

工程结构抗震

曹 宏 李秋胜 李桂青 著

气 象 出 版 社

工程结构抗震

曹 宏 李秋胜 李桂青 著

气 象 出 版 社

(京) 新登字 046 号

内 容 简 介

本书着重介绍了建筑抗震设计新规范 (GBJ11—89) 的特点及其与旧规范 (TJ11—78) 的比较, 系统阐述了工程结构抗震设计的原理和理论基础, 推导了新规范中的一些主要公式。全书由八章组成, 第一章为结构动力学基础, 第二至四章为抗震设计原理和计算方法, 第五至八章介绍了几类结构的抗震设计方法, 其内容密切结合抗震新规范 GBJ11—89 的有关规定。

本书可供工业与民用建筑专业的本科生、专科生、工程技术人员和科技工作者参考。

工程结构抗震

曹 宏 李秋胜 李桂青 著

责任编辑 林雨晨

* * *

气象出版社出版

(北京海淀区白石桥路46号 邮编100081)

北京科技印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经售

开本: 787×1092 1/16 印张: 15.75 字数: 400千字

1993年1月第一版 1993年1月第一次印刷

印数: 1—4000册 定价: 12.00 元

ISBN 7—5029—1137—5/TU·0001

序 言

著者撰写这部书的目的是想为广大土建工程技术人员和大学生提供一本工程结构抗震的中级读物，简要而又比较系统地介绍工程结构抗震计算理论、计算方法和抗震设计的基本理论和方法。根据著者的教学经验，可以肯定书中的主要内容易于为土建类大学生、专科、甚至中专生以及一般工程技术人员所接受。

本书共分八章。第一章是结构动力学基础，着重介绍弹性体系自由振动的计算方法和抗震计算所必需的基础知识。在写法上力求概念清晰，通俗易懂，并特别注重阐述结构动力分析的基本概念和特点，静力与动力计算的联系，普通代数与矩阵代数的联系。最重要的几节还提出了学习要点，进行详细的总结，列举大量实例。第二章是地震动力概论，内容简明，只介绍了一些与抗震设计有关的几个基本概念，所占篇幅很小。第三章是工程结构抗震设计原理，着重介绍了抗震设计总则、基本指导思想、概念设计、新规范中地震作用计算方法的理论基础以及新、旧（TJ11—78）规范的对比等。第四章是结构地震反应的时程分析法，详细介绍和推导了比较常用的几种分析方法。第五章至第八章介绍了几种结构的抗震设计，包括多层砌体房屋、多层和高层钢筋混凝土房屋、单层工业厂房和高耸结构的抗震设计，其内容密切结合新规范的有关规定。

参加本书工作的还有李芝艳、欧四媛工程师，王东炜、谢伟平、李大望、徐家云博士生以及张武英同志，在此谨致谢意。

限于著者水平，书中必定存在某些不足，甚至错误，敬请读者指正。

武汉工业大学
工程结构抗震研究所
曹 宏
李秋胜
李桂青
1992 年 4 月

、 常用符号

除特殊说明者外，本书所用各符号代表意义如下：

- A, F —— 截面面积
 $[A]^{-1}$ —— $[A]$ 的逆矩阵
 $[A]^T$ —— $[A]$ 的转置矩阵
 $[c]$ —— 阻尼矩阵
 E —— 杨氏弹性模量
 f_j —— 第 j 振型的自振频率
 f_v —— 砌体的抗剪强度设计值
 G —— 剪切弹性模量
 g —— 重力加速度
 $[I]$ —— 单位矩阵
 I_m —— 惯性力
 J —— 截面惯性矩
 J_0 —— 转动惯量
 $[K]$ —— 刚度矩阵 (方阵)
 $K = \frac{GF}{\mu_s}$ —— 剪切刚度
 K_j —— 第 j 振型的广义刚度
 M —— 力矩 (弯矩) 或砂浆强度等级
 M_j —— 第 j 振型的广义质量
 m —— 集中质量 (在个别地方代表力矩分布集度)
 $[m]$ —— 质量矩阵 (方阵)
 $\bar{m}_x, \bar{m}(x), \bar{m}$ —— 质量分布集度
 n —— 衰减系数 (在有些章节内代表机器每分钟的转数或具有其它意义的整数)
 $P(t)$ —— 随时间变化的集中荷载
 P_0 —— 集中荷载的幅值
 P_j —— 第 j 振型的荷载参数
 p, q —— 荷载分布集度
 Q —— 剪力
 Q_i, Q_0 —— 地震荷载
 Q_j —— 第 j 振型的广义力
 $q_j, q_j(t)$ —— 第 j 振型的广义坐标 (或第 j 广义坐标)、正则坐标
 R —— 阻尼力
 r —— 半径
 r_{ij}, δ_{ij} —— 刚度系数、柔度系数
 S —— 恢复力
 T_j —— 第 j 振型的自振周期
 t —— 时间

