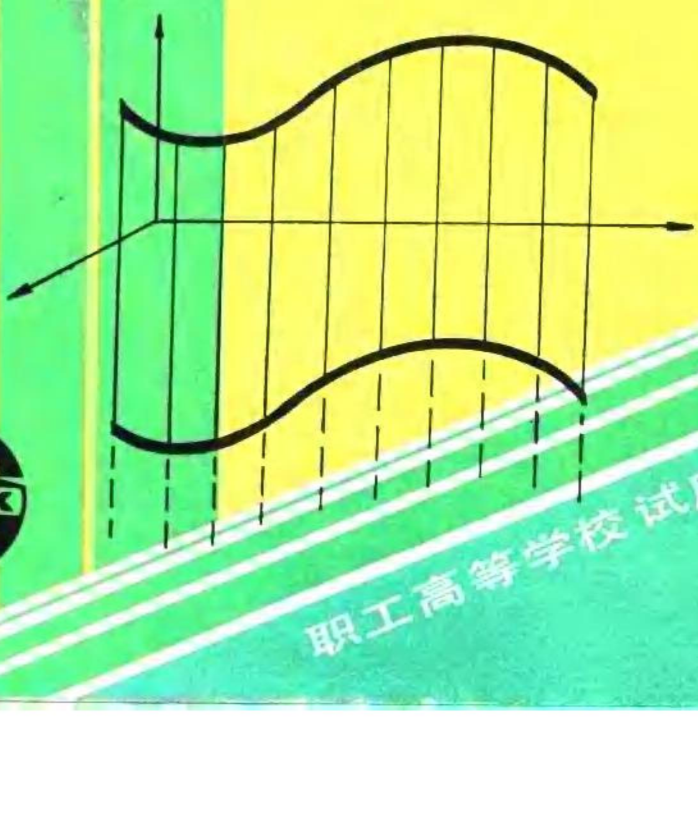
应用数学基础

姚允龙 黄午阳 编著



职工高等学校试用教材

职工高等学校试用教材

应用数学基础

姚允龙
黄午阳　编著

上海科学技术文献出版社

职工高等学校试用教材
应用数学基础
姚允龙　黄午阳　编著
*
上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号)
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷
*
开本 850×1168 1/32　印张 15.5　字数 416,000
1986年8月第1版　1986年8月第1次印刷
印数：1—8,000

书号：13192·88　定价：3.40元

《科技新书目》120-206

前　言

随着工程技术的发展，数学特别是应用数学获得了日益广泛的应用。对于工科院校的学生来说，如按传统教材那样去学有关的数学内容势必耗费大量时间，这完全是没有必要的。因为工科学生学数学的目的主要在于应用，而不是去搞数学理论的研究。基于这一出发点，我们认为可对传统教材的体系及内容作较大的更动，以使学生能在一年时间内学完微积分、常微分方程、级数、线性代数、概率论、线性规划等基础内容。《应用数学基础》一书正是为了达到上述目的而编写的一本教材。

该书与传统教材相比具有以下特点：

1. 利用二次函数的最值问题引出导数及一些简单的求导公式。

2. 将导数直接定义为切线的斜率。

3. 对极限理论作了简化处理。

4. 将定积分直接定义为面积，并把广义积分作为它的特例来处理。

5. 在线性代数中突出了矩阵及其有关运算。

6. 对概率的计算作了简化处理。

我们认为，对于工科院校以及不是专门从事数学理论研究的同志来说，本书的处理方法还是可行的。在编写本书的过程中，曾得到许多同志的热情鼓励和大力支持，在此向他们表示衷心感谢。我们恳切地希望同志们多提宝贵意见以使本书不断完善。

编　者

目　　录

第一章　一元微分学

§1　函数与自变量

函数概念是大家熟悉的概念，譬如

$$y=ax^2+bx+c \tag{1.1.1}$$

$$y=\sin x \tag{1.1.2}$$

$$y=\frac{x}{1+x} \tag{1.1.3}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1) \tag{1.1.4}$$

