一 元 微 积 分

复旦大学数学系主编
陈 开 明 编

上海科学技术出版社

责任编辑 周玉刚

一元微积分

复旦大学数学系主编
陈开明 编

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 10.25 字数 270,000
1987年7月第1版 1987年7月第1次印刷
印数：1—8,000

统一书号：13119·1420 定价：2.30元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革. 这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960 年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从 1962 年到 1965 年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验. 当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的.

1980 年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲. 同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性与灵活性相结合的原则". 按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革. 我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材.

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程. 这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端.

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的. 其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是不可少的. 这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据. 但是我们还要注意到，在各门基础课程的教材中需要防止片面追求自身的完备化，应当根据每门课程

在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑．使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律．我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学．

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用．在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受．正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系．

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践．一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学．我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版．

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务．由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟．

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢．

复旦大学数学系

1982.4.

编 者 的 话

在多年教学实践和多次修改讲义的基础上，我们编写了这套供高等学校中非数学专业类选用的高等数学教材．共包括以下五个分册：

«一元微积分»（陈开明编）；«多元微积分»（魏国华编）；«常微分方程»（尚汉冀编）；«线性代数»（陈开明编）；«概率论与数理统计»（陈开明编）．

根据我们的教学实践，以上各分册依次可供60学时、85学时、35学时、40学时、30学时左右教学之用．

随着科学技术的迅速发展及电子计算机的普及使用，在自然科学、工程技术乃至社会科学等各个领域中越来越广泛地应用近代数学和应用数学的成果．与此相适应，高等学校的许多非数学类专业对本专业的学生应具备的数学素质提出新的要求，要求高等学校的数学课程能在不增加或少增加教学时数的前提下，使学生能学到更丰富、更有用的数学知识；学到更强的运用数学工具的能力．我们就是基于这一精神编写这套教材的．

考虑到教材内容现代化的总趋势，这套教材除了在叙述表达方面注意了恰当地运用近代数学的观点和语言外，还注意到了调整教材中各部分内容的比例，协调了各部分内容的深度和广度．总的来说，与传统的高等数学教材相比，微积分部分内容作了合理压缩；而线性代数、常微分方程、概率论与数理统计等部分内容适当加强了．这套教材中还增添了一些与数值方法相联系的内容，以适应推广使用电子计算机的需要．

在本教材的编写风格上，我们力求做到线索清楚、组织科学、叙述准确、详简适当，以便于读者能抓住高等数学的中心内容，提

高分析问题和解决问题的能力；有助于读者提高阅读与自学数学的能力．本教材配备的习题也力求有助于读者通过系统训练而获得较好的分析与解题的能力．

这套教材适合于理工、师范（非数学类专业）、管理、经济等各类专业作教材或参考书用．由于这些专业对数学内容的选择有很大的差异，为了方便于教学的选用，我们将这套教材分为五个分册，各分册之间既有联系又有相对独立性．每分册的编排也尽量采用"分块结构"，尽量设置相对独立的章节．有的独立性较强的或非基本内容的章节和习题，加上了 * 号，以示醒目．不同专业使用这套教材时，可根据各自情况选用全部或部分．本书也可供高等学校的一些进修班、培训班选用．

在教材的编写、修改及试教过程中，我们得到复旦大学许多同事的帮助．其中朱学炎、徐振远、陈惠江、王婉华、郑广平等老师给书稿提出了宝贵的修改意见；陆飞、黄云敏等老师协助做了一些编写工作，在此谨向上述同志表示衷心的感谢．

编者 1986 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

微积分学是微分学与积分学的统称，这门研究变量的数学是在十九世纪末期发展起来的，在自然科学及社会科学的许多领域有着广泛的应用. 函数是变量变化关系最基本的数学描述，在这一描述的基础上微积分学进一步研究了变量变化关系的重要度量，成功地运用极限方法建立了导数、定积分等微积分的基本概念，系统地给出了微积分的计算方法. 正因如此，微积分学已成为研究变量的最基础的数学理论和数学工具. 在学习微积分内容之前，我们先在本章中扼要地介绍函数、极限等必需的准备知识.

§1　函数

我们将考察同一过程中各个变量之间的依赖关系，从中引入函数的概念，再从集合论角度出发，对函数概念作进一步的阐述.

1. 集及其运算

集合简称集，是一个难于精确定义的基本的数学概念. 通常可把所考察的各个确定的对象的汇总称为一个集合，而每个考察对象都称为这个集合的元素. 例如，设所考察的是某个班级学生的身长，就可把该班级每个学生的身长值汇总起来看作一个集合，其中每个身长值都是这一集合的元素.

为了方便起见，通常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素.

集合的常用表示法有列举法和描述法两种.