目 录

第一章 结构动力学基础	(1)
§ 1.1 概论	(1)
§ 1.2 单自由度体系的振动	(1)
§ 1.3 多自由度体系的自由振动	(23)
§ 1.4 等截面弹性直杆的弯曲自由振动	(40)
§ 1.5 等截面杆的剪切振动	(48)
§ 1.6 等截面杆的纵向及扭转自由振动	(53)
§ 1.7 无限自由度体系的振型正交性	(56)
§ 1.8 弹性体系的强迫振动	(58)
第二章 地震概论	(66)
§ 2.1 概述	(66)
§ 2.2 地震的成因与类型	(67)
§ 2.3 地震的震级与烈度	(67)
§ 2.4 地震造成的破坏现象	(70)
第三章 工程结构抗震设计原理	(72)
§ 3.1 抗震设计的总则和基本要求	(72)
§ 3.2 抗震结构的概念设计	(77)
§ 3.3 场地、地基和基础	(81)
§ 3.4 结构动力特性	(92)
§ 3.5 建筑结构整体试验方法	(102)
§ 3.6 地震作用	(109)
§ 3.7 结构抗震验算	(125)
第四章 结构地震反应的时程分析法	(132)
§ 4.1 概述	(132)
§ 4.2 恢复力模型	(133)
§ 4.3 单自由度弹塑性体系	(135)
§ 4.4 多自由度弹塑性体系	(145)
第五章 多层砌体房屋的抗震设计	(151)
§ 5.1 震害特点及其分析	(151)
§ 5.2 建筑、结构布置和选型	(152)
§ 5.3 地震作用和截面验算	(155)
§ 5.4 多层砖房构造措施	(161)
第六章 多层和高层钢筋混凝土房屋	(167)
§ 6.1 震害特点	(167)
§ 6.2 设计原则与一般规定	(168)
§ 6.3 多层和高层建筑自由振动的计算	(173)

§ 6.4 剪力墙的延伸率 (186)

§ 6.5 高层建筑的地震作用 (187)

§ 6.6 框架结构的抗震设计 (189)

§ 6.7 抗震构造措施 (196)

第七章 单层工业厂房..... (203)

§ 7.1 震害概述 (203)

§ 7.2 抗震设计的一般规定 (205)

§ 7.3 自由振动计算 (206)

§ 7.4 抗震构造措施 (220)

第八章 高耸结构的抗震设计..... (223)

§ 8.1 实测结果及震害概况 (223)

§ 8.2 电视塔模型试验 (224)

§ 8.3 武汉电视塔动力特性实测和分析 (232)

§ 8.4 烟囱的抗震设计 (238)

参考文献..... (241)

第一章 结构动力学基础

§ 1.1 概论

结构动力学是研究动态作用下结构或构件的强度、刚度和稳定性的一门学科。

所谓动态作用，是指对结构或构件产生不可忽略的加速度的作用，如突加荷载、冲击荷载、吊车荷载、设备振动、地震、基础运动、脉动风压、爆炸等。

如所周知，结构加速度与对应质量的乘积就是惯性力的大小。因而在结构动力学中的控制方程，即动力方程无不涉及到惯性力，涉及到质量与加速度。一些重要定义、概念也要涉及到质量或加速度等。例如，弹性体系的自由度就是定义为它在一切可能变形中，决定其所有质点位置所需要的独立几何参数的数目。这里首先特别要注意的是所有质点的位置；其次是一切可能的变形；第三是独立几何参数的数目。由此定义可见，对于一切弹性体系只要考虑其分布质量的影响，均为无限自由度体系。

