XIAN XING DAI SHU

线性代数

邓长寿 雷衍天 周泰文 编著

中国铁道出版社

线 性 代 数

邓长寿　雷衍天　周泰文　编著

中 国 铁 道 出 版 社
1996 年 · 北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是作者在国防科技大学、长沙铁道学院多年讲授《线性代数》课的心得荟萃，可作为高等院校中对数学要求较高的非数学专业的教材。

基本内容有行列式、线性方程组、向量、矩阵、线性空间、线性变换、欧氏空间、实二次型等。书末还附有习题答案与提示。

全书文字简明，思路清晰，方法明确。也可作为自考教材和拟考工科硕士研究生者、有关教师及科技人员的参考书。

线性代数

邓长寿 雷衍天 周泰文 编著

中国铁道出版社出版发行

（北京市宣武区南菜园街 72 号）

责任编辑 殷小燕 封面设计 翟 达

各 地 新 华 书 店 经 售

北京市燕山联营印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：9.75 字数：258 千

1996 年 8 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数：1—3000 册

ISBN7-113-02466-1/O·48 定价：18.00 元

前　言

这本《线性代数》，作为教材，有如下几个特点：

第一，内容适中，比数学专业的线代教材要少，比现有的非数学专业类的线代教材要多，比较适合于计算机、电子、物理等对线性代数要求较高的非数学专业和准备考工科硕士研究生的学生的需要。目录中注有 * 号的内容，可根据专业需要不讲或略讲。

第二，便于大专院校在一年一期就开设线性代数课。我们在本书中适当补充了一些预备知识，使得具备高中数学知识的人便可学懂。在一年一期开设了这门课，有利于后续课程的及时开设。我们已经这样做了十几年，实践证明是可行的。

第三，难点分散。例如，向量组的线性相关性、矩阵的秩和齐次线性方程组的基础解系等理论，分别写在三章里。在文字叙述上又简明易懂。多年的教学实践证明，这样安排确有利于学生接受。

第四，习题逐节配置，便于边学边练，边检查，边巩固。

第五，某些定理的证明和教材的处理有自己的特色。

这本教材是我们多年从事线性代数教学的心得，但难免有不妥之处，请读者批评指正。

编者

1996 年 2 月

目　　录

第一章　行列式与线性方程组的两个解法

行列式与线性方程组有密切联系。它们都是线性代数的重要内容。在这一章里，我们先介绍行列式理论，再介绍线性方程组的两个解法。至于线性方程组的一般理论，将在学习了向量和矩阵之后，于第四章中讨论。本章前三节是介绍预备知识。

§1.1　数　　域

数学自然离不开数，而数总是与运算紧密相联。因而，我们要研究对于两个数进行运算的结果所属的数集。

定义1　如果某一数集中对任意两个数经过某种运算得到的结果仍在此数集中，就称此数集对于这种运算是**封闭**的。

例如　在整数集 Z 中，对任意两个数 m 与 n，均有 $m+n\in Z$，$mn\in Z$ 所以整数集 Z 对加法和乘法都是封闭的，但对除法不封闭。

例如　$5\in Z$，$3\in Z$，而 $5/3 \overline{\in} Z$。

定义2　如果一个数集至少含有0与1，且对加、减、乘、除（除数不为0）四则运算都封闭，则称此数集是一个**数域**。

全体实数做成的实数集 R，含有0和1，且对加、减、乘、除四则运算都封闭，所以实数集 R 是数域，称为**实数域**。

通过检验，易知有理数集 Q 和复数集 C 都是数域，分别称它们为**有理数域**和**复数域**。

R 和 C 是两个最重要的数域。但整数集 Z 却不是数域，因为 Z 对于除法运算不封闭。

下面我们将看到数域 C 和 R 的子集也可能构成数域。

例　求证 R 的子数集 $P=\{u\,|\,u=a+b\sqrt{3},a、b\in Q\}$ 是数域。

证明

$$0=0+0\sqrt{3}\in P$$

$$1=1+0\sqrt{3}\in P$$

任取 u、$v\in P$，则

$$u=a+b\sqrt{3}\qquad a、b\in Q$$

$$v=c+d\sqrt{3}\qquad c、d\in Q$$

$$\begin{aligned}u+v&=(a+b\sqrt{3})+(c+d\sqrt{3})\\&=(a+c)+(b+d)\sqrt{3}\end{aligned}$$

