第一章　平面杆件体系的几何构造分析

计算公式

1）平面体系自由度(W)的一般计算公式为：

$$W = 3D - 2ш - C_0 \tag{1—1}$$

式中：D——刚片(或称盘体)数；

ш——单铰数；

C_0——支承连杆数。

2）平面铰接连杆体系自由度的计算公式为：

$$W = 2Y - C - C_0 \tag{1—2}$$

式中：Y——体系的结点数；

C——体系内部的连杆数；

C_0——体系的支承连杆数。

3）平面体系和平面铰接连杆体系的内部可变度(V)的计算公式为：

$$V = 3D - 2ш - 3 \tag{1—3}$$

$$V = 2Y - C - 3 \tag{1—4}$$

1—1～1—9题　按相应的公式求出下列各平面杆件体系的自由度并分析其几何构造。

题 1—1(图 1—1a)

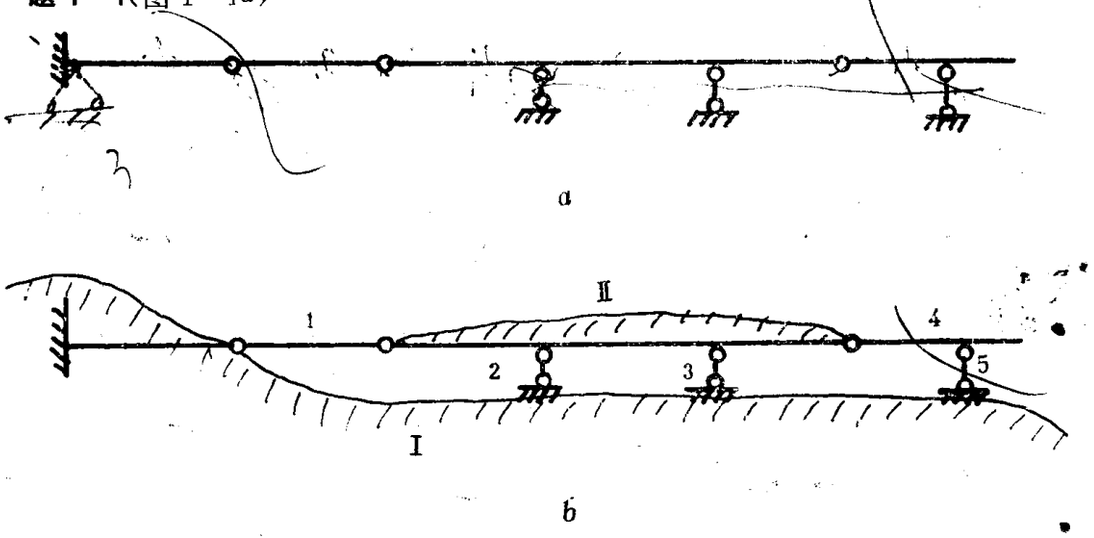


图　1—1

解：1）计算自由度　因为体系是具有支座的，故用式(1—1)计算它的自由度。

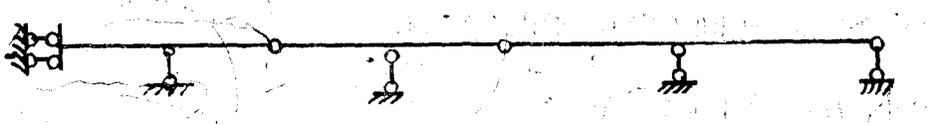
$$D=4,\ ш=3,\ C_o=6$$

$$W=3D-2ш-C_o=3\cdot4-2\cdot3-6=0$$

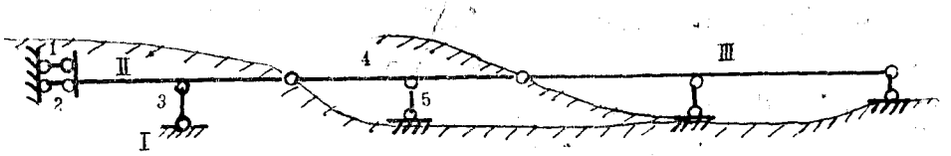
以上结果说明体系满足几何不变的必要条件.

2) 几何组成的分析 组成分析图见图1—1b. 首先以地基和悬臂梁Ⅰ和杆Ⅱ为二钢片，它们之间用三连杆(1、2、3)联接，且三连杆不完全交于一点，也不相互平行，满足二钢片三连杆规则，组成几何不变体系. 将此部分视为刚片，再加以右侧的二元体(4、5)，而二元体具有不改变体系的几何可变性的性质，故整个体系仍为几何不变体系.

题1—2(图1—2a)



a



b

图 1—2

解：1) 计算自由度 因为体系是具有支座的一般情况的体系，故用式(1—1)计算自由度.

$$D=3,\ ш=2,\ C_o=6$$

$$W=3D-2ш-6=3.3-2.2-6=-1$$

说明体系有一个多余联系.

2) 几何组成分析 组成分析见图1—2b. 首先地基Ⅰ和钢片Ⅱ用三连杆(1、2、3)相联接. 此三杆不完全交于一点，也不相互平行，故组成几何不变体系. 如题1—1所述，在此不变体系上又加以二元体(4、5)仍构成几何不变体系. 该体系连同地基又组成一大钢片，它和刚片Ⅲ用一铰二杆相联，故多了一个联系. 因而给定的体系是几何不变且有一个多余联系的体系(超静定体系).

题1—3(图1—3a)

解：1) 计算自由度 因为体系是具有支座的一般情况的体系，故用式(1—1).

$$D=5,\ ш=6,\ C_o=3$$

$$W=3D-2ш-C_o=3.5-2.6-3=0$$

该体系满足几何不变的必要条件.

2) 几何组成分析 组成分析见图1—3b. 取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三钢片并用三个不共点、不共线的铰(1, 2)、(1, 3)、(2, 3)相联接，因而得几何不变部分. 在此刚片上又加以右部的二元体DB和CB，体系仍为几何不变的. 这个内部几何不变体系和地基用三杆联

