n0}; \\ &\quad v_{1x0}, v_{1y0}, v_{1z0}; \dots; v_{nx0}, v_{ny0}, v_{nz0}; t), \\ z_i &= z_i(x_{10}, y_{10}, z_{10}; x_{20}, y_{20}, z_{20}; \dots; x_{n0}, y_{n0}, z_{n0}; \\ &\quad v_{1x0}, v_{1y0}, v_{1z0}; \dots; v_{nx0}, v_{ny0}, v_{nz0}; t). \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.11)$$

2. n 体问题的十个一次积分

我们所研究的“ n 体问题”的空间中, 假想只存在着这 n 个质点作为讨论基础, 所以这 n 个质点的质点系无外力和外力矩的作用。 应用理论力学中大家熟知的“动量守恒定理”, “质心运动定理”, “动量矩守恒定理”, 立刻得到 (1.10b) 的 9 个一次积分。 n 体问题是可以发生碰撞现象的。 在没有碰撞的时候, n 个质点间只有万有引力一种相互作用的力。 从 (1.5d) 的推导知道万有引力存在着位函数 V , 它仅是质点位置坐标 (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 的函数。 V 的梯度就是作用力。 在这样的力作用下, 质点系的机械能不会耗损, 所以我们称它为保守系统 (Conservative system)。 这样又得到一个一次积分——能量积分。 合起来共十个一次积分。 这种积分对简化动力方程组 (1.10b) 起着很重要的作用。 对三体问题, 我们将专立一章来讨论。

由于这种积分对简化方程组的重要性, 在此再应用上节推得的 n 体问题的运动微分方程来推导这些一次积分, 以增加对这些积分的力学概念; 另一方面所得到的关系式, 可供以后讨论之用。

(A) 动量守恒定理及质心运动定理。

因

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

及

$$\mathbf{F}_{ji} = \frac{m_j m_i}{r_{ji}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

可见

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}. \quad (1.12)$$

上式表示: 质点与质点间的万有引力适合“反作用定律”。 我们在电动力学中知道: 运动着的电子与电子之间的相互作用力并不适合反作用定律。 (1.12) 也可以写成

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0. \quad (1.13)$$

应用上式, 我们将 (1.8a) 对脚标 i 求和得

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=1}^n \nabla_i V = - \sum_{i=1}^n \sum_j \mathbf{F}_{ij} = 0. \quad (1.14)$$

将上式对时间积分一次,即得动量守恒定理:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{c}_1, \quad (1.15a)$$

其中 \mathbf{c}_1 是常矢量. 上式可写成分量式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i &= c_{1x}, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i &= c_{1y}, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i &= c_{1z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15b)$$

将 (1.15a) 及 (1.15b) 对时间 t 再积分一次,得

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \quad (1.16a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i x_i &= c_{1x} t + c_{2x}, \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i &= c_{1y} t + c_{2y}, \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i &= c_{1z} t + c_{2z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16b)$$

上式就是所要求的关係式. 我們知道: 一个质点系总有一个“质心”. 质心的坐标定义为

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}, \quad (1.17)$$

其中

$$M = \sum_i m_i = \text{质点系总质量}. \quad (1.18)$$

所以 (1.16b) 可以写成

$$\left. \begin{aligned} M x_c &= c_{1x} t + c_{2x}, \\ M y_c &= c_{1y} t + c_{2y}, \\ M z_c &= c_{1z} t + c_{2z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

上式是质心的运动方程, 所以我們称这结果为“质心运动定理”. (1.15b) 和 (1.16b) 共六个一次积分.

(1.15a) 也可以写成

$$M \dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{c}_1, \quad (1.20)$$

即质心是等速直线地运动着。其特例 $\mathbf{c}_1 = 0$, 表示质心是静止的。事实上我们知道“运动是相对的”, 牛顿力学对任何惯性系统都同样成立。所以我们研究的坐标的原点固定在质心上, 而不失其普遍性。这样对以后的研究可以大大简化, 因对这种坐标有 $c_{1x} = c_{1y} = c_{1z} = c_{2x} = c_{2y} = c_{2z} = 0$ 。