弹性体系的振动伴随着能量耗散，如无外部能源维持，总是要衰减的，直至振动消失。一切引起振动衰减的因素统称为阻尼。这些因素大至可分为以下几种：

(1) 由于材料的内摩擦作用而使机械能逐渐转化为热能消失在周围介质中，这是能量耗散的重要原因。

(2) 周围介质对振动的阻力。

(3) 节点及构件、支座联接间的摩擦阻力。

(4) 通过支座基础散失一部分能量。

在结构动力计算中，通常采用静力弹性模量作为动力弹性模量。基于这一原则，计算钢、木结构的刚度就与静力问题完全相同了。至于计算钢筋混凝土构件的动力刚度时，一般可认为整个截面参加工作。由于其受拉与受压的弹性模量相近，一般采用受压弹性模量。当正反向的刚度不同时，可近似地取平均值。确定实际建筑物的刚度比较复杂，因为它不仅取决于主体结构，而且还与各种非承重构件有关，特别是内外墙的影响很大。而这些非承重构件的构造、连接及受力性能往往是不大明确的，因而建筑物的动力刚度很难用计算方法求出。目前比较切实可行的办法，是通过对建筑物大量分阶段（即施工过程中的各阶段）的实测，掌握各种构件对结构刚度的独立的及联合的影响，提出合理计算简图，并根据实测结果反演实测的刚度。

§ 1.2 单自由度体系的振动

研究单自由度体系的振动具有重大的意义，这是由于：

(1) 单自由度体系分析起来比较简单，又能揭示出一般线性振动所共有的规律性。

(2) 它是从客观实际中抽象出来的一种理想模型，不少工程结构可直接按此简单体系进行分析。

(3) 利用广义坐标可将任何线性体系的强迫振动简化为一个单自由度或一系列单自由

度体系来研究。

因此，对于单自由度体系的振动问题是需要比较仔细讨论的。

1.2.1 不计阻尼时的自由振动

图 1.1 所示的体系，如果不计悬臂杆的质量，则为单自由度体系。若施加一外力（或其他干扰），使质点偏离平衡位置，然后突然去掉外力，则体系将发生振动。这种振动称为自由振动。为了更深刻地了解阻尼的作用，我们把单自由度体系分成无阻尼与有阻尼两种情况分别在本小节及下小节讨论，并指出各自的特点。下面讨论无阻尼自由振动（图 1.1）。

设体系作无阻尼自由振动时质点在瞬时 t 偏离平衡位置的位移为 u ，它是 t 的函数。由于体系不受外力作用，故质点 m 所受力只有一个，即杆端对质点 m 的作用力。这个力是力图使质点恢复到平衡位置的，故称为恢复力，用 S 表示。因 S 与 u 的方向相反，故：

$$S = -r_{11}u$$

式中， r_{11} 为使悬臂杆上端沿质点运动方向移动单位距离所需的外力，称为体系的刚度系数。

显然， $r_{11} = 1/\delta_{11}$ ， δ_{11} 为在悬臂杆上端沿质点运动方向作用一单位力而沿力的方向所产生的位移，称为体系的柔度系数。

按牛顿第二定律，质点的运动方程为：

$$mu = -r_{11}u$$

上式也可写成：

图 1.1 单自由度体系自由震动示意图

$$r_{11}u + (-mu) = 0 \quad (1-1)$$

式(1-1)表明，质点所受的外力与一个假想力，即惯性力相平衡。这就是说，只要在质点上加上一个惯性力 $(-mu)$ ，就可以把动力问题化为静力问题来解决。当然，这样的平衡方程式[即式(1-1)]应该称为“动力方程式”。用这样的方法来解决动力问题，称为“动静法”。由于大家对静力学的方法比较熟悉，因而以后我们主要采用动静法。

下面讨论方程(1-1)的解答。将式(1-1)改写为：

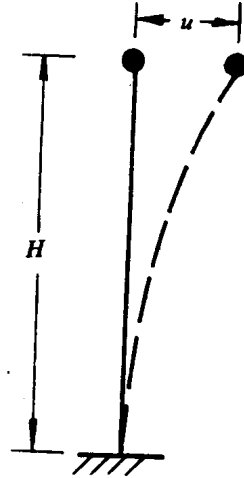
$$u + \omega^2 u = 0$$

式中：

$$\omega^2 = \frac{r_{11}}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{r_{11}}{m}}$$

上式的通解为：

$$u(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (1-2)$$



微分上式可得运动速度:

$$\dot{u}(t) = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t \quad (1-3)$$

式中的常数 A_1, A_2 由初始条件确定。若 $t=0$ 时, $u(0)=u_0, \dot{u}(0)=v_0$, 则可得 $A_1=u_0, A_2=v_0/\omega$, 亦即:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1-4)$$

式中 u_0, v_0 分别为初位移及初速度; 式中第一项与第二项分别为初位移与初速度产生的自由振动。如令:

$$u_0 = A \cos \alpha \quad \frac{v_0}{\omega} = A \sin \alpha$$

则式(1-4)变为:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \alpha) \quad (1-5)$$

或:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \gamma) \quad (1-6)$$

式中:

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{v_0}{\omega u_0}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (1-7)$$