由于 Q 是数域，对加法封闭，因而 $a+c$、$b+d\in Q$，所以 $u+v\in P$。

同理可知

$$\begin{aligned}u-v&=(a+b\sqrt{3})-(c+d\sqrt{3})\\&=(a-c)+(b-d)\sqrt{3}\in P\\u\cdot v&=(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})\\&=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\in P\end{aligned}$$

现设 $v=c+d\sqrt{3}\neq 0$，那么必有 $c-d\sqrt{3}\neq 0$。

否则若 $c-d\sqrt{3}=0$ 当 $d=0$ 时，得 $c=0$，这与 $c+d\sqrt{3}\neq 0$ 的假设相矛盾，当 $d\neq 0$ 时，推出 $\sqrt{3}=c/d\in Q$，这与 $\sqrt{3}$ 是无理数相矛盾。因此

$$\begin{aligned}\frac{u}{v}=\frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}&=\frac{(a+b\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}{(c+d\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}\\&=\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

因 Q 是数域，$\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}$、$\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}$ 均 $\in Q$，所以，$\frac{u}{v}\in P$

这就证明了 P 是数域。　　　　（证毕）

习　　题　　1-1

1. 说明下列数集对四则运算中哪几种运算是封闭的：

(1)　偶数集；

(2) 非负实数集；

(3) $\{0,1\}$；

(4) $P=\{x \mid |x| \leqslant 1\}$。

2. 证明下列数集是数域：

(1) $P=\{u \mid u=a+bi \quad a、b \in Q\}$；

(2) $M=\{u \mid u=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}, a、b \in R\}$。

3. 举例说明下列集合不是数域：

(1) $P=\{u \mid u=m+n\sqrt{5}, m、n \text{是整数}\}$；

(2) $M=\{0,1,2,3\cdots\}$。

§1.2 连加与连乘

多个数连加之和 $a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n$ 常简记为 $\sum_{i=k}^{n} a_i$，

$$\sum_{i=k}^{n} a_i \triangleq^{①} a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n \qquad (1)$$

$\sum$ 是求和符号，a_i 表示一般项，足标 i 是一个整变量，称为求和指标。$\sum$ 上下的字母符号表示 i 的取值范围是从 k 到 n。求和指标用什么字母表示都是可以的，如：

$$\sum_{i=k}^{n} a_i=\sum_{t=k}^{n} a_t=\sum_{j=k}^{n} a_j$$

因为将这三个式子展开后，求和指标便消失了，得到的结果是一样的。

求和范围的表示，不限于上面一种方式。例如(1)也可表示成：

$$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n=\sum_{k \leqslant i \leqslant n} a_i$$

对于 $m \times n$ 个数 $a_{11}、a_{12}、\cdots、a_{1n}、a_{21}、a_{22}、\cdots、a_{2n}、\cdots、a_{m1}、a_{m2}、\cdots、a_{mn}$。

设 S 表示它们的和，则

① 符号“$\triangleq$”表示“规定为”。

$$S=(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+\cdots$$
$$+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_{mj}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})$$

由于加法满足交换律和结合律，因而有

$$S=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})$$
$$+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn})$$
$$=\sum_{i=1}^{m}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}a_{in}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij})$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij})$$

省去括号，又可写成

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \tag{2}$$

这说明了二重求和可以交换求和的顺序。类似地还可引进三重求和符号，也同样可交换顺序。

多个数连乘之积 $a_k\cdot a_{k+1}\cdot\cdots\cdot a_n$，可利用求积符号 $\prod$ 简记，

$$a_k a_{k+1} a_{k+2}\cdots a_n \triangleq \prod_{i=k}^{n}a_i$$

对于二重求积，也可交换求积符号。

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ij}$$

求 $\sum_{i=k}^{n}cb_i$ 时，若 c 是与 i 无关的常数，根据加法的性质有

$$\sum_{i=k}^{n}cb_i=c\sum_{i=k}^{n}b_i$$

即与求和指标 i 无关的常数因子可以提到求和符号外面来。

但求$\prod\limits_{i=k}^{n} cb_i$时，若$c$是与$i$无关的常数，则有

$$\prod_{i=k}^{n} cb_i = c^{n-k+1}\prod_{i=k}^{n} b_i。$$

习 题 1-2

1. 计算下列各式：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} i$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{10} 2$；