都是函数的例子。这些例子中的 x 是自变量，y 是 x 的函数(也称为因变量)。而在例子

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

中，自变量是 t，函数是 x。记号 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=y(x)$, $y=h(x)$, $x=x(t)$ 等等都是表示函数。在记号 $y=f(x)$ 中，自变量是 x，而 y 是 x 的函数。但在记号 $x=x(t)$ 中，自变量是 t，而 x 是 t 的函数。

若 $y=f(x)$ 中，x 用一个数 x_0(或一个公式)代入，可得一个数 $f(x_0)$(或一个新式子)。譬如对 $f(x)=x^2$，有 $f(0)=0^2=0$, $f(2)=2^2=4$, $f(-1)=(-1)^2=1$, $f(t)=t^2$, $f(\sin t)=\sin^2 t$, $f\left(\frac{1}{u}\right)=\left(\frac{1}{u}\right)^2=\frac{1}{u^2}$, $f(f(x))=(f(x))^2=(x^2)^2=x^4$ 等等。

练习题

1) 设 $f(x)=x^2+x+1$，求 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(t)$, $f\left(\frac{2}{x}\right)$, $f(u+v)$。

2) 设 $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$，求 $x^2(t)+y^2(t)$, $x(t)y(t)$,

$y(t)/x(t)$, $y(x(t))$, $f(x(t))+f(-y(t))$（f 同第一题）。

【答案 1) $f(1)=3$, $f(-1)=f(0)=1$, $f(t)=t^2+t+1$, $f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(4+2x+x^2)$, $f(u+v)=(u+v)^2+(u+v)+1$; 2) $x^2(t)+y^2(t)=1$, $x(t)y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$, $y(t)/x(t)=\operatorname{tg} t$, $y(x(t))=\sin(\cos t)$, $f(x(t))+f(-y(t))=3+\cos t-\sin t$。】

使函数有意义的自变量取值范围叫该函数的定义域。譬如(1.1.3)式，分母不能为零，故它的定义域是 $x+1\neq 0$，即 $x\neq -1$。为了表示各种函数的定义域，使用区间记号 (a, b)，$[a, b]$ 等等是方便的：

(a, b) 表示满足 $a<x<b$ 的数 x 全体，读成开区间 a 到 b；

$[a, b]$ 表示满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的数 x 全体，读成闭区间 a 到 b。

譬如，开区间 $(0, 1)$ 表示大于零小于 1 的数的全体，而闭区间 $[0, 1]$ 则表示大于等于零小于等于 1 的数的全体，因此闭区间 $[0, 1]$ 比开区间 $(0, 1)$ 多了 0 与 1 两个端点。

此外 $(a, b]$ 表示 $a<x\leqslant b$；$[a, b)$ 表示 $a\leqslant x<b$，分别读成半开闭区间 a 到 b，半闭开区间 a 到 b。

例 1 求函数 $y=\sqrt{x}+1/\sqrt{1-x}$ 的定义域。

解 $\sqrt{x}$ 要求 $x\geqslant 0$。而 $\sqrt{1-x}$ 要求 $1-x\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 1$，但分母要求不等于零，故 $x<1$。最后得定义域是闭开区间 $[0, 1)$。

易见函数(1.1.1)式的定义域是全直线，记为 $(-\infty, +\infty)$，读作从负无穷大到正无穷大。不难想到满足 $x>0$ 的 x 全体应记为 $(0, +\infty)$，读作开区间 0 到正无穷大。类似地可知 $[0, +\infty)$，$(-\infty, a)$ 等等记号的含义。

练习题

1) 在数轴上表出 $[-1, 1]$；$[2, +\infty)$；$(-\infty, -3)$；

2) 指出 $[0, +\infty)$ 与 $(0, +\infty)$ 的区别；

3) 求函数(1.1.2)与(1.1.4)的定义域。

【答案 1) 见图 1.1-1；2) $[0, +\infty)$ 比 $(0, +\infty)$ 多了一点 O；3) $(-\infty, +\infty)$ 及 $(0, 1)$。】