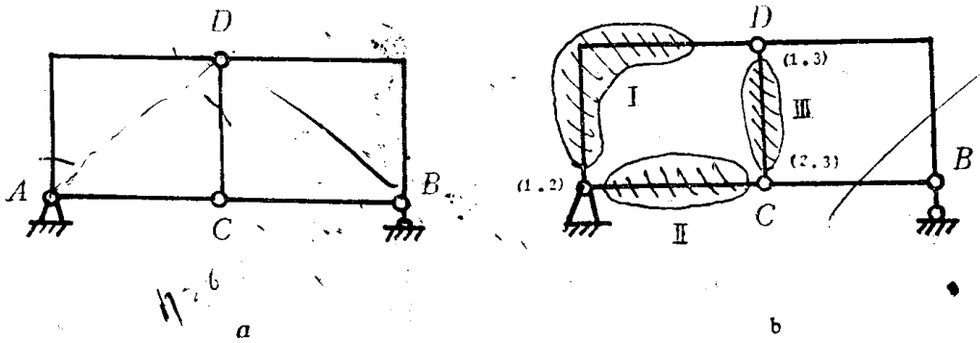


图 1—3

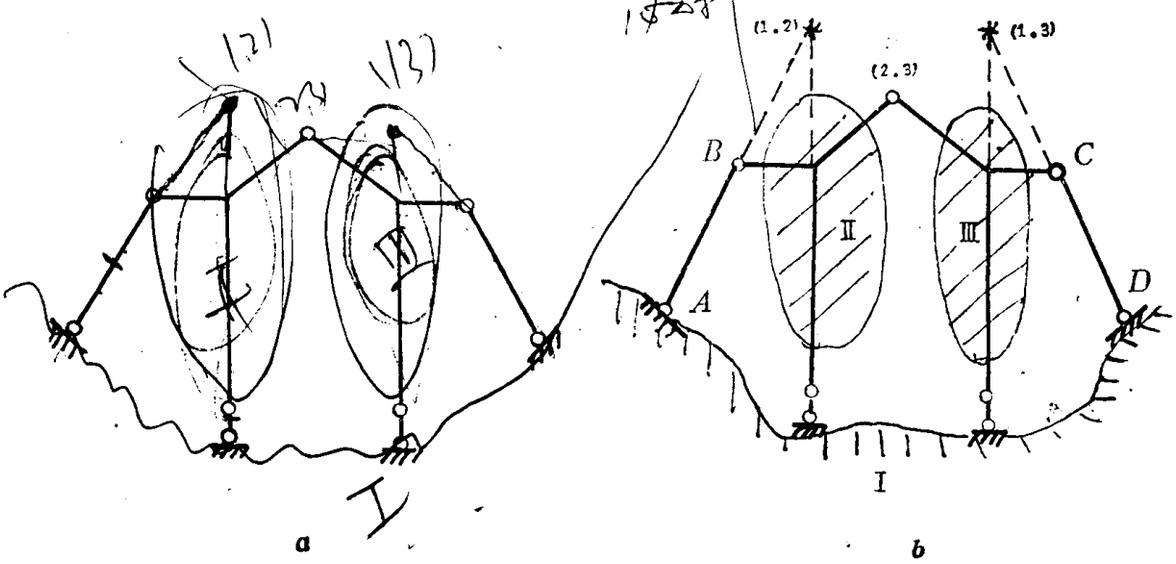


图 1—4

接，故整个体系是几何不变的。

题 1—4(图 1—4*a*)

解：1) 计算自由度 因为体系是具有支座的一般情况的体系，故用式(1—1)计算。

$$D=4, \text{ш}=3, C_0=6$$

$$W=3D-2\text{ш}-C_0=3.4-2.3-6=0$$

该体系满足几何不变的必要条件。

2) 几何组成分析 组成分析见图 1—3*b*。取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三刚片并用三个不共点、不共线的铰(1,2)、(1，3)、(2,3)相联接，所得体系符合三钢片用三铰相联结的规律，组成几何不变体系。

如果改变杆 *AB* 和 *CD* 的倾角，则能使虚铰(1，2)、(1，3)和(2，3)共处在一条直线上，此时该体系将成为瞬变体系。

题 1—5(图 1—5*a*)

解：1) 计算自由度 由于图 1—5*a*中所示平面体系的右侧明显为二双杆系，为简化计算起见，可将其忽略不计。此时可视体系为具有支座的一般情况的体系，故用式(1—1)计算自由度，

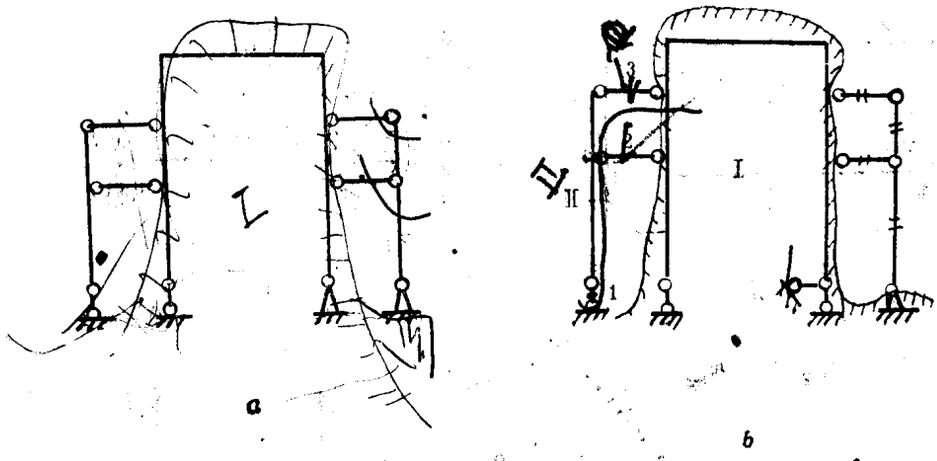


图 1—5

$$D=4, ш=4, C_o=4$$

$$W=3D-2ш-C_o=3.4-2.4-4=0$$

在该体系中无多余联系，满足几何不变的必要条件.

2）几何组成分析　组成分析见图 1—5*b*. 以支杆将中间刚架和基础联成刚片Ⅰ，此钢片又和左柱Ⅱ用不全交于一点、又不相互平行的三杆(1、2、3)相联，组成几何不变体系. 在此几何不变体系上加以右侧二双杆系，则整体仍为几何不变体系.

题 1—6(图 1—6*a*)

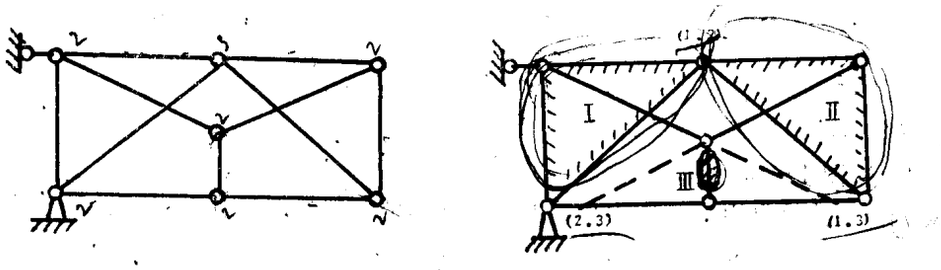


图 1—6

解：1）计算自由度　因为体系是具有支座的连杆系，故用式(1－2)计算自由度.

$$Y=7, C=11, C_o=3$$

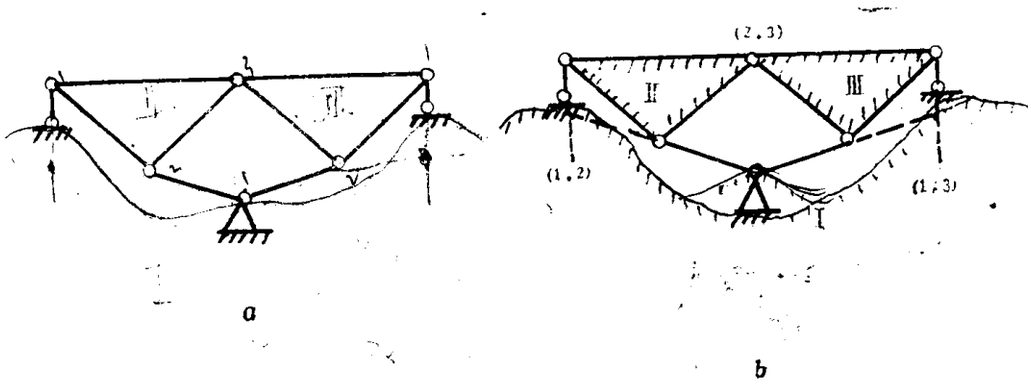
$$W=2Y-C-C_o=2.7-11-3=0$$

该体系满足几何不变的必要条件.

2）几何组成分析　组成分析见图 1—6*b*. 取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三钢片，它们由三个不共线的实铰(1，2)和虚铰(1，3)、(2，3)相联，所组成的体系是几何不变的.