(3) $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{j(j+1)}$；

(4) $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{l=2}^{n} c(l-1)i^2$。

2. 利用求和符号表示多项式

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n。$$

3. 计算下列各式：

(1) $\prod\limits_{i=1}^{10} 3$；

(2) $\prod\limits_{l=1}^{n} 10^l$；

(3) $\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n} 2^{i+j}$；

(4) $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 10} (j-i)$。

§1.3 n级排列的逆序数与奇偶性

在中学代数中已知：n个不同的元素a_1、a_2…、a_n可以排成$n!$个不同的排列。对研究排列而言，只须注意元素的先后次序，不必考虑元素本身是什么。为了简便，我们就用前n个自然数来代替这n个不同元素。

定义 1 由前 n 个自然数组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**。

常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 来表示 n 级排列的一般形式，其中 j_k 表示第 k 个位置上的数。

在一个 n 级排列中，如果两个不同位置上的一对数，大的排在小的左边，便称它们构成一个**逆序**；所有逆序个数之和，称为此**排列的逆序数**。排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，用符号 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示。例如在五级排列 21435 中，2 与 1，4 与 3 构成两个逆序，其它任意两个数均不构成逆序，所以 $\tau(21435)=2$。

一般地，求一排列的逆序数时，可以先写出其中每个数的左边比它大的数的个数，再将这些个数相加。

例 1

$$\tau(3\quad 4\quad 5\quad 1\quad 9\quad 8\quad (10)\quad 2\quad (11)\quad 7\quad 6)$$
$$=0+0+0+3+0+1+0+6+0+4+5$$
$$=19$$

例 2 $\tau(1\quad 2\quad 3\cdots n)=0$

定义 2 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

例如 排列 2 1 4 3 5 的逆序数为 2，所以它是偶排列；而 $\tau(4\quad 2\quad 3\quad 1)=5$，所以 4 2 3 1 是奇排列。按照数字左小右大的顺序排起来的排列，称为**自然排列**，$1\quad 2\quad \cdots\quad n$ 就是自然排列，它的逆序数为 0，是偶排列。

把一个排列中某两个数的位置互换，其余的都不动，得到一个新的排列，这样作称为对排列进行了一次**对换**。

定理 1 每一次对换都改变排列的奇偶性。

定理的意思是：奇排列经过一次对换变成偶排列；偶排列经过一次对换变成奇排列。

证明 先考虑邻换，即对换排列中两个相邻的数的情形。

设排列

$$\cdots ij \cdots \tag{1}$$

经过 i 与 j 的对换变成排列

$$\cdots ji \cdots \tag{2}$$

这里"…"表示不动的数。

在(1)中,i 与 j 的大小有两种可能:1° $i > j$,则它们在(1)中构成逆序,在(2)中不构成逆序;2° $i < j$,则它们在(1)中不构成逆序,在(2)中却构成逆序。而 i、j 与其他数之间,其他数相互之间,由于相对位置不变,逆序数也就不变。所以,(1)经过邻换得到(2),逆序数不是减少一个,就是增加一个。因而逆序数的奇偶性改变了,排列的奇偶数也就随着改变了。

对于一般情形,设排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_Sj\cdots \tag{3}$$

通过 i 与 j 的对换,得到

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_Si\cdots \tag{4}$$

从(3)到(4)也可通过一系列邻换来实现:从(3)出发,将 j 与 k_S 对换,再与 k_{S-1} 对换,…,直至将 j 与 k_1 邻换后再与 i 邻换,也就是将 j 一位一位地向左移,经过 $S+1$ 次邻换,排列(3)就变成了

$$\cdots jik_1k_2\cdots k_S\cdots \tag{5}$$

再从(5)出发,将 i 一位一位地往右移,经过 S 次邻换,排列(5)就变成(4)。总起来,从(3)经(5)到(4),共经过 $2S+1$ 次邻换,排列的奇偶性也就改变了 $2S+1$ 次,所以(3)与(4)的奇偶性恰好相反。 (证毕)