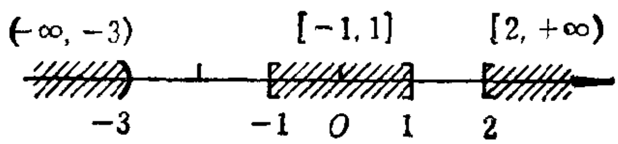


图 1.1-1

区间是比较简单的集合。还会遇到更为丰富多采的集合，这时可采用条件法来指明这些集合，例如

$$A=\{n|n\text{ 是自然数}\}$$

表示了自然数 $n=1, 2, \cdots$ 所组成的集合，n 叫该集合的元素，一般用条件法来指明集合时，总是用大括号$\{\cdots\}$，在一竖线之后表示条件。又如集合

$$A=\{\text{人}|\underbrace{\text{年龄}\leqslant 30\text{ 岁}}_{\text{条件}}\}$$

表示了年龄不大于 30 岁的人的全体，其中“人”是该集合的元素。如果 x 是集合 A 的元素，则可记为 $x\in A$，读成 x 属于 A。譬如

$$\frac{1}{2}\in[0, 1],\ 10\in\{n|n\text{ 是自然数}\}$$

在 x 不是集合 A 的元素时，则记为 $x\notin A$，读成 x 不属于 A，譬如

$$-1\notin[0, 1],\ \frac{4}{3}\notin[0, 1],\ 10.5\notin\{n|n\text{ 是自然数}\}$$

使用“$\in$”与“$\notin$”记号必须一头是元素，另一头是集合：

$$\underset{\text{元素}}{x}\in\underset{\text{集合}}{A}\qquad\underset{\text{元素}}{x}\notin\underset{\text{集合}}{A}$$

有时两个集合可比较大小，譬如$[0, 2]$比$[0, 1]$大，这时可记为

$$\underset{\text{小}}{[0, 1]}\subset\underset{\text{大}}{[0, 2]}\text{ 或 }\underset{\text{大}}{[0, 2]}\supset\underset{\text{小}}{[0, 1]}$$

记号“$\subset$”称为“包含于”，如$[0, 1]$包含于$[0, 2]$，而$[0, 2]$包含$[0, 1]$。又如

$$\{\text{人}|\text{年龄}\leqslant 30\text{ 岁}\}\subset\{\text{人}|\text{年龄}\leqslant 100\text{ 岁}\}$$

$$\{n|n\text{ 是偶数}\}\subset\{n|n\text{ 是自然数}\}$$

等等。注意包含记号"⊂"只能用在集合比较之中：

$$\underset{\text{集合}}{A}\subset\underset{\text{集合}}{B}$$

练习题

下面的用法中哪些是对的，哪些是不对的（不对的请改正）：

$0\in(-1,1)$；$0\in(0,1)$；$\frac{1}{2}\subset[0,3]$；$-1\notin[-1,0)$；

$(0,1)\subset[0,1]$；$(0,2)\subset(-\infty,+\infty)$；$(-1,1)\in[-2,2]$

【答案　对；不对，$0\notin(0,1)$；不对，$\frac{1}{2}\in[0,3]$；不对，$-1\in[-1,0)$；对；对；不对，$(-1,1)\subset[-2,2]$。】

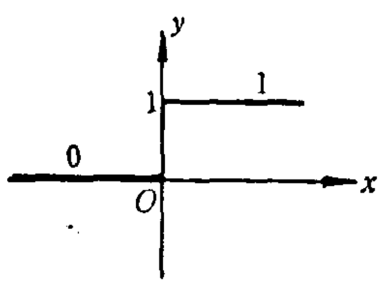


图 1.1-2

不要以为函数只能由一个公式来表示。实际上许多函数是用分段形式来表示的。譬如（图 1.1-2）

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

是个典型的分段函数，它在 $x\geqslant 0$ 时取值为 1，在 $x<0$ 时取值为 0。于是有 $f(0)=1$，$f(1)=1$，$f(-1)=0$ 等等。

练习题

1）已知分段函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

求 $F(-10)$；$F\left(-\frac{1}{2}\right)$；$F(0)$；$F(1)$；$F(100)$；$F(F(x))$，并作 $F(x)$ 的图形；