用列举法表示集合，是将组成集合的所有元素一一列举在一个大括号内，而且在列举时不计较元素的排列顺序. 例如，集合

$$A=\{5\},\quad B=\{3,\ 8\}$$

依次由一个元素“5”和两个元素“3”与“8”组成. 类似地,集合

$$C=\{(1,1),(1,2),(2,1)\},$$

$$D=\{x,x-1,2x,2x+1\}$$

依次由3个和4个元素组成;集合

$$E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots\right\},$$

$$F=\left\{1,1+\frac{1}{\sqrt{1}},1+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}},\cdots,\right.$$

$$\left.1+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots\right\}$$

都由无限个元素组成.

用描述法表示集合，是把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律,写在大括号内,一般的描述方式是

$$\{x|x\text{具有性质}S\}.$$

例如,$A=\{(x,y)|2x-y=1\}$表示方程$2x-y=1$的所有解(x,y)构成的集合,可称为方程$2x-y=1$的解集. 又如,$B=\{ax^2+bx+c|a\neq0\}$表示关于x的一切二次函数构成的集合.

设a是集合A的元素，就称集合A含有元素a，或称a属于A，记为$a\in A$，其中记号“$\in$”读作“属于”；设a不是集合A的元素，就称集合A不含有元素a，或称a不属于A，记为$a\overline{\in}A$. 例如,对于集合

$$A=\{5\},B=\{3,8\},C=\{x|x>4\},$$

显然有$5\in A$, $5\overline{\in}B$, $5\in C$.

为了适应即将提及的集合运算的需要，我们还把不含有任何元素的集合称为空集,记为$\emptyset$. 例如,

$$\{x|x^2+1=0\text{ 且 }x\text{ 为实数}\}=\emptyset,$$

$$\{x|x\leqslant-1\text{ 且 }2x>1\}=\emptyset.$$

了解了集合的概念后,我们进一步研究集合之间的关系.

定义1.1　如果组成集合A的所有元素与组成集合B的所有元素都是相同的,就称集合A与集合B**相等**,记为$A=B$；如果

集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，就称集合 A 是集合 B 的**子集**，读作 A 包含于 B，记为 $A\subseteq B$，也可读作 B 包含 A，记为 $B\supseteq A$. 对于空集 $\emptyset$，规定它是任何集合的子集：$\emptyset\subseteq A$.

例如，对于集合

$$A=\{x|x(x-1)<0\},\ B=\{x|0<x<1\},$$

因为集合 A 和 B 都是由一切小于 1 的正数组成的集合，所以 $A=B$. 又如自然数集 N 和实数集 R：

$$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\},\ R=\{x|x\ \text{为实数}\},$$

由于每个自然数也是实数，按定义 1.1 应成立 $N\subseteq R$.

注意：对于任何集合 A，空集 $\emptyset$ 和集合 A 自身也是它的子集. 例如，设 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，则它的子集共有以下 8 个：$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$.

从定义 1.1 不难导出：对于集合 A 和集合 B，$A=B$ 的充要条件是同时有 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$.

下面定义集合的两种基本运算：并与交.

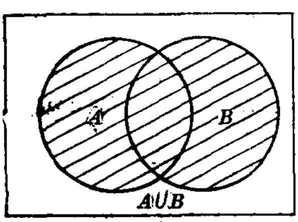
定义 1.2　由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的**并集**或**和集**，记为 $A\cup B$：

$$A\cup B=\{x|x\in A\ \text{或}\ x\in B\};$$

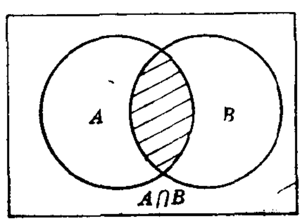
由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的**交集**或**通集**，记为 $A\cap B$：

$$A\cap B=\{x|x\in A\ \text{且}\ x\in B\}.$$

两个集合的并集和交集，可借助称之为文氏(Venn)图的图形来示意. 在图 1.1 中，分别用两个由封闭曲线围成的平面点集表



(1)



(2)

图　1.1

示集合 A 和集合 B，则图 1.1(1) 和图 1.1(2) 中的阴影部分依次表示 A 与 B 的并集和交集.