题 1—7(图 1—7*a*)

解：1）计算自由度　该体系是具有支座的连杆系，用式(1－2)计算自由度.



a　　b

图 1—7

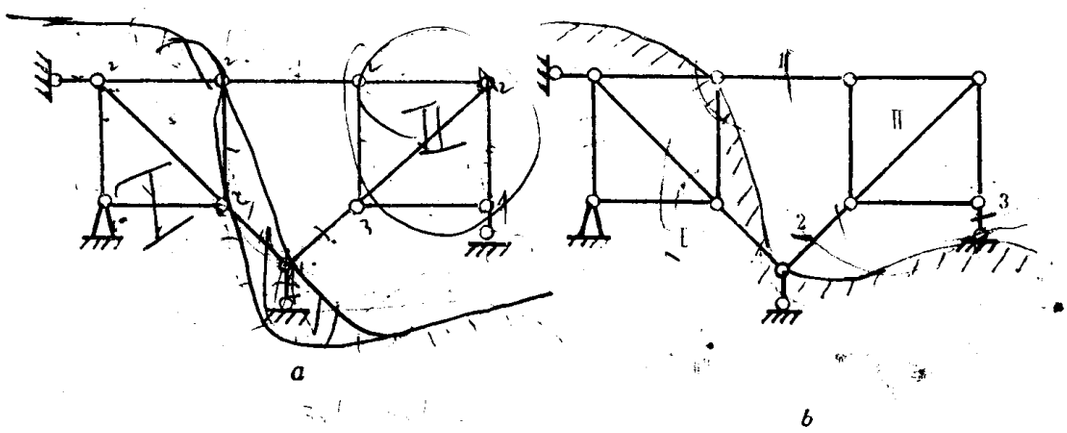
$$Y=6, C=8, C_0=4$$

$$W=2Y-C-C_0=2.6-8-4=0$$

该体系满足几何不变的必要条件。

2） 几何组成分析　组成分析见图 1—7*b*。取地基为钢片Ⅰ，Ⅱ、Ⅲ为另二钢片，它们由不共线、不交于一点的实铰(2,3)、虚铰(1，2)、(1，3)相联，组成几何不变体系。

题 1—8(图 1—8*a*)



a　　b

图 1—8

解：1） 计算自由度　该体系是具有支座的连杆系，用式（1－2）计算自由度。

$$Y=9, C=13, C_0=5$$

$$W=2Y-C-C_0=2.9-13-5=0$$

该体系满足几何不变的必要条件。

2） 几何组成分析　组成分析见图 1—8*b*。将地基和图示左侧部分视为钢片Ⅰ，它和钢片Ⅱ用三个交于一点 *A* 的连杆(1,2,3)相联，故为瞬变体系。

题 1—9(图 1—9*a*)

解：1） 计算自由度　该体系是具有支座的一般情况的体系，用式(1—1)计算自由度。

$$D=11, \text{ш}=15, C_0=3$$

$$W=3D-\text{ш}-C_0=3.11-2.15-3=0$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

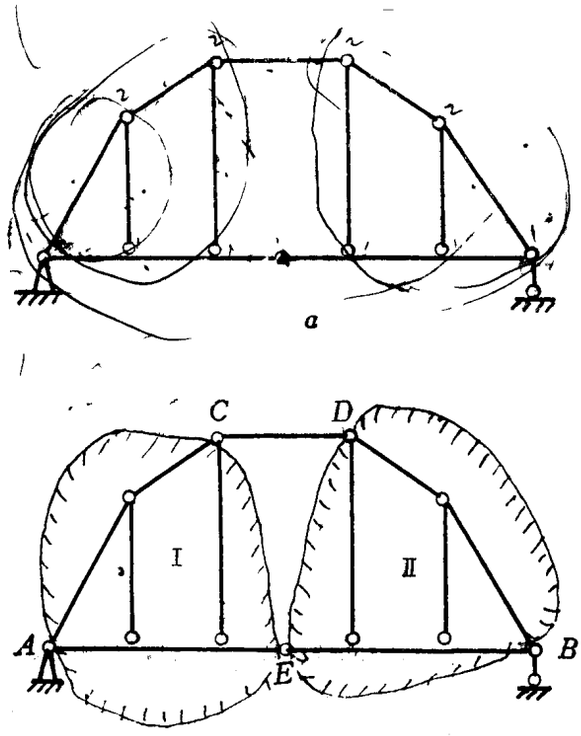


图 1—9

该体系满足几何不变的必要条件.

2) 几何组成分析 组成分析见图 1—9 b. 图示刚片Ⅰ、Ⅱ是由杆 AE 和 BE 上各加二双杆系而组成的几何不变体系. 它们（Ⅰ、Ⅱ）之间用符合二钢片联接规律的杆 CD 和铰 E 相联接，组成几何不变的体系，故整个体系是几何不变的.

对下列各平面杆件体系 1—10～1—14 做几何构造分析.

题 1—10（图 1—10a）

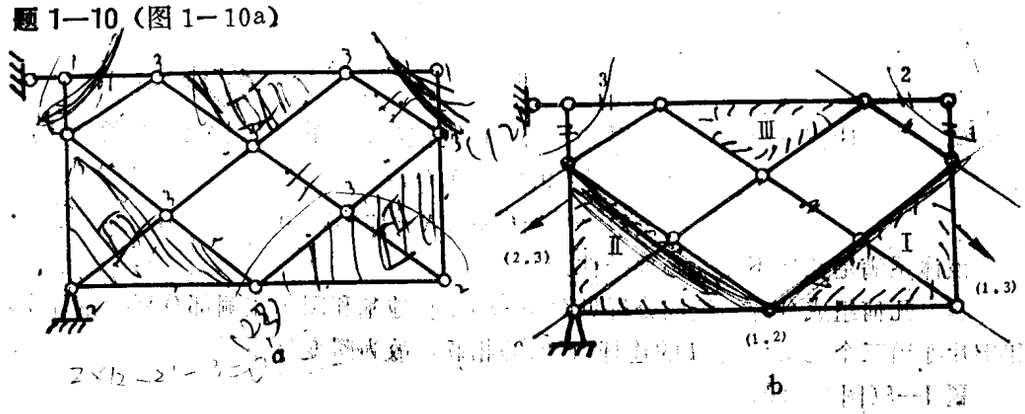


图 1—10

解：几何组成分析 组成分析见图 1—10b. 由于杆件体系和地基是用三根互不平行，又不交于一点的杆相联接，故这种联接是几何不变的. 为进一步分析几何组成，将二双杆系去掉. 取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为三刚片并用三铰(1，2)、(1，3)、(2，3)相联. (1,3)

和(2，3)为虚铰，且在无穷远处．此三铰不交于一点，也不在一条直线上，故该体系为几何不变体系．

题 1—11(图 1—11*a*)

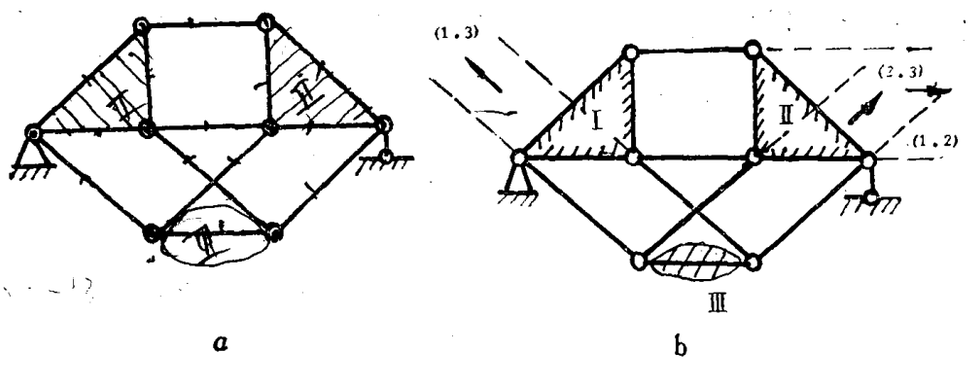


图 1—11

解：几何组成分析　组成分析见图 1—11*b*．图示钢片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ用三虚铰(1，2)、(1,3)、(2,3)相联．由于三虚铰全在无穷远处，可认为是交于一点的，故该体系为瞬变体系．

题 1—12(图 1—12*a*)

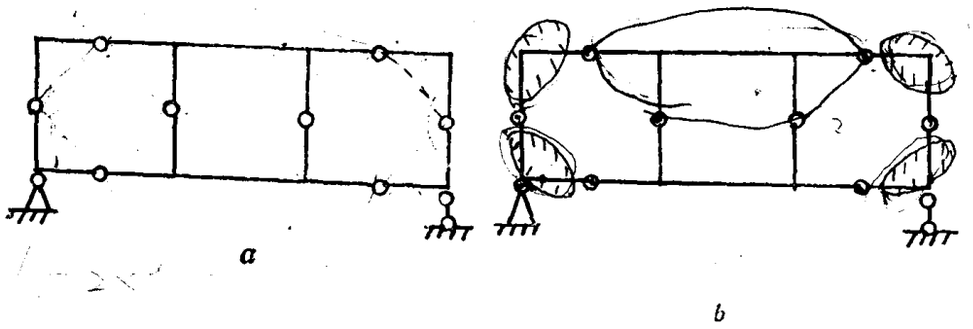


图 1—12

解：几何组成分析　见图 1—12b．按式（1—1）可见，该体系有一个多余联系．

不考虑体系与地基的联系时，左右两部分为二元体，故可不考虑其对体系几何构造的影响．其中间部分为有一个多余联系的超静定体系．

题 1—13(图 1—13*a*)