(B) 动量矩守恒定理。

将 (1.7b) 的第二式两端同乘以 z_i , 第三式两端同乘以 y_i , 然后两式相减得

$$\begin{aligned} m_i(\dot{z}_i y_i - z_i \dot{y}_i) &= \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} [(z_j - z_i) y_i - z_i (y_j - y_i)] \\ &= \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (z_j y_i - z_i y_j). \end{aligned}$$

将上式两边对脚标 i 求和, 得

$$\sum_{i=1}^n m_i(\dot{z}_i y_i - z_i \dot{y}_i) = \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (z_j y_i - z_i y_j) = 0.$$

将上式对时间积分一次, 得

$$\sum_{i=1}^n m_i(z_i y_i - z_i \dot{y}_i) = c_{3x},$$

上式的真确性可以对时间微分来证明。上式中 c_{3x} 是积分常数。应用同样的运算再可得另二式, 现在集合如下:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i(\dot{z}_i y_i - z_i \dot{y}_i) &= c_{3x}, \\ \sum m_i(\dot{x}_i z_i - x_i \dot{z}_i) &= c_{3y}, \\ \sum m_i(\dot{y}_i x_i - y_i \dot{x}_i) &= c_{3z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

上式就是所要求的动量矩定理的一次积分式。(1.21)的三式可合写成矢量式如下:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{c}_3, \quad (1.22)$$

上式中 \mathbf{c}_3 是常矢量。上式表示 n 个质点对坐标原点的总动量矩是一个常矢量。常矢量具有方向的不变性。所以动量矩矢量在原点有确定不变的方向。通过原点作一个平面垂直 \mathbf{c}_3 。那么动量矩矢量对这个平面的投影是零。但不论 n 个质点如何运动, \mathbf{c}_3 的方向是永远不变的, 所以这个平面的位置在空间也是确定不变的。对于以质心为原点的惯性坐标系, 具有上述性质的平面是通过质心的一个固定平面, 我们称它为不变面, 见图 2。不变面的特性是“质点系的总动量矩垂直于这个平面”, 也就是质点系对于在这平面上的任一轴的动量矩分量是零。

对于太阳系也有一个不变面。太阳系的动量矩 98% 决定于四大行星: 木星, 土星, 天王星, 海王星。拉普拉斯 (Laplace) 曾建议以不变面作为太阳系的计算参考坐标面, 不过它在天体力学上的实用价值不大。下面研究三体问题的时候, 将用到“不变面”的概念。

现在附带说明一下, 一质点系对空间不同二点 O, O' 的动量矩关系式(图 3)。以

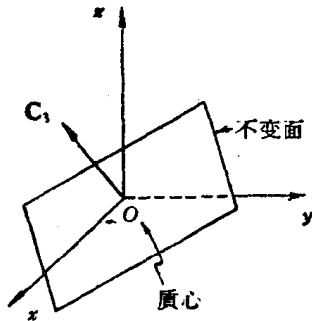


图 2

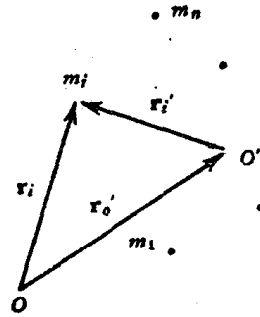


图 3

P_o 及 $P_{o'}$ 分别表示质点系对 O 及 O' 的动量矩, 那么由定义, 有

$$P_o = \sum_i r_i \times m_i \frac{dr_i}{dt}$$

及

$$P_{o'} = \sum_i r_i' \times m_i \frac{dr_i'}{dt},$$

以 $r_{o'}$ 表示 O' 对 O 的矢径, 则 $r_i' = r_i - r_{o'}$. 又因 O' 和 O 是假想静止着的, 所以 $r_{o'}$ 为常矢量, 而有 $\frac{dr_{o'}}{dt} = 0$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_i r_i' \times m_i \frac{dr_i'}{dt} &= \sum_i (r_i - r_{o'}) \times m_i \frac{d(r_i - r_{o'})}{dt} \\ &= \sum_i r_i \times m_i \frac{dr_i}{dt} - r_{o'} \times \sum_i m_i \frac{dr_i}{dt}, \end{aligned}$$

但

$$\sum_i m_i \frac{dr_i}{dt} = Mv_c,$$

故得 P_o 和 $P_{o'}$ 的关系式

$$P_{o'} = P_o - r_{o'} \times Mv_c. \quad (1.23)$$

若 $v_c = 0$, 则 $P_{o'} = P_o$, 即质点系的质心静止时, 则质点系对空间各点的动量矩都相同. 从这事实知道: 如果取固定于质心的惯性坐标系, 那么不变面垂直于质点系对这坐标空间中任一点的动量矩.