举例来说，若记

$$A=\{x|x\text{ 为正整数}\},\ B=\{x|x\text{ 为正偶数}\},$$
$$C=\{0,\ 5,\ 6\},\ D=\{10,\ 11,\ 12,\ \cdots\},$$

则
$$A\cup B=A,\ A\cap B=B,\ C\cap D=\emptyset,$$
$$A\cup C=\{x|x\text{ 为非负整数}\},\ A\cap C=\{5,\ 6\},$$
$$B\cup D=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ \cdots\},$$
$$B\cap D=\{10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \cdots\}.$$

又如，不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解可表示为

$$\{x|x<1\}\cup\{x|x>2\}.$$

进一步通过实例考察集合的运算规则. 对于不等式组

$$\begin{cases}x^2-3x+2>0,\\ x+3>0,\end{cases}$$

若记 $A=\{x|x<1\},\ B=\{x|x>2\},\ C=\{x|x+3>0\}$，
它的解集可表示为 $(A\cup B)\cap C$. 读者不难从以上 A、B、C 的表示式验证下式成立

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

即原不等式组的解集是以下两个不等式组的解集的并：

$$\begin{cases}x<1,\\ x+3>0;\end{cases}\quad\begin{cases}x>2,\\ x+3>0.\end{cases}$$

一般地，集合的并及交满足以下运算规则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

元素都是实数的集合称为实数集，特别，当这种集合中的全体元素在数轴上形成一个“区间”时，我们赋予与“区间”相联系的名称及记号. 例如，设 a 和 b 为两个实数，我们用下列一组式子定义

开区间(a, b)和闭区间$[a, b]$:

$$(a, b)=\{x|a<x<b\},\quad [a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$

又以 $(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$, $[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

定义半开半闭区间$(a, b]$和$[a, b)$. 无限区间$[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$及$(-\infty, +\infty)$也可类似地定义, 如

$$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\},\quad (-\infty, +\infty)=\{x|x\text{ 为实数}\}.$$

例如, 不等式 $x^2-3x+4\leqslant 0$ 的解集可表示为$[-1, 4]$, 而不等式 $x^2-3x+4>0$ 的解集可表示为$(-\infty, -1)\cup(4, +\infty)$.

2. 函数与映射

为了引入函数概念, 我们先通过实际考察同一变化过程中变量之间的依赖关系.

例 1 自由落体运动

设某物体在重力作用下从离地面高 H 处开始下落, 到落到地面时结束. 在落体运动过程中, 运动所经历的时间 t 与物体的位移 s 不断变化, 物理学中已证实 s 与 t 间存在如下的关系:

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{1.1}$$

其中 g 是重力加速度. 分析这一落体运动, 可以指出以下三点:

(1) 时间 t 和位移 s 是这一运动过程中的两个变量, 它们的各自取值在整个运动过程中是变化着的. 人们常把时间 t 看作一个主动变化的变量, 并把位移 s 看作随 t 的变化而被动变化的变量, s 的取值通过(1.1)式完全依赖于 t 的取值. 这就是说, 人们常把 t 作为自变量而 s 作为因变量.

(2) 自变量 t 在一定的范围内取值. 由于 t 是运动所经历的时间, 所以落体运动从 $t=0$ 时开始. 注意到当物体落到地面即 $s=H$ 时所经历的时间 t 由(1.1)式可计算出为 $\sqrt{2H/g}$, 所以自变量 t 的取值范围可用区间$[0, \sqrt{2H/g}]$来表示.

(3) 当自变量 t 在其变化范围$[0, \sqrt{2H/g}]$上取定一个值时, 利用(1.1)式得到的因变量 s 的对应取值是唯一确定的.

例 1 考察了自由落体运动中变量 s 与 t 之间的特定的依赖关

系. 一般地, 对于同一变化过程中取实数值的两个有依赖关系的变量, 我们引入如下的函数概念.

定义 1.3　设 x 和 y 是同一变化过程中的两个变量, 如果对于变量 x 的每一确定值, 按照某种规则, 变量 y 总有唯一确定的值与它对应, 便称 y 是 x 的**函数**, 记为

$$y=f(x),$$

并称 x 为**自变量**, y 为**因变量**, f 为**函数符号**.

例如, 若把例 1 中 s 与 t 之间的依赖关系表示为 $s=f(t)$, 那么 $f(t)$ 是 t 的函数, 其表示式由(1.1)式可得

$$f(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

即当 t 在闭区间 $[0, \sqrt{2H/g}]$ 内任取一个确定值 a 时, 变量 $f(t)$ 相应地有唯一确定值 $\frac{1}{2}ga^2$ 对应. 一般地, 对于函数 $f(u)$, $g(v)$, 当其中的自变量(前者是 u 后者是 v)取某个确定值 a 时, 相应的函数值用 $f(a)$, $g(a)$ 来记.