2）写出绝对值函数 $y=|x|$ 的分段表示式。

【答案　1）$F(-10)=F\left(-\frac{1}{2}\right)=F(0)=0$；$F(1)=1$；$F(100)=100$；$F(F(x))=F(x)$，图 1.1-3(a)；2）由图 1.1-3(b) 知

$$|x|=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$ 】

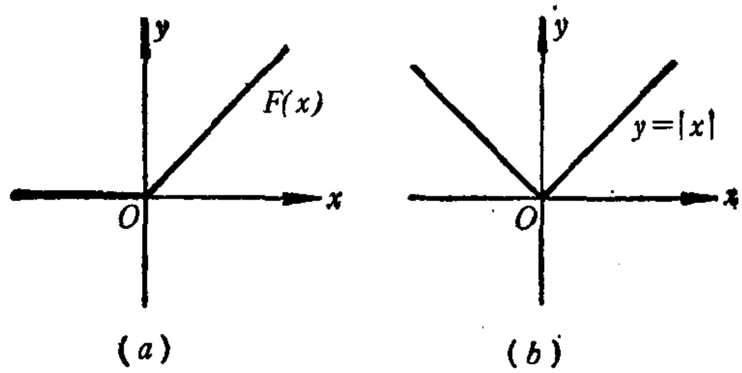


图1.1-3

例2 设个人月收入小于 a 元时免税。大于 a 元时，超过部分按 $k\%$ 加税，写出月收入 x 与应交税 y 之间的函数分段表示式。

解 在 $x\leqslant a$ 时，$y=0$。在 $x>a$ 时，超过 a 元部分 $x-a$ 中应交 $(x-a)\cdot k\%=\frac{k}{100}(x-a)$ 的税，故

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \frac{k}{100}(x-a), & x>a\end{cases}$$

在许多问题中，自变量不止一个。例如 $z=x+y+1$，$z=x/\sqrt{x^2+y^2}$ 等等中，自变量有 x，y 两个。有两个自变量的函数叫二元函数，类似地有三个自变量的函数叫三元函数，等等。二元函数可记成 $z=F(x, y)$，自然其中字母可改用任何其它字母。譬如 $F(x, y)=x+y-1$，$G(t, s)=t^2+s^2-1$，$w(u, v)=u/\sqrt{u^2+v^2}$ 等等。三元及多元函数也有类似的记号。

练习题

1) 设 $F(x, y)=x+y-1$，求 $F(0, 0)$，$F(1, 0)$，$F(1, 2)$，$F(t, t)$，$F(x, -1)$；

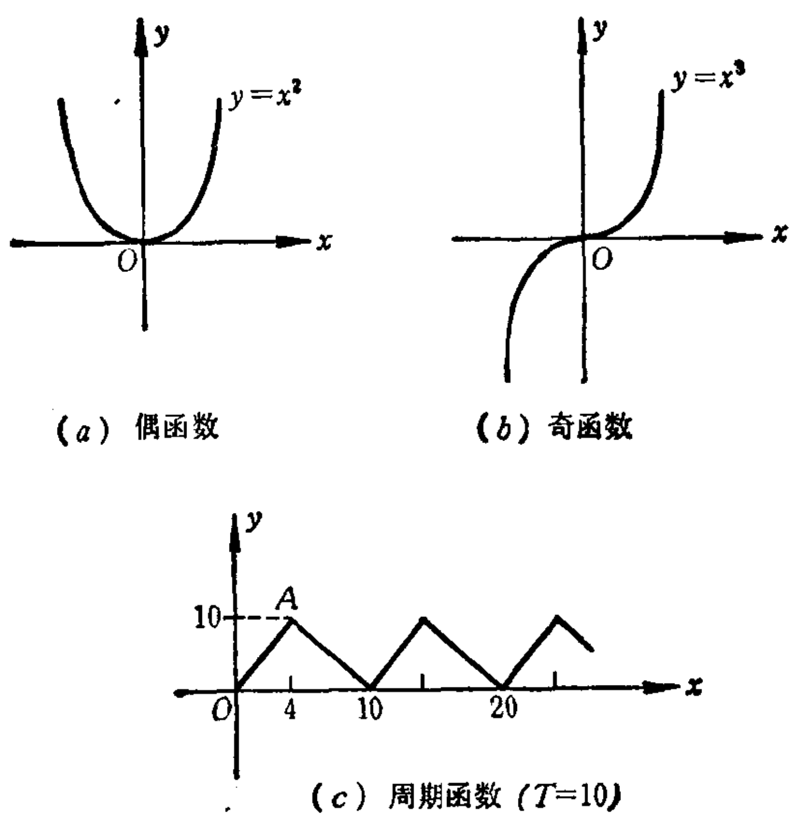
2) $w(x, y, z)=x+2y+3z$ 及 $G(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$ 是几元函数？求 $w(0, 0, 0)$，$w(1, -1, 0)$，$G(1, 1, 1)$，$G(\sqrt{x}, \sqrt{2y}, \sqrt{3z})$；