解：几何组成分析　见图 1—13*b*．取Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ（地基）为三刚片，并将它们用不共点、不共线的三铰 1、2、3 相联，组成该体系的几何不变部分．在此基础上由左至右逐次加双杆系，整体为几何不变体系．

题 1—14(图 1—14*a*)

解：几何组成分析　见图 1—14*b*．钢片Ⅰ（地基）和刚片Ⅱ、Ⅲ用三虚铰(1,2)、(1，3)、(2，3)相联，其中铰(1，2)与铰(1，3)重合于一点 *A*，而铰（2，3）在无穷远处．此三虚铰处于一条直线上，故该体系为瞬变体系．

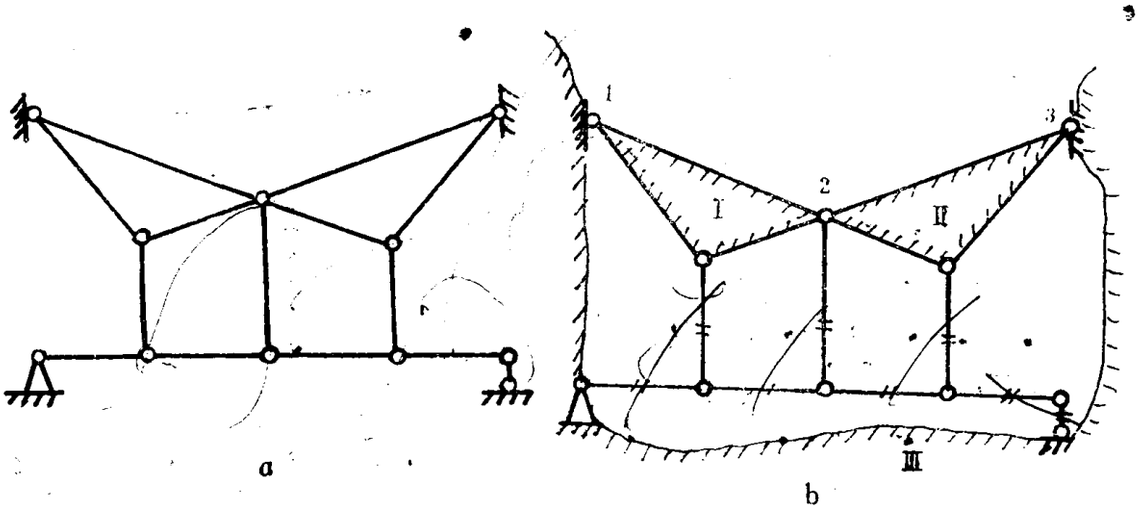


图 1—13

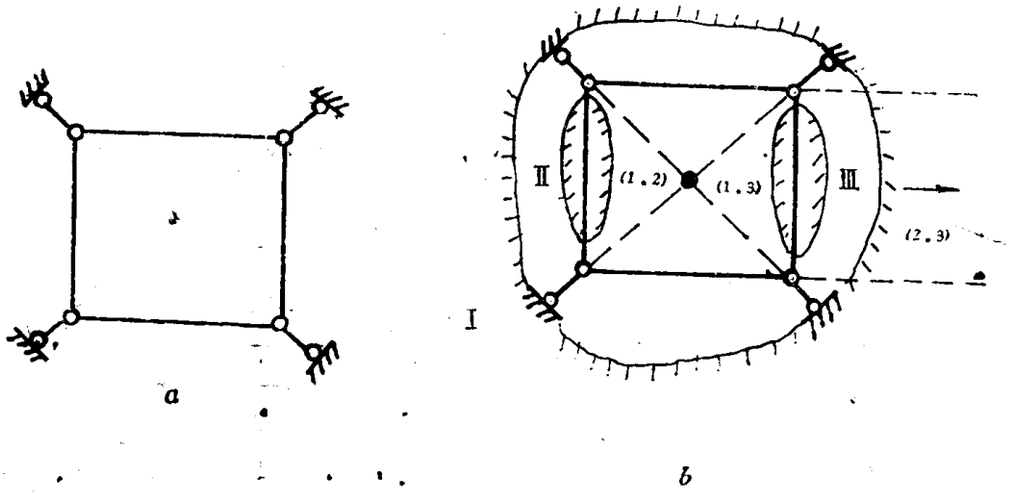


图 1—14

第二章　静　定　梁

2—1～2—4 题　写出下列各梁的弯矩方程、剪力方程，并作 M、Q 图。

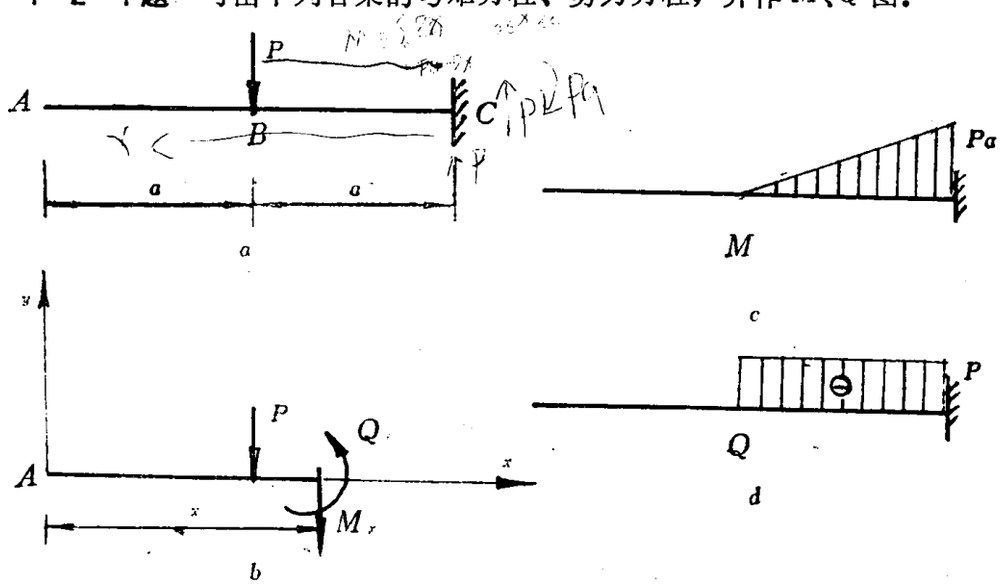


图　2—1

题 2—1(图 2—1a)

解：取图 2—1b 所示的坐标与隔离体，则

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$M_x=0$　$Q_x=0$

当 $a\leqslant x\leqslant 2a$ 时，$M_x=-(x-a)P$　$Q_x=-P$

由于 AB、BC 这两段内没有荷载作用，所以弯矩图和剪力图在这两段内都应为直线，如图 2—1 c、d 所示。

题 2—2(图 2—2a)

解：求支座反力 $\Sigma M_B=0$　$R_A\cdot 2a-qa\cdot\frac{3}{2}a=0$　$R_A=\frac{3}{4}qa\uparrow$

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$M_x=R_Ax-\frac{1}{2}qx^2$　　$Q_x=R_A-qx=\frac{3}{4}qa-qx$

当 $a\leqslant x\leqslant 2a$ 时，$M_x=R_Ax-qa\left(x-\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{4}qax-qa\left(x-\frac{a}{2}\right)$　$Q_x=R_A-qa$

$$=\frac{3}{4}qa-qa=-\frac{1}{4}qa$$

AC 段弯矩图为曲线，剪力图为斜直线，BC 段弯矩图为斜直线，剪力图为水平线，分别如图 2—2c、d 所示。

题 2—3(图 2—3a)