图 1.2 所表示的 $u(t)-t$ 曲线通常称为位移时程曲线。从以上公式或曲线不难看出, 体系的自由振动是一个周期性的振动。在振动过程中, 质点离开平衡位置的最大位移 A 称为振动的振幅, 而完成一个完整的循环所需要的时间 T 称为振动的周期, 通常以秒为单位。

T 当然满足下面的条件:

$$\sin[\omega(t+T) + \gamma] = \sin[(\omega t + \gamma) + 2\pi]$$

即

$$\omega(t+T) + \gamma = \omega t + \gamma + 2\pi$$

则

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-8)$$

每秒内的振动次数称为振动频率, 单位为赫, 如以 f 表示, 则:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{11}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{u_w}} \quad (1-9)$$

式中 u_w 为质点 m 所受重力 mg 沿质点运动方向作用时使杆端产生的沿质点运动方向的静力位移。

显然, ω 为 2π 秒内的振动次数, 称为不计阻尼时的圆频率:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{r_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{u_w}} \quad (1-10)$$

因为我们在动力学中常用圆频率, 故一般把“圆频率”简称为“频率”, 并且把自由振动的频率简称为“自振频率”。

由式(1-4)、(1-9)、(1-10)等可以看出:

- (1) 初位移与初速度均可产生自由振动。初位移产生的自由振动, 其振幅即为初位移本身, 而初速度产生的自由振动, 其振幅除与初速度有关外, 还与结构的自振频率有关。
 - (2) 自振频率与初始条件无关。
 - (3) 体系的刚度愈大 (即 r_{11} 愈大), 则自振频率愈大。
 - (4) 体系的质量愈大, 则自振频率愈小。
- 总之, 自振频率只决定于结构本身的刚度及质量分布情况, 这是结构的一种固有属性, 所以也常把“自振频率”称为“固有频率”, 它是结构本身的一个极为重要的动力特性。下面用几个例子说明计算单自由度体系自振频率的方法。

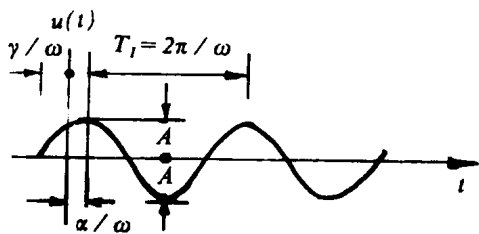


图 1.2 $u(t) - t$ 位移时程曲线

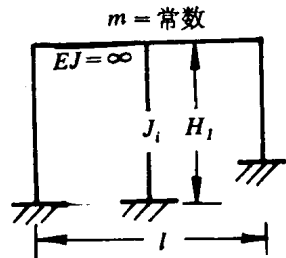


图 1.3 刚架自振频率

例 1.1 求图 1.1 所示单自由度体系的自振频率。如所知, 悬臂梁的侧移刚度为:

$$r_{11} = \frac{3EJ}{H^3}$$

式中, H 为悬臂梁的高度; J 为其截面惯性矩。将 r_{11} 代入式(1-10), 即得自振圆频率:

$$\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{H^3 m}}$$

例 1.2 求图 1.3 所示刚架的自振频率。

若柱的质量与横梁质量 (包括横梁所承受的质量), 比较起来很小, 可以略去不计, 则此体系是单自由度体系。

总质量 $m = \bar{m}l$; $\bar{m}$ 为横梁单位长度的质量, l 为横梁长度。

刚度系数为各柱刚度系数之总和:

$$r_{11} = \sum_i \frac{12EJ_i}{H^3}$$

式中 H_i 、 J_i 分别为第 i 柱的长度及其截面惯性矩。

将 m 、 r_{11} 代入式(1-10), 即得自振 (圆) 频率。

对于具有变截面柱的刚架、排架等, 只是其刚度系数不同而已。

以上所讨论的问题及例子, 虽然都是简化为单质点振动的情形, 但所推得的公式及结论对于任何单自由度体系都是适用的, 只是其中参数的意义不同。例如, 对于刚体旋转振动的情形, 式(1-1)中的 u 应该改为角位移, 质量 m 则应改为转动惯量, 而 r_{11} 则为使体系旋转单位角度所需的力矩。