3) 求 $z=1/\sqrt{x^2+y^2}$ 的定义域。

【答案 1) $F(0, 0)=-1$，$F(1, 0)=0$，$F(1, 2)=2$，$F(t, t)=2t-1$，$F(x, -1)=x-2$；2) 三元函数，$w(0, 0, 0)=0$，

$w(1,\ -1,\ 0)=-1$, $G(1,\ 1,\ 1)=3$, $G(\sqrt{x},\ \sqrt{2y},\ \sqrt{3z})=x+2y+3z$; 3) $x^2+y^2\neq 0$, 即$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$。】

本节余下部分复习一下一些中学已学过的初等数学：什么叫偶函数？函数图形关于y轴对称的函数$y=f(x)$叫偶函数，它的公式是$f(-x)=f(x)$，譬如$y=x^2$, $y=\cos x$都是偶函数。什么叫奇函数？图形关于原点对称的函数叫奇函数，它的公式是$f(-x)=-f(x)$，譬如，$f(x)=x$, x^3, $\dfrac{1}{x}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$等都是奇函数。什么叫周期函数？若存在$T>0$，使$f(x+T)=f(x)$的函数叫周期函数，其中T叫周期，最小的T（如果存在）就叫最小周期。很多情形下，周期是指最小周期。譬如$\sin x$, $\cos x$周期为2π，而$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$周期为π。奇、偶函数带来的好处是使我们只须讨论$x\geqslant 0$那一部分区间上函数的性质就足够了；而周期函数使我们只要讨论一个周期范围内函数的性质就足够了（见图1.1-4）。



(a) 偶函数　　(b) 奇函数

(c) 周期函数 ($T=10$)

图 1.1-4

例3　y表示库存量，x表示日期。图1.1-4(c)表示了y与x的关系。试用分段函数将$y=y(x)$表示出来。

解　从图 1.1-4(c) 可看出库存量 y 是日期 x 的周期函数，周期为 $T=10$。故我们只需在 $[0,\ 10]$ 上将 y 表示出来已足够。在闭区间 $[0,\ 4]$ 上，图形是过原点的直线，其斜率为 $10/4=2.5$。故 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=2.5x$。在 $4<x\leqslant 10$ 时，也是一直线，且过 $(4,\ 10)$ 及 $(10,\ 0)$ 两点，于是可算出 $y=-\dfrac{5}{3}(x-10)$。故在 $[0,\ 10]$ 上

$$y=y(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ -\dfrac{5}{3}(x-10), & 4<x\leqslant 10\end{cases}$$