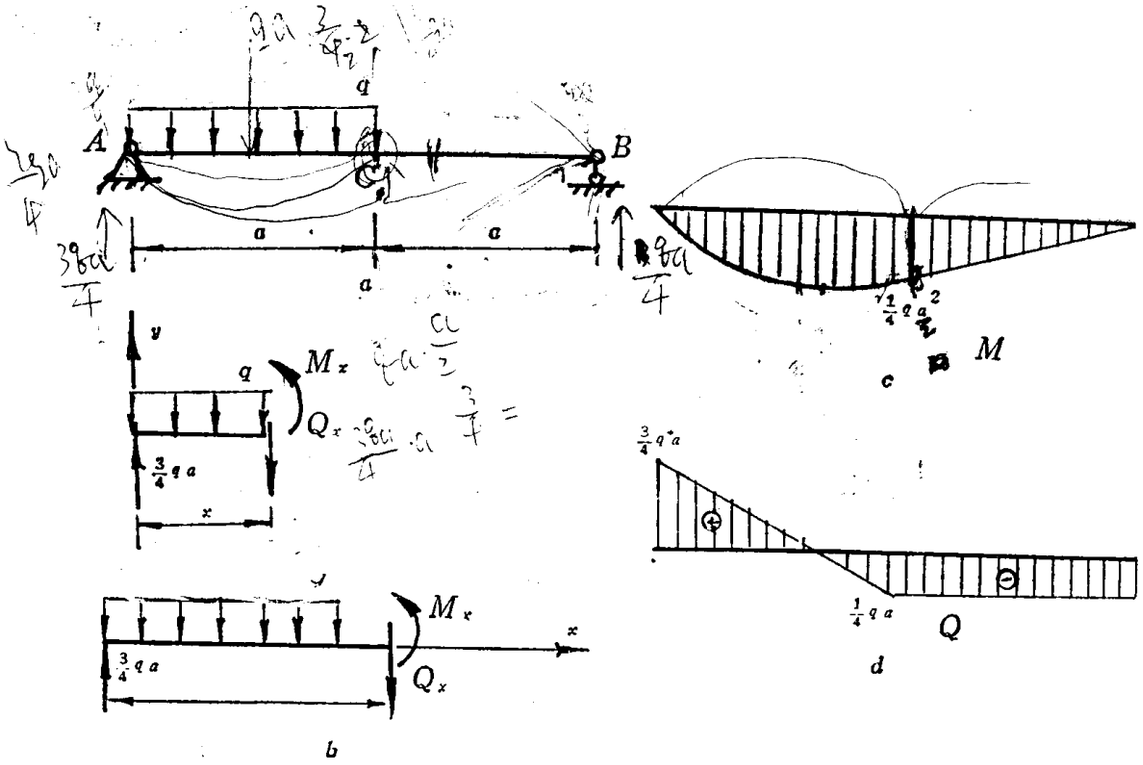


图 2—2

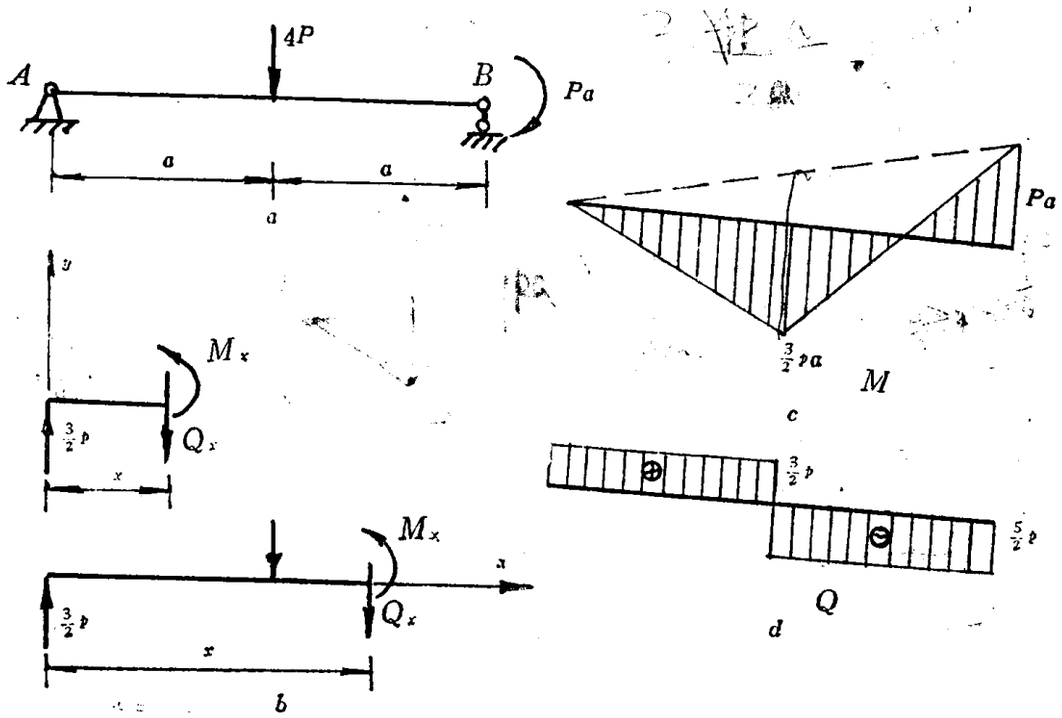


图 2—3

解：求支反力 $\Sigma M_B=0$　$R_A\cdot 2a-4Pa+Pa=0$　$R_A=\frac{3}{2}P$　$\Sigma y=0$　$R_B=\frac{5}{2}P$

取图 2—3*b* 所示的坐标与脱离体。

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$M_x=\frac{3}{2}Px$　　$Q_x=\frac{3}{2}P$

当 $a \leqslant x \leqslant 2a$ 时，　$M_x = \frac{3}{2}Px - 4P(x-a)$　　$Q_x = \frac{3}{2}P - 4P = -\frac{5}{2}P$

弯矩图，剪力图在 AC、CB 段都为直线，如图 2—3c、d 所示。

题 2—4(图 2—4a)

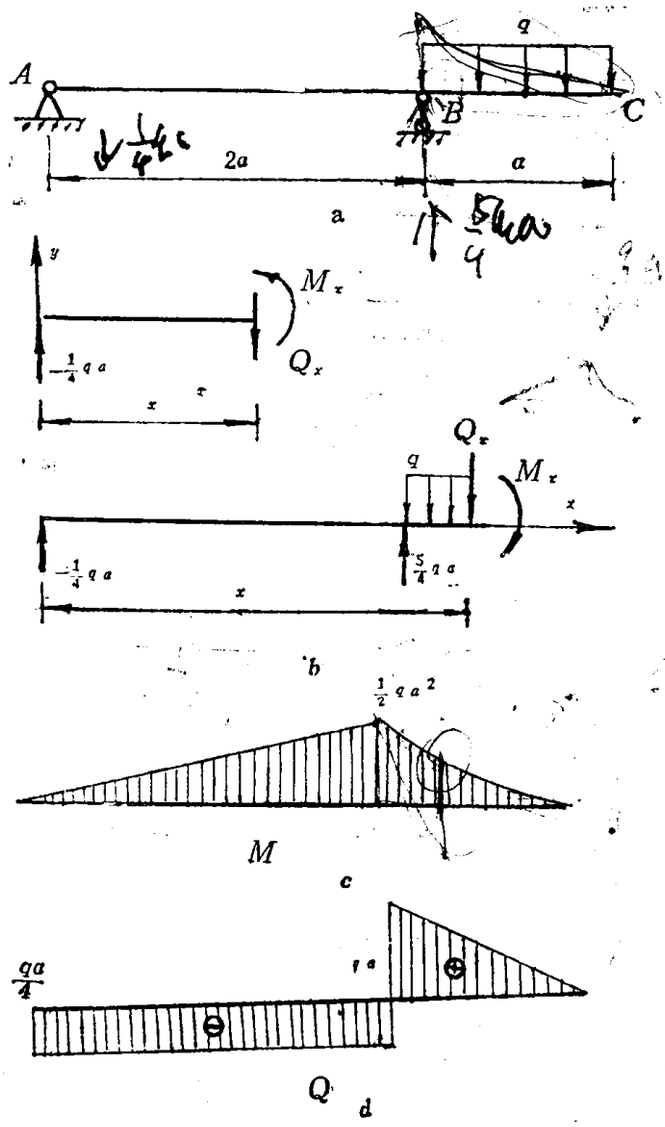


图　2—4

解：求支反力 $\Sigma M_B = 0$

$$R_A \cdot 2a + qa \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$R_A = -\frac{qa}{4}\downarrow$$