(C) 能量积分.

因 n 体问题的力学系统在不发生碰撞的时候是保守系统, 即存在着位函数 V , 所以可以得机械能守恒定律:

$$\frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V = h, \quad (1.24)$$

现在应用 (1.8b) 推导如下: 将 (1.8b) 顺次乘以 $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$, 然后三式相加再对脚标 i 求和得

$$\sum_i m_i (\dot{x}_i \dot{x}_i + \dot{y}_i \dot{y}_i + \dot{z}_i \dot{z}_i) = - \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \dot{z}_i \right),$$

即

$$\sum_i \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = - \frac{dV}{dt},$$

或

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V \right] = 0.$$

积分上式,即得

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V = h. \quad (1.25)$$

以 T 表示质点系的总动能,即

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

则(1.25)可写成

$$T + V = h, \quad (1.26)$$

或

$$T = h + U. \quad (1.27)$$

利用以上十个一次积分,可将 n 体问题的运动微分方程组自 $6n$ 阶降低十阶,成为 $6n - 10$ 阶. 关于三体问题利用这些积分的降阶法,以后专门一章来讨论.

3. 雅科毕公式

$\sum_i m_i r_i^2$ 可以定义为质点系对原点 O 的极转动惯量,用 R^2 表示,则有

$$R^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (1.28)$$

现在要证明的雅科毕公式是

$$\frac{d^2}{dt^2} R^2 = 4T + 2V. \quad (1.29)$$

上式的推导如下:将(1.8b)分别乘以 x_i, y_i, z_i , 然后相加,再对脚标 i 求和,得

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i + z_i \ddot{z}_i) = - \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial V}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial V}{\partial z_i} \right). \quad (1.30)$$

因

$$x_i \ddot{x}_i = \frac{d}{dt} (x_i \dot{x}_i) - \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x_i^2) - \dot{x}_i^2,$$

同样

$$y_i \ddot{y}_i = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (y_i^2) - \dot{y}_i^2,$$

$$z_i \ddot{z}_i = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (z_i^2) - \dot{z}_i^2.$$

将上三式相加,则有

$$(x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i + z_i \ddot{z}_i) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

将上式两边乘以 m_i 然后对 i 求和,得

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{2} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right] - \sum_{i=1}^n m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (1.31)$$

从 V 的表式 (1.5c) 知道: V 是 x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的 (-1) 阶齐次函数. 关于齐次函数有著名的欧勒定理: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 x_1, x_2, \dots, x_n 的 n 次齐次函数的充要条件是下式成立:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = nf. \quad (1.32)$$

将上式应用于位函数 V , 则有

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial V}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) = (-1)V, \quad (1.33)$$

应用 (1.31) 和 (1.33), 则 (1.30) 变成

$$\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{2} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right] - \sum_{i=1}^n m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = V,$$

即

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} R^2 - 2T = V,$$

故

$$\frac{d^2}{dt^2} R^2 = 4T + 2V.$$

应用能量方程 (1.26), 上式又可写成

$$\frac{d^2}{dt^2} R^2 = 2(T + h), \quad (1.34)$$

其中 h 是质点系的总机械能, 可正可负; 而动能 T 恒为正量. 当 $T > |h|$ 时不论 h 为正为负而有

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) > 0.$$

故 $\frac{d}{dt} (\sum m_i r_i^2)$ 随时间无限增大, 因之至少有一质点的 r_i 无限地随时间增大. 这样, 一质点系中有质点随时间增大而运动到无限远空间中去的情况下, 这质点系称为发散系. 若某质点系不是发散的, 即质点系的各质点始终保持在有限空间里, 那么自 (1.34) 必须 $T + h < 0$. 因 $T > 0$, 故必须有 $h < 0$, 及 $|h| > T$. 这是一质点系不是发散系的必须条件. 当然这条件不是充分的.

4. 三体问题的运动方程及其积分

由 (1.5a), 三体问题的位函数是

$$V = - \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right), \quad (1.35)$$