练习题

安全库存量法的库存量 y 与日期 x 之间的关系示于图1.1-5。试用公式将 $[0,60)$ 上的 $y=y(x)$ 表示出来。

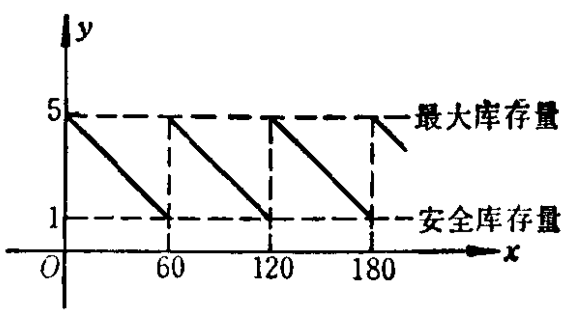


图 1.1-5

【答案　周期 $T=60$，

$$y=y(x)=-\frac{x}{15}+5,\ 0\leqslant x<60\text{。】}$$

在中学里我们还学过以下函数：幂函数 $y=x^{a}$；指数函数 $y=a^{x}(a>0)$；对数函数 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$，在底数 $a=10$ 时，又叫常用对数，记为 $y=\lg x$；正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切与余切函数 $y=\operatorname{tg} x$，$y=\operatorname{ctg} x$；反三角函数 $y=\sin^{-1}x\left(-1\leqslant x\leqslant 1,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\cos^{-1}x(-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$，$y=\operatorname{tg}^{-1}x\left(-\infty<x<+\infty,\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$。

在以后我们将经常用到以 $a=e\approx 2.7182818\cdots$ 这个无理数为底数的指数函数 $y=e^{x}$ 及对数函数 $y=\log_e x=\ln x$（特称自然对数）。

另外，角度将采用弧度制来计量。

不等式 $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ 将多次被用到。

习　　题

1．求下列函数的定义域：

(1) $y=1/\sqrt{x(1-x)}$；　　(2) $y=\mathrm{tg}(2x)$；

(3) $y=\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$；　　(4) $y=\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$；

(5) $y=\ln(x-1)$；　　(6) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$；

(7) $y=1/x^2$；　　(8) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$。

2．已知$f(x)=x/(1+x)$，求：

(1) $f(1)$；　　(2) $f(-2)$；　　(3) $f(0)$；

(4) $f(u)$；　　(5) $f(-\sin^2 x)$；　　(6) $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$；

(7) $f(t-1)$；　　(8) $f(f(x))$；　　(9) $f^2(x)$；

(10) $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$。

3．作出下列函数图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x, & x>1。\end{cases}$

4．已知 $F(x,\ y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$，求：

(1) 定义域；　　(2) $F(0,\ 0)$；　　(3) $F(1,\ 0)$；

(4) $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$；　　(5) $F\left(\dfrac{1}{2},\ y\right)$；

(6) $F\left(x,\ -\dfrac{1}{2}\right)$；　　(7) $F(t,\ s)$；

(8) $F(\sin t,\ \cos t)$。

5．指出下面函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是周期函数(同时求出周期)：

(1) $y=\sin x$；　　(2) $y=2^x$；　　(3) $y=\sin^2 x$；

(4) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；　　(5) $y=\mathrm{tg}\ \dfrac{x}{2}$；　　(6) $y=|x|$；

(7) $y=\ln|x|$；　　(8) $y=x^4+2x^2+1$；　　(9) $y=x^3+3x$；

(10) $y=\sin^{-1}x$；　　(11) $y=\cos^{-1}x$；　　(12) $y=\mathrm{tg}^{-1}x$。

6．证明 $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$。

7．某单位用计分法来分住房。总分等于工龄分加上职称分。职称由0, 1, …, 5六级组成，0级无职称分且每高一级加5分。工龄分两种算法：

对0级职称的人,每年1.4分,对1级和1级以上的人,每年1分。用y表示总分,x_1表示职称级别,x_2表示工龄。试用分段函数表示法写出y与x_1, x_2之间关系。

8. 记号$[x]$表示不超过x的最大整数,譬如$[1]=1$, $[1.2]=1$, $[-1]=-1$, $[-1.1]=-2$。试作出$y=[x]$的图。

9. $\max(a, b)$表示a, b中较大的一个数,而$\min(a, b)$表示a, b中较小的一个数,譬如$\max(0, 3)=3$, $\min(-1, 2)=-1$。试作出$y=\max(x, 1-x)$及$y=\min(\sin x, \cos x)$的图。

10. 某产品由5个A零件,3个B零件装配而成。现有A, B零件分别为x_1, x_2个。问最多能装配多少产品?这时A, B分别余下多少?

