偏微分方程数值解法简明教程

王刚　马明书　李德茂　徐长发　编

内蒙古大学出版社

学教材丛书

偏微分方程数值解法简明教程

本书的出版得到内蒙古大学出版基金的资助

王刚　马明书　李德茂　徐长发　编

内蒙古大学出版社

内蒙古大学出版社出版发行
（呼和浩特市大学西路1号）
内蒙古自治区新华书店经销
内蒙古大学印刷厂印刷
开本：850×1168/32　印张：7.75　字数：194千
1997年6月第1版　1997年6月第1次印刷
印数：1—500册

ISBN 7—81015—751—5/O·69
定价：12.00元

前　　言

偏微分方程数值解法在众多学科和工程技术中有着越来越广泛的应用，它作为一门课程不仅在计算数学专业和应用数学专业中，而用在其它理工科专业的研究生和大学生中开设。为此，由华中理工大学、内蒙古大学和河南师范大学三校从事计算数学教学的部分教师组成协作组，在各校数学系的关心支持下，在认真讨论分析多年来该课程教学状况的基础上，经多次商讨和修改编写稿，才写成了这本《偏微分方程数值解法简明教程》。

我们希望本书能适应当前教学改革的需要，是一本教者好讲，读者好学的简明教材。为此我们在编写中突出了以下三方面内容。第一是取材简明性。偏微分方程数值解法的研究至今已相当深入，研究范围也很广，作为一本简明教材不可能也不必要面面俱到，包罗万象；为此本教材通过典型问题，介绍实用的数值方法，阐明构造方法的基本思想，这有利用读者举一反三，触类旁通。第二是内容可读性。偏微分方程数值解法涉及到较多的基本知识且计算式表述较复杂；为此本教材以分析问题解决问题的方法为主导且以算法为线索展开全书内容，层次分明，这样读者会感到学习思路清晰；对一些较难理解的地方，则给予明快流畅、深入浅出的解释，这样读者会感到抽象与形象的统一，阅读轻松。仅具有数值分析和数理方程初步知识的读者也能顺利阅读全书。第三是贯穿实践性。偏微分方程数值解法应是理论分析和算法实现的统一，为此本教材对一些简单问题的实用算法给出了数值实验结果分析，这有利于读者对计算结果和应用的深入了解，有利于增强实践能力。

本教材第一、二、三章由马明书副教授编写，第四、五、六章由王刚副教授编写，李德茂教授和徐长发教授主编全书并作了审改和统稿工作。在本书的编写和出版过程中，内蒙古大学数学系、华

中理工大学数学系、河南师范大学数学系和内蒙古大学出版社均给予了极大的支持和帮助，王同科老师参加了本书的编写大纲和定稿的讨论工作，并提出了很好的意见，还有不少同志对本书的编写和出版给予过帮助，编者在此一并表示衷心的谢意。另外，本书的出版还得到内蒙古大学出版基金的资助。

我们衷心地希望广大读者指出本教材的错误和不足之处，期望我们的工作得到进一步改进。

编者

一九九七年五月

目　录

第一章　抛物型方程的差分方法

在研究热的传导过程、气体扩散现象以及电磁场的传播等物理问题时，我们常常遇到抛物型偏微分方程．这类方程中最典型与最简单的就是热传导方程，本章即以其为基本模型进行讨论．

§1.1　抛物型方程的定解问题

考虑最简单的一维热传导方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (x,t) \in D \quad (1.1.1)$$

其中 a 为正常数，$f(x,t)$是已知函数，D 是 $x-t$ 平面内的给定区域，L 表示微分算子$\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. 关于方程(1.1.1)的定解问题主要有以下几类

1．初值问题(Cauchy 问题)

求方程(1.1.1)(区域 D 为上半平面$\{-\infty<x<\infty, t\geqslant 0\}$)满足初始条件

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty \qquad (1.1.2)$$

的解，其中 $\varphi(x)$是给定的函数．

2．混合问题

求方程(1.1.1)(区域 D 为$\{0<x<1, 0<t\leqslant T\}$)满足初始条件

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad (1.1.3)$$

以及边界条件

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(1,t) = \mu_2(t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (1.1.4)$$

的解，其中 $\varphi(x)$，$\mu_1(t)$，$\mu_2(t)$ 为给定的函数，且 $\varphi(0)=\mu_1(0)$，$\varphi(1)=\mu_2(0)$. 这类定解问题又称为方程(1.1.1)的第一边值问题. 还有第二、第三边值问题，即在区域 $D\{0<x<1, 0<t\leqslant T\}$ 内求方程(1.1.1)满足下列条件

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda_1(t)u\right)\Big|_{x=0}=\gamma_1(t), \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda_2(t)u\right)\Big|_{x=1}=\gamma_2(t), \end{cases} \qquad 0\leqslant t\leqslant T \qquad (1.1.5)$$

的解，其中 $\varphi(x)$，$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\gamma_1(t)$，$\gamma_2(t)$ 都是给定的函数，且 $\lambda_1(t)\leqslant 0$，$\lambda_2(t)\geqslant 0$. 这是第三边值问题，当 $\lambda_1(t)=0$，$\lambda_2(t)=0$ 时，相应的边值问题是第二边值问题.

§1.2 几个古典差分格式的建立和定解条件的处理

1.2.1 网格剖分

由于数字电子计算机只能存储有限个数据和作有限次运算，所以任何一种适用电子计算机解题的方法，都必须把连续问题离散化，最终化成有限形式的线性代数方程组. 为此，首先要对求解区域作**网格剖分**，以将求解区域离散化.

用 $x_j=jh$，$t_n=n\tau$ $(j,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 两组平行线构成的矩形网格覆盖整个 $x-t$ 平面，h，τ 分别称为 x，t 方向的**步长**，网格线的交点称为网格**节点**或**网点**. 对于初值问题而言，在 $t=0$ 上的节点称为**边界节点**，其余所有属于 $\{-\infty<x<\infty, t>0\}$ 的节点称为**内部节点**；而对边值问题来说，在 $t=0$，$x=0$，$x=1$ 上的节点称为边界节点，其余所有属于 $\{0<x<1, 0<t\leqslant T\}$ 的节点称为内部节

点．

差分方法就是在网格节点上求出微分方程解的近似值的一种方法，因此，又称为**网格法**．

为方便起见，先在网格点(x_j,t_n)（简记为(j,n)）处列出以后常用的一些数值微商公式．利用它们，可以实现偏微分方程的离散化．

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^n=\frac{u(j,n+1)-u(j,n)}{\tau}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_j,\tilde{t}_1)}{\partial t^2},$$
$$t_n\leqslant\tilde{t}_1\leqslant t_{n+1},\tag{1.2.1}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^n=\frac{u(j,n)-u(j,n-1)}{\tau}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_j,\tilde{t}_2)}{\partial t^2},$$
$$t_{n-1}\leqslant\tilde{t}_2\leqslant t_n,\tag{1.2.2}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^n=\frac{u(j,n+1/2)-u(j,n-1/2)}{\tau}$$
$$-\frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u(x_j,\tilde{t}_3)}{\partial t^3},$$
$$t_{n-1/2}\leqslant\tilde{t}_3\leqslant t_