例 1.3 设刚性基础的重量为 W ，重心至基底距离为 H_0 ，基础只能绕 x 轴转动，转动惯量为 J_0 ，求自振频率(见图 1.4)。

问题在于计算抗弯刚度系数 r_{11} 。当基础绕 x 轴转动一个角度 φ 时，地基将产生变形及反力。显然，地基的位移为 $y\varphi$ ，而地基反力 P 可以认为与位移成正比，即：

$$p = C_{\varphi} y \varphi$$

式中 C_{φ} 为地基土非均压系数。

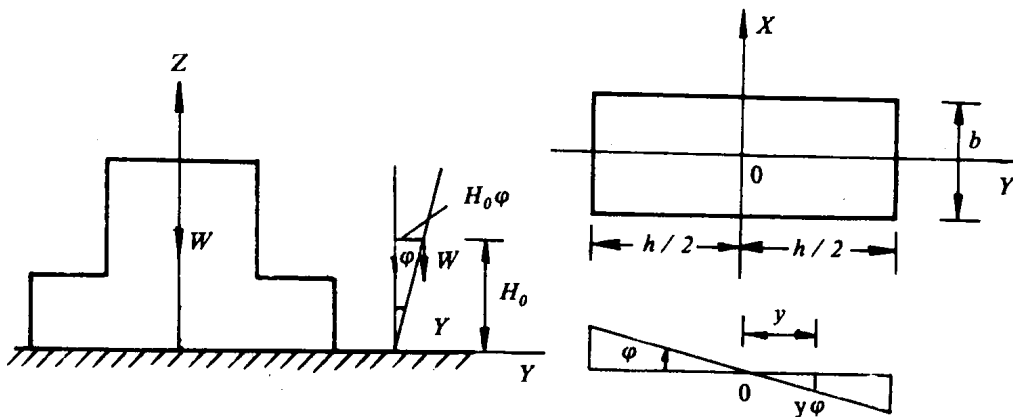


图 1.4 体系倾复力矩示意图

不难看出，地基反力组成一个力矩，并力图使基础恢复到平衡位置。容易证明恢复力矩为：

$$M_s = C_{\varphi} \cdot \varphi \cdot \frac{bh^3}{12} = C_{\varphi} J_x \varphi$$

式中， h 、 b 分别为矩形基础底面的长与宽； J_x 为基础底面积对 x 轴的惯性矩。但当基础旋转一个角度 φ 时，基础重量 W 将产生一个倾复力矩为 $WH_0\varphi$ (参见图 1.4)。因此使体系旋转一个角度 φ 所需的力矩 M 应为：

$$M = (C_{\varphi} J_x - WH_0) \varphi$$

令 $\varphi=1$ ，即得抗扭转刚度系数：

$$r_{11} = C_{\varphi} J_x - WH_0$$

这样，只要把式(1-10)中的 m 换成 J_0 ，就可以求得自振(圆)频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{\varphi} J_x - WH_0}{J_0}} \quad (1-11)$$

一般说来，当 H_0 不很大时，上式中 WH_0 是可以略去不计的。

例 1.2 属于刚度并联或者说弹簧并联(每根柱相当于一个弹簧)的情形，其总刚度为各弹簧的刚度之和。若以 $r_{11}^{(i)}$ 代表第 i 个弹簧的刚度，则总刚度：

$$r_{11} = \sum_i r_{11}^{(i)}$$

而自振(圆)频率：

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum_i r_{11}^{(i)}}{m}} = \sqrt{\sum_i \omega_{(i)}^2} \quad (1-12)$$

式中 $\omega_{(i)}$ 为只有弹簧 i 时的自振圆频率。可见，对于弹簧并联的情形，自振频率等于各单个弹簧体系的自振频率的平方和的方根。下面讲一下弹簧串联的情形（图 1.5）。设两个弹簧的刚度分别为 $r_{11}^{(1)}$ ， $r_{11}^{(2)}$ ，则在质点 m 的静力平衡位置上作用一单位力时，两个弹簧的伸长（自静力平衡位置算起）为：

$$\delta_{11}^{(1)} = \frac{1}{r_{11}^{(1)}}, \quad \delta_{11}^{(2)} = \frac{1}{r_{11}^{(2)}}$$

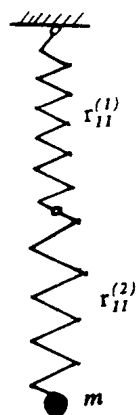


图 1.5 弹簧串联时的刚度

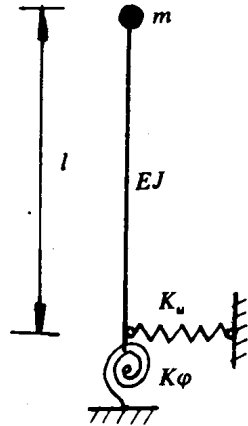


图 1.6

质点 m 的总位移 δ_{11} 为：

$$\delta_{11} = \delta_{11}^{(1)} + \delta_{11}^{(2)}$$

设两弹簧的总刚度为 r_{11} ，则：

$$\frac{1}{r_{11}} = \frac{1}{r_{11}^{(1)}} + \frac{1}{r_{11}^{(2)}} = \frac{r_{11}^{(1)} + r_{11}^{(2)}}{r_{11}^{(1)} r_{11}^{(2)}}$$