$$\Sigma y = 0$$

$$R_B = \frac{5}{4}qa\uparrow$$

取图 2—4b 所示的坐标与脱离体。

当 $0 \leqslant x \leqslant 2a$ 时，

$$M_x = -\frac{1}{4}qax$$

$$Q_x = -\frac{1}{4}qa$$

当 $2a \leqslant x \leqslant 3a$ 时，

$$M_x = \frac{5}{4}qa(x-2a) - \frac{1}{4}qax - \frac{q}{2}(x-2a)^2$$

$$Q_x = -\frac{5}{4}qa - \frac{1}{4}qa - q(x-2a)$$

弯矩图在 AB 段为斜直线，BC段为曲线；剪力图在这两段都为直线，分别如图 2—4c、d 所示。

2—5～2—10 题　用叠加法求下列各题的 M、Q 图。

题 2—5(图 2—5a)

解：根据叠加原理，结构在所有荷载作用下的内力应等于各个荷载单独作用下的内力相叠加后得到的内力。因此，结构的最终弯矩图、剪力图应该等于每个荷载分别作用下的弯矩图、剪力图相叠加。此题将荷载分为两种，分别求出这两种荷载的内力图，如图 2—5b、c 所示。最终弯矩图、剪力图应由下列式子确定：

$$M = M_1 + M_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

将 M_1，M_2 图的对应值代数相加，得到图 2—5d 所示的最后弯矩图 M。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

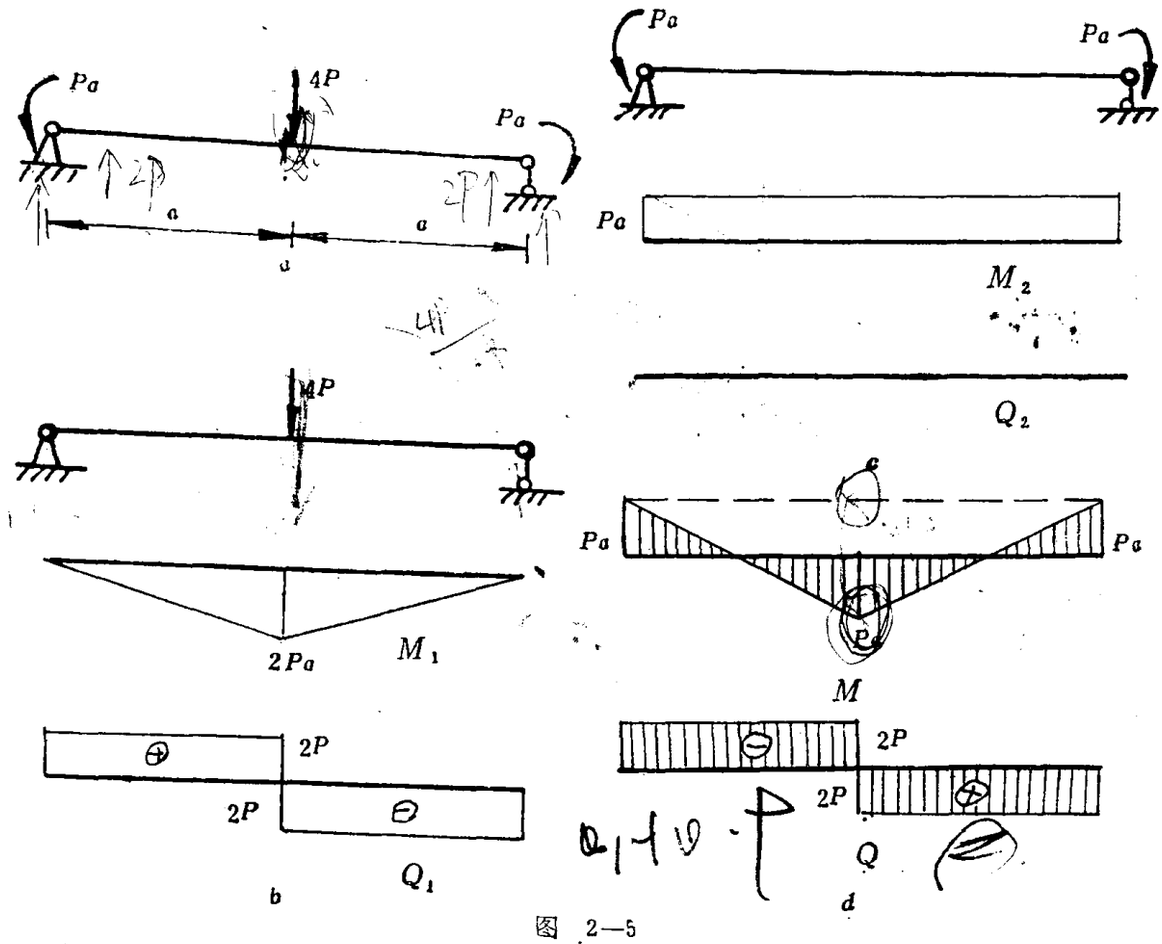


图 2—5

同样方法得到最后剪力图 Q（图 2～5d）。

题 2—6（图 2—6a）

解：将图 2—6a 所示的荷载分为图 2—6b、c 所示的两种形式，分别作出这两种情况下的弯矩图、剪力图（图 2—6b、c）。最后将这两种情况下的内力图分别对应相叠加就得到图 2—6d 所示的最终弯矩图和剪力图。