11. 设一个大工程由1, 2, 3号三个分工程构成。2号工程必须在1号完成之后才能进行,而3号工程可与1号、2号工程完全独立地进行。设完成1号, 2号, 3号工程各需a_1, a_2, a_3(天)。又设它们开工日期分别为x_1, x_2, x_3, y表示完工日期,试用分段表示法或其它方法写出三元函数$y=f(x_1, x_2, x_3)$。

12. 购买某物x件,当$x<99$时,单价为1元;当$x\geqslant 100$时,单价为0.95元。用y表示买x件的费用,用分段法写出函数$y=y(x)$并作图。

§2 最值与导数

函数的最大值与最小值统称最值。最值问题是个颇有趣味的问题。二次函数,譬如

$$y=x^2+x+4 \tag{1.2.1}$$

可用普通的配方法来求出它的最小值:

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

当$x=-1/2$时,y取到最小值$y_{\min}=15/4$("min"意思是最小值,而"max"表示最大值)。

对三次函数,配方法就无能为力了。

例1 有边长为10cm的正方形铁皮一张,四角都剪去一个相同的正方形,然后弯成一无盖方盒(图1.2-1)。问所剪去的正方形边长x为多少时,所得方盒的容积最大?

解 方盒的容积V为

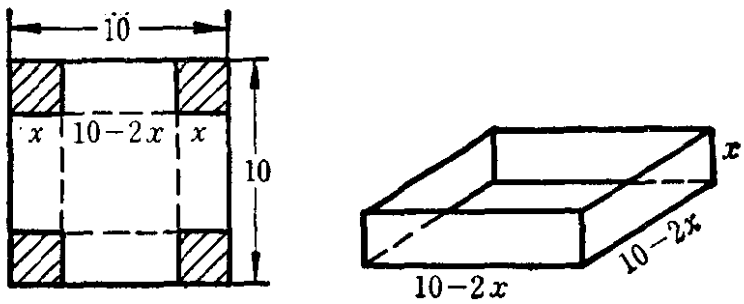


图 1.2-1

$$V=x(10-2x)^2=4x^3-40x^2+100x \qquad (1.2.2)$$

这个三次函数最值问题可用一种极有力的求最值工具——导数,来加以解决。原则上,导数法可求出几乎所有函数的最值。

先来介绍导数法求函数 (1.2.1) 最值的过程。这是有启发性的。该方法将 x^2 换成 $2x$, x 换成 1, 常数项 4 换成 0 便得一新函数$\left(\text{记为 } y' \text{ 或 } y'_x \text{ 或 } \dfrac{dy}{dx}\right)$:

$$\begin{array}{l} y=x^2+\ x+4 \\ \qquad\ \downarrow\quad\ \downarrow\quad\downarrow \\ y'=2x+1+0=2x+1, \end{array}$$

这个新函数 $y'=2x+1$ 就称为是 $y=x^2+x+4$ 的导数,然后设导数 $y'=0$:

$$y'=2x+1=0$$

可解得 $x=-1/2$, 这正好与配方法所求出的 x 一样。这不是偶然的巧合,其中是有道理的。不妨再试一例:

$$\begin{array}{l} y=x^2-6x+12 \\ \qquad\ \downarrow\quad\ \downarrow\quad\ \downarrow \\ y'=2x-6\cdot1+0=2x-6 \end{array}$$

(x 换成 1, $6x$ 就换成 $6\cdot1=6$, 而常数项一律换成 0) 再令导数 $y'=0$,解得 $x=3$。若用配方法也可得到同样的结果。

现用这个导数法来求(1.2.2)的最值,注意 x^3 换成 $3x^2$:

$$\begin{array}{l} V=4x^3\quad-\quad40x^2\quad+\quad100x \\ \qquad\ \downarrow\qquad\qquad\ \downarrow\qquad\qquad\ \downarrow \\ V'=4(3x^2)-40(2x)+100\cdot1=12x^2-80x+100 \end{array}$$

再令导数 $V'=0$:

$$V'=12x^2-80x+100=0$$