或：

$$r_{11} = \frac{r_{11}^{(1)} r_{11}^{(2)}}{r_{11}^{(1)} + r_{11}^{(2)}}$$

两弹簧串联体系的频率：

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{m(\delta_{11}^{(1)} + \delta_{11}^{(2)})}} = \sqrt{\frac{r_{11}^{(1)} r_{11}^{(2)}}{m(r_{11}^{(1)} + r_{11}^{(2)})}}$$

不难看出，两弹簧串联体系自振周期为：

$$T = \sqrt{T_{(1)}^2 + T_{(2)}^2}$$

当有 n 个弹簧串联时，则 $\delta_{11} = \sum_i \delta_{11}^{(i)}$ ，而周期为：

$$T = \sqrt{\sum_i T_{(i)}^2} \tag{1-13}$$

即几个弹簧串联时，其总柔度为各弹簧的柔度之和，而体系的自振周期则为各单个弹簧体系的自振周期 $T_{(i)}$ 的平方和的方根。

例 1.4 设图 1.6 所示的体系中悬臂杆的质量可忽略不计，基础抗滑动的刚度为 K_{ψ} ，

抗转刚度为 K_ϕ ，求自振周期。

这相当于三个弹簧串联的体系。当基础既无滑动也无转动时，体系的自振周期：

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{3EJ}}$$

当悬臂杆不变形，基础无转动，即只有基础的滑动位移时体系的自振周期：

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_u}}$$

当悬臂杆不变形，基础无滑动，即只有基础的转动位移时，体系的自振周期

$$T_\phi = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{K_\phi}}$$

故图 1.6 所示体系的自振周期为：

$$T = \sqrt{T_b^2 + T_u^2 + T_\phi^2} = 2\pi \sqrt{m\left(\frac{l^3}{3EJ} + \frac{1}{K_u} + \frac{l^2}{K_\phi}\right)}$$

如果考虑悬臂梁的剪切变形，则：

$$T = \sqrt{T_b^2 + T_s^2 + T_u^2 + T_\phi^2}$$

式中 T_b , T_s 分别为纯弯、纯剪体系的自振周期， T_u , T_ϕ 分别为基础滑动、转动而使上部结构作刚体自由振动的自振周期。

1.2.2 考虑阻尼时的自由振动

上节我们讨论的是无阻尼的自由振动，运动规律由式(1-5)或(1-6)及图 1.2 表示。从这些公式及图 1.2 所示的位移时程曲线可以看出：无阻尼自由振动的振幅是不变的，振动是周期性的，并且能永远继续下去。这显然与客观情况是不符合的。事实上，如第一章所述，任何体系的振动都受到阻尼的作用，因此振动是衰减的。为了计算考虑阻尼影响的自由振动，必须讨论阻尼理论。近百余年来，阻尼理论已出现很多种，我们不拟逐一介绍，而只简述粘滞阻尼及复阻尼二种常用的理论模型。

1. 粘滞阻尼理论

这是一种古老而至今还常用的理论。1865 年汤姆森 (W.Thomson) 在观测了一些简单体系的自由衰减振动后，认为固体材料中的内摩擦与粘滞液体中的粘滞摩擦相似，与变形速度有关，因而称为粘滞阻尼理论。1892 年沃依特 (W.Voight) 发展并完成了这种阻尼理论。该理论的基本假定是：振动中的材料应力由二部分组成，一是弹性应力 $\sigma_e = E\varepsilon$ ，二是由材料内摩擦而产生的阻尼应力 σ_d ，它与变形速度 $\dot{\varepsilon}$ 成正比，即总应力为：

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_d = E\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon} \quad (1-14)$$

式中 β 称为材料的粘滞系数或阻尼系数。

由式(1-14)可以看出，当变形速度 $\dot{\varepsilon} > 0$ ，即变形增加时， $\sigma > E\varepsilon$ ；反之，当 $\dot{\varepsilon} < 0$ ，即变形减小时， $\sigma < E\varepsilon$ ，从而形成滞变回线或称滞回环 (图 1.7)。下面讨论简谐振动中滞变回线的形状。