定理 2 任意两个 n 级排列总可以通过若干次对换相互转化。

证明 设

$$j_1 \quad j_2 \quad \cdots \quad j_n \tag{1}$$

$$i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_n \tag{2}$$

为两个 n 级排列,且均非自然排列。

在(1)中,若 $j_1 = 1$,则(1)就是 $1j_2j_3\cdots j_n$;若 $j_1 \neq 1$,则将 j_1 与 1 对换后,可得 $1j'_2\cdots j'_n$。若 $j'_2 = 2$,则通过一次对换可将(1)化为

$$1 \quad 2 \quad j'_3 \quad \cdots \quad j'_n。$$

若 $j'_2 \neq 2$,则将 j'_2 与 2 对换后,可得

$$1 \quad 2 \quad j''_3 \quad \cdots \quad j''_n。$$

仿上法,最多经过$(n-1)$次对换,即可将(1)化为自然排列

$$1 \quad 2 \quad \cdots \quad n。$$

同样,n级排列(2)也可经过若干次对换化为自然排列。将(1)化为自然排列后,再按(2)化为自然排列的过程反推,即可将(1)化为(2)。 (证毕)

定理3 **n级排列的奇偶性与经过对换化为自然排列所需对换次数的奇偶性相同。**

证明 由于自然排列是偶排列并且作一次对换就改变一次排列的奇偶性。设此排列化为自然排列所需的对换次数为s,则当s为偶(奇)数时,此排列为偶(奇)排列。 (证毕)

例3 通过对换将1 2 3 4 5化为4 3 1 5 2,并检验4 3 1 5 2的奇偶性与对换次数的奇偶性是否相同。

解 将4与1对换得到4 2 3 1 5,

再将3与2对换得到 4 3 2 1 5,

对换1与2,得到 4 3 1 2 5,

对换5与2,便得到 4 3 1 5 2。

共经过4次对换。而$\tau(4 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 2)=6$,即4 3 1 5 2与对换次数4的奇偶性相同。

可以证明

定理4 **$n \geqslant 2$时,在一切不同的n级排列中,奇偶排列的个数相等,都是$\frac{1}{2}n!$个。**

习 题 1-3

1. 计算下列排列的逆序数,并指出其奇偶性:

(1) 5 2 3 1 4 6;

(2) $n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1$;

(3) $(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$。

2. 写出全部3级排列，并说明奇偶排列各占一半。

3. 通过对换将排列3 1 4 2 5化为自然排列。

4. 试确定i与j，使得1 2 7 4 i 5 6 j 9为奇排列。

§1.4 二阶与三阶行列式

解含有两个或三个未知量的线性方程组，我们在中学阶段已经学习过。现在，来建立这两类方程组的求解公式。

对于含两个未知量的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

利用消元法

(2) $\times a_{11}$ − (1) $\times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，则有

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

(1) $\times a_{22}$ − (2) $\times a_{12}$ 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{4}$$

将(3)与(4)合并起来便得到求解公式：

若 $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

则
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{d}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{d}。 \end{cases} \tag{I}$$

例1 解线性方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

解

$$d = 3 \times 2 - 4 \times 1 = 2 \neq 0$$

$$\because \quad 6 \times 2 - 4 \times 4 = -4$$

$$3 \times 4 - 6 \times 1 = 6$$

上公式(Ⅰ)得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4}{2} = -2, \\ x_2 = \dfrac{6}{2} = 3。 \end{cases}$$

代入原方程组验算，可知 $x_1 = -2, x_2 = 3$ 是它的解。

对含三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_2 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

通过消元，同样可以得到求解公式：如果

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$$

则有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}b_{32}}{d} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3}{d} \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{d} \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

公式(Ⅱ)显然太繁，不便于书写、记忆。为便于书写记忆，我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ 来表示

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

即