题 2—7（图 2—7a）

解：将图 2—7a 结构上的荷载分为图 2—7b、c 所示的两部分，其余的作法和上题相同。最终 M、Q 图如图 2—7d 所示。

题 2—8（图 2—8a）

解：将图 2—8a 结构上的荷载分为图 2—8b、c 的两种形式，分别作出这两种情况下的内力图（图 2—8b、c），然后将这两

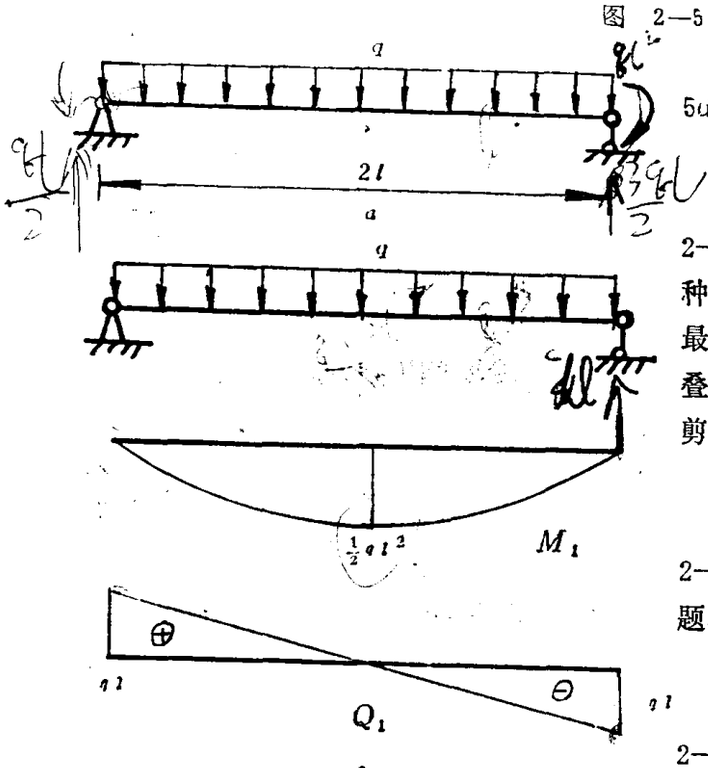


图 2—6

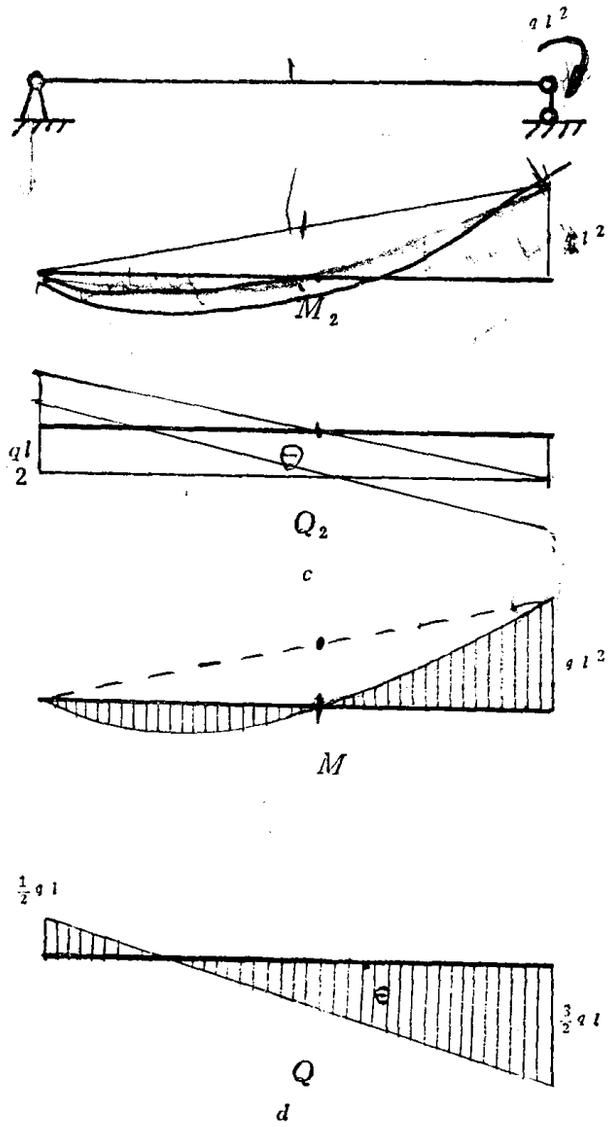


图 2—6

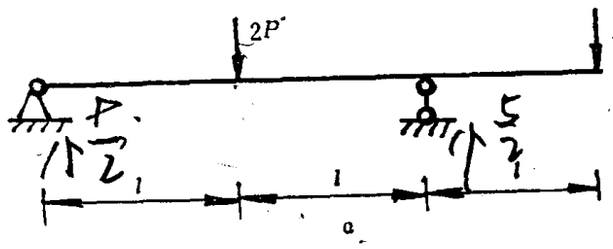


图 2—7

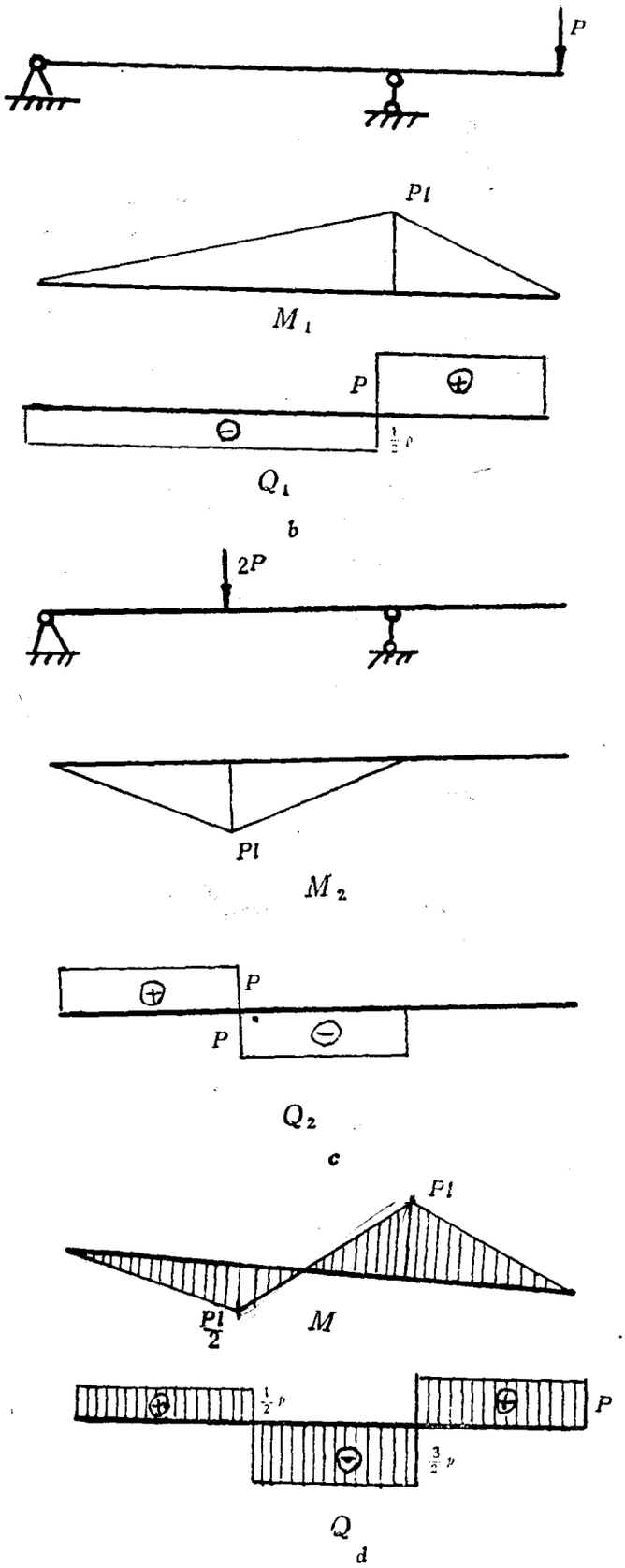

P
Pl
M_1
P
⊕
⊖
$\frac{1}{2}P$
Q_1
b
2P
Pl
M_2
⊕
P
P
⊖
Q_2
c
Pl
$\frac{Pl}{2}$
M
⊕
$\frac{1}{2}P$
⊕
P
⊖
$\frac{3}{2}P$
Q
d