为方便起见，将简谐振动表示为复数形式，令：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\theta t} = \varepsilon_0 (\cos\theta t + i\sin\theta t) \quad (1-15)$$

将上式代入式(1-14), 则得:

$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{i\theta t} + ir_0 e^{i\theta t}$$

式中, $E\varepsilon_0$ 及 $r_0 = \beta\varepsilon_0\theta$ 分别为弹性应力及阻尼应力的幅值。

因 $i = e^{i\pi/2}$, 故:

$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{i\theta t} + r_0 e^{i(\theta t + \frac{\pi}{2})} \quad (1-16)$$

利用式(1-15)及(1-16)的实部消去 t , 取:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\theta t \quad (1-17)$$

$$\sigma = E\varepsilon_0 \cos\theta t + r_0 \cos(\theta t + \frac{\pi}{2}) = E\varepsilon_0 \cos\theta t + r_0 (\pm \sqrt{1 - \cos^2\theta t})$$

将式(1-17)代入上式, 即可消去 t 而得应力—应变关系:

$$\sigma = E\varepsilon \pm r_0 \sqrt{1 - (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})^2} \quad (1-18)$$

如果利用式(1-15)及(1-16)的虚部, 同样可以得到式(1-18)。式(1-18)是一个椭圆方程, 正号对应于回线的上枝, 负号对应于下枝 (图 1.7), 椭圆的面积为:

$$\Delta U = \pi\varepsilon_0 r_0 = \pi\theta\beta\varepsilon_0^2 \quad (1-19)$$

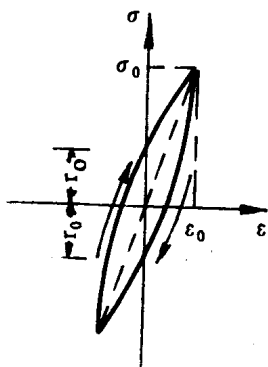


图 1.7 滞线回环图

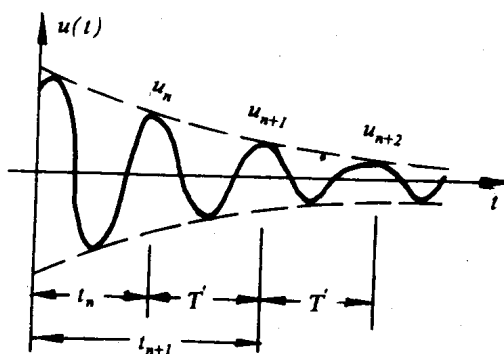


图 1.8 位移时程曲线图

下面我们来证明 ΔU 等于一个周期内阻尼应力所作的功。利用实部作计算:

$$\Delta W = \int \sigma_d d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \sigma_d \dot{\varepsilon} dt = \int_0^{2\pi} r_0 (-\sin\theta t) \varepsilon_0 \theta (-\sin\theta t) dt = \pi\varepsilon_0 r_0 = \Delta U$$

如果利用其虚部, 同样也可以证明上述结果。

耗散系数由下式:

$$\psi = \frac{\Delta U}{U} \quad (1-20)$$

而得到:

$$\psi = \frac{2\pi\beta\theta}{E} \quad (1-21)$$

粘滞阻尼理论的最大优点是它所建立的振动方程为线性微分方程, 求解简便, 故经过

一些修正后迄今仍被广泛采用。在实际应用中，是在建立振动方程式时加入一项阻尼力，其值与体系振动时的速度成正比，而方向与运动方向相反。下面我们用一个具体例子说明这个理论的应用和相应的结果。

仍以图 1.1 所示的单自由度体系为例。若计及阻尼的影响，则质点所受的力除了恢复力 S 以外，还应加上一项阻尼力 $R = -\beta\dot{u}$ 。按动静法， S 、 R 应与质点惯性力 $I_M = -mu$ 相平衡，即：

$$S + R + I_m = 0$$

$$\text{亦即} \quad -r_{11}u - \beta\dot{u} - mu = 0$$

$$\text{或} \quad \ddot{u} + \frac{\beta}{m}\dot{u} + \frac{r_{11}}{m}u = 0$$

令 $\frac{\beta}{m} = 2n$ ， $\frac{r_{11}}{m} = \omega^2$ ， n 称为衰减系数，则上式可改写为：

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (1-22)$$

当 $n < \omega$ 时，式(1-22)的通解为：

$$u(t) = e^{-nt} [A_1 \cos \omega' t + A_2 \sin \omega' t] \quad (1-23)$$

式中， $\omega' = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ 为考虑阻尼时的圆频率。

若初始条件为： $t = 0$ 时， $u(0) = u_0$ ； $\dot{u}(0) = v_0$ ，则：

$$u(t) = e^{-nt} \left[u_0 \cos \omega' t + \frac{v_0 + nu_0}{\omega'} \sin \omega' t \right] \quad (1-24)$$