例 2　设 $f(u)=u^2$, $g(v)=2v+1$, 试求

$$f(-1),\ g(-1),\ f(a+1),\ g(a+1).$$

解　函数符号用以表示自变量与因变量之间的对应规则, 本例中给出两个函数 $f(u)$ 和 $g(v)$, 它们的区别在于变量之间的对应规则不同. 对自变量的同一个值 -1, 相应的函数值 $f(-1)$ 和 $g(-1)$ 应分别按下面二式计算:

$$f(-1)=(-1)^2=1,$$

$$g(-1)=2\times(-1)+1=-1.$$

类似地, 当自变量取值 $a+1$ 时, 两个函数的对应取值又分别按以下二式计算

$$f(a+1)=(a+1)^2,$$

$$g(a+1)=2(a+1)+1=2a+3.$$

对于给定的两个函数, 如果它们的自变量的取值范围相同, 变量之间的对应取值规则也相同, 我们就把这两个函数视作同一个函数. 例如, 正方形面积 A 与其边长 a 之间有关系 $A=a^2(a\geqslant0)$;

从静止出发以等加速度等于 2 作等加速直线运动的物体，其位移 s 与运动所历经的时间 t 之间有类似的关系 $s=t^2(t\geqslant0)$. 这两个关系式中的变量采用了不同的记号，代表着不同的实际量，但自变量的取值范围都是 $[0, +\infty)$，变量之间的对应取值规则也完全相同，所以可采用同一函数记号表示这两组自变量与因变量之间的依赖关系. 若记 $h(x)=x^2(x\geqslant0)$，这两组依赖关系可分别表示为 $A=h(a)$ 和 $s=h(t)$.

例 3 在例 1 所述的自由落体运动中，若以 s 为自变量，t 作为自变量，试写出函数表示式.

解 自变量与因变量的区分本是相对的，何者选为自变量要根据研究问题的具体需要.

本例中，要求把 s 选为自变量. 注意到 $t\geqslant0$，由关系式(1.1)可解出

$$t=\sqrt{2s/g}, \tag{1.2}$$

其中，自变量 s 的变化范围为 $[0, H]$.

(1.2)式便是 t 关于 s 的函数表示式.

进一步从集合论角度对函数概念作进一步的阐述.

函数这一数学形式，描述了存在于变量之间的对应取值规则，下面结合函数图象给出这一描述的直观.

函数 $y=f(x)$ 的图象，简称 f 的图象，是指在平面直角坐标系 Oxy 中的如下点集:

$$\{(x, y)\,|\,x\in D,\ y=f(x)\}, \tag{1.3}$$

其中 D 是自变量 x 的变化范围，看作 x 轴上的一个点集. 由于函数 f 的图象通常具有曲线形状，所以 f 的图象也称为曲线 $y=f(x)$.

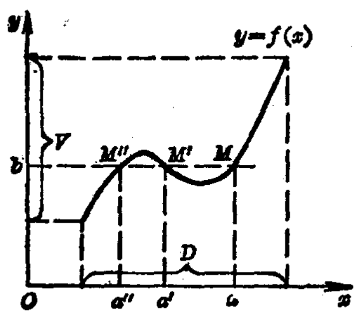


图 1.2

给定一个函数 f，它的图象也就随之确定了. 如图 1.2 所示，当自变量在 D 内取某个值 a 时，因变量取唯一确定的值 b 与它对应，据此可在直角坐标系 Oxy 中

确定出一个点 $M(a, b)$. 随着自变量在 D 内变化取到每一个值，这样的点 M 的全体就构成函数 f 的图象.

反之，一个函数图象本身显现了该函数的对应取值规则的直观：对于任何自变量值 a，可如图 1.2 那样由 a 先确定出函数图象上的一个点 M，再由 M 确定出因变量的一个值 b. 从这里不难明白，不同的函数图象，确定出不同的自变量与因变量取值的对应规则.

记 y 轴上的一个实数集合为

$$V=\{f(a)\,|\,a\in D\},$$

显然，函数定义所描述的变量之间的对应取值规则，完全可视为在实数集 D 与实数集 V 之间定义的一种对应取值规则：对于 D 中任一数 a，V 中总存在唯一的数 b 与它对应. 这样看来，函数概念的要点不在于变量而在于对应规则，我们完全可以避开"变量"一词，把函数概念理解为从一个实数集到另一个实数集的某种对应规则的描述，这样的理解也许更突出函数概念的核心内容.

在集合论中，用下面的定义描述从一个集合到另一个集合之间的一种对应关系：

定义 1.4　设 A 和 B 是两个非空集合，如果存在一种规则 f，使得对于集合 A 中的任何元素 a，在集合 B 中总能按规则 f 确定唯一的对应元素 b，就称 f 是从 A 到 B(中)的**映射**或**映照**，记为

$$f: A\to B, \tag{1.4}$$

元素 b 称为元素 a 在映射 f 下的**象**，A 中满足 $f(x)=b$ 的 x 的全体称为 b 在映射 f 下的**原象**.

如果将定义 1.4 中的 A 和 B 取为实数集，则映射 $f: A\to B$ 与以前定义的一元函数 f 的概念实际上是一致的，只是在叙述形式上，一个以集合元素的对应关系出现，另一个以变量取值的对应关系出现.

把函数看作映射的特例，更突出这一数学形式在描述对应关系中的作用. 给定一个函数 f，就是给出一种对应规则，把位于 x 轴上某集合上各点，映射成为 y 轴上的象.