图 2—7

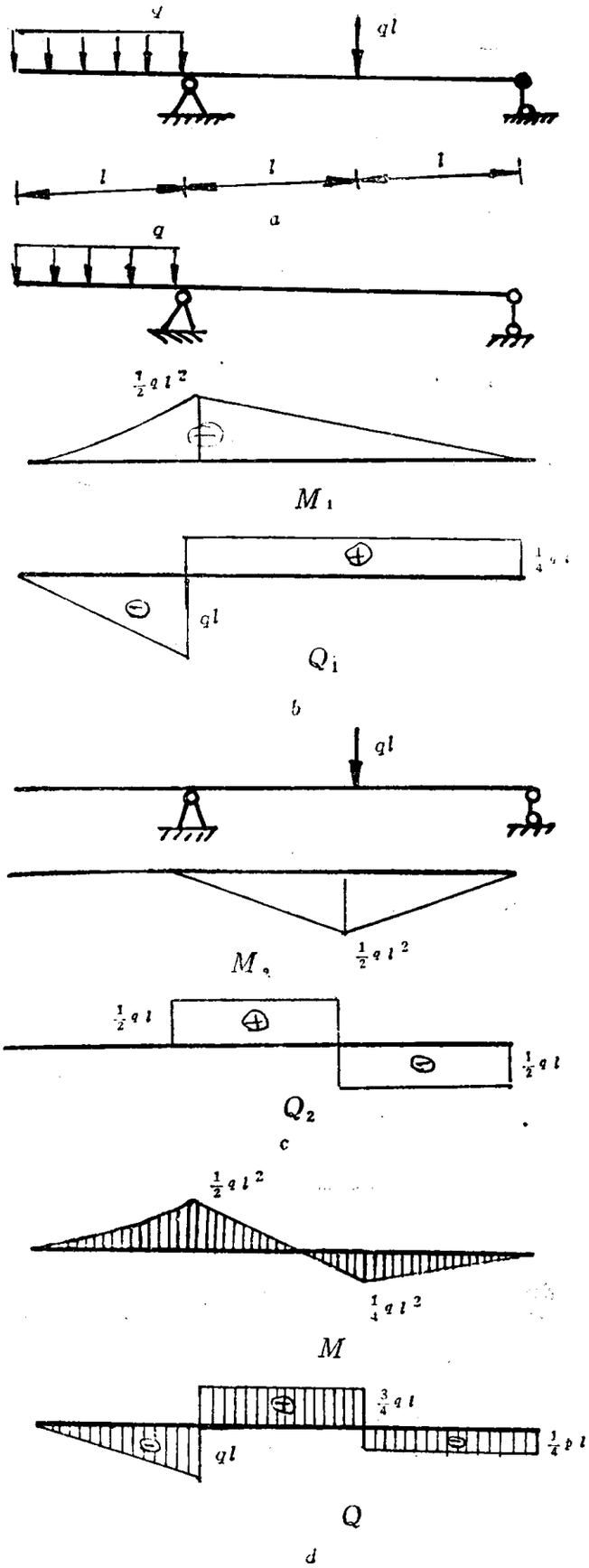

q
ql
l
l
l
a
q
$\frac{1}{2}ql^2$
M_1
$\frac{1}{4}ql$
ql
Q_1
b
ql
$\frac{1}{2}ql^2$
M_2
$\frac{1}{2}ql$
$\frac{1}{2}ql$
Q_2
c
$\frac{1}{2}ql^2$
$\frac{1}{4}ql^2$
M
$\frac{3}{4}ql$
$\frac{1}{4}ql$
ql
Q
d

图 2—8

种情况下的内力图分别对应相加就得到最终 M，Q 图(图 2—8d)，作法同上。

题 2—9(图 2—9a)

解：将图 2—9a 结构上的荷载分为图 2—9b、c 的两种形式。其余作法同上。最后得 M、Q 图如图 2—9d 所示。

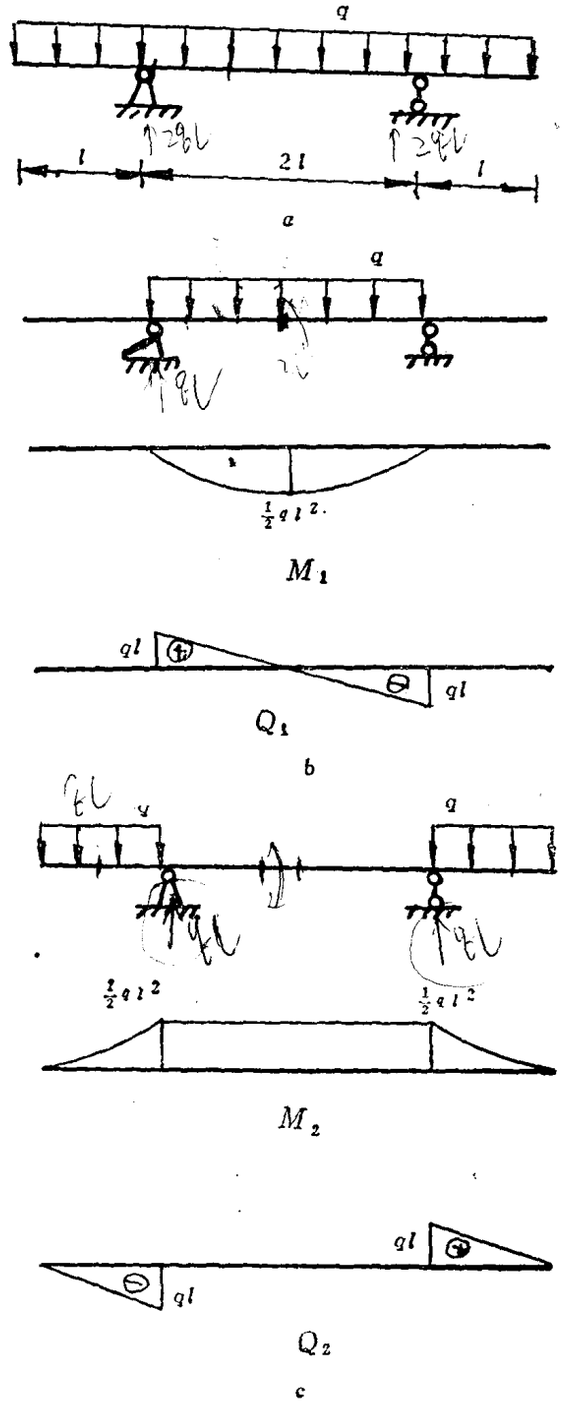


图 2—9

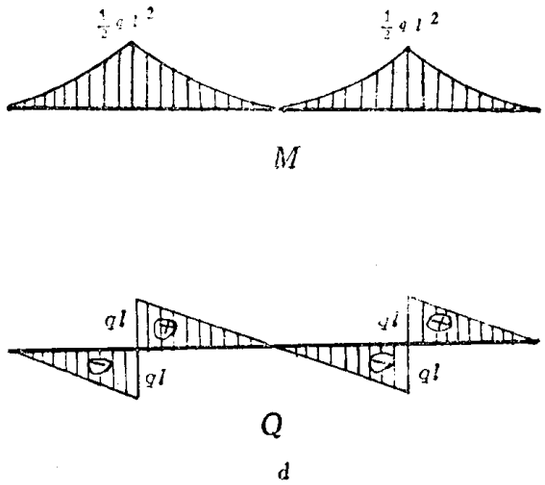


图 2—9

题 2—10(图 2—10a)

解：将图 2—10a 所示结构上的荷载分为图 2—10b、c 的两部分，作法同上．最后得 M、Q 图如图 2—10d 所示．

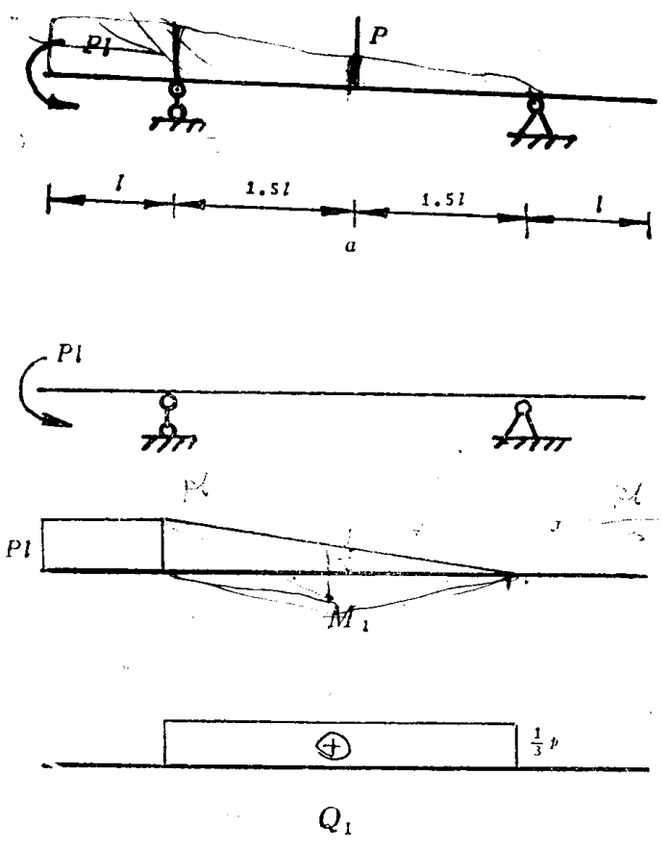


图 2—10

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com