若令 $u_0 = A \cos \alpha$ ； $\frac{v_0 + nu_0}{\omega'} = A \sin \alpha$ ，则上式可改写为：

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= Ae^{-nt} \cos(\omega' t - \alpha) \\ \text{或} \quad u(t) &= Ae^{-nt} \sin(\omega' t + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

式中：

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + nu_0}{\omega'} \right)^2}$$

$$\alpha = \arctg \left(\frac{v_0 + nu_0}{\omega u_0} \right)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

A 、 α 、 γ 均为与初始条件有关的参数。

根据式(1-25)可以绘出图 1.8 所示的位移时程曲线。

由式(1-25)可以看出，当 $\cos(\omega' t - \alpha) = 1$ 时得出最大位移（各振幅）的包线为：

$$u_{max} = Ae^{-nt} \quad (1-26)$$

由式(1-26)并参看图 1.8 可得相邻二振幅之比为:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{Ae^{-nT}}{Ae^{-(n+1)T}} = e^{nT}$$

这就是说, 振幅按几何序列递减, 序列的公比 (即相邻二振幅之比) 为 e^{nT} 。对上式两边取对数, 则得:

$$\ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = nT = \frac{2\pi n}{\omega} = \lambda \quad (1-27)$$

λ 称为对数衰减率。

式(1-27)表明, 按粘滞阻尼理论推得的结果是: 对数衰减率与自振频率成反比。这是不符合实际情况的。早在 1913 年, 罗威特 (P.E.Rowolt) 就曾用试验证明: 在很大范围内改变结构的自振周期时, 对数衰减率几乎没有变化。近代的大量试验及实测说明对数衰减率主要与材料性质及结构类型有关, 而与自振频率的关系不大。

2. 复阻尼理论 (滞变阻尼理论)

经过对阻尼力进行理论和实验研究后, 1940 年西奥多森 (T.Theodorsen) 和加里克 (I.E.Garrick) 提出了下述假定: 阻尼应力与弹性应力 $E\varepsilon$ 成正比, 而与变形速度同相。通常称其为滞变阻尼理论。

在稳态简谐振动中, 应变 ε 及其速度 $\dot{\varepsilon}$ 按滞变阻尼理论可用复数形式表示成:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\theta t}, \quad \dot{\varepsilon} = i\theta \varepsilon_0 e^{i\theta t} = \theta \varepsilon_0 e^{i(\theta t + \frac{\pi}{2})} \quad (1-28)$$

即速度 $\dot{\varepsilon}$ 的相位比应变超前 $\frac{\pi}{2}$ 。按此假定, 总应力为:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_e + \sigma_d = E\varepsilon + vE\dot{\varepsilon} e^{i\frac{\pi}{2}} = E\varepsilon_0 e^{i\theta t} + vE\varepsilon_0 e^{i(\theta t + \frac{\pi}{2})} \\ &= (1 + iv)E\varepsilon \end{aligned} \quad (1-29)$$

式中, v 为阻尼参数, $vE\varepsilon_0$ 为阻尼应力的幅值。此式表明, 只要用复弹性模量 $(1+iv)E$ 代替 E , 即得到考虑阻尼时的应力—应变关系。因而在建立振动方程时, 只要在有阻尼的运动方程中将刚度系数乘以复数 $(1+iv)$, 即得考虑阻尼时的运动方程。

利用式(1-28)及(1-29)的实部或虚部消去 t , 可得:

$$\sigma = E\varepsilon \pm vE\varepsilon_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

上式也是椭圆方程, 与式(1-18)是相似的, 两者的区别仅在于滞变阻力理论中阻尼应力的幅值 $r_0 = vE\varepsilon_0$ 是个常数, 与频率无关, 而在粘滞阻尼理论中, 阻尼应力的幅值 $r_0 = \beta\varepsilon_0\theta$ 与频率 θ 成正比。

滞变回线的面积按式(1-19)为:

$$\Delta U = \pi\varepsilon_0 r_0 = \pi vE\varepsilon_0^2$$

耗散系数按式(1-20)为:

$$\Psi = 2\pi v$$

1951 年索罗金 (Е.С.Сорокин) 也提出与上述完全相同的假定, 并继续做了大量的工作。但上述理论仍存在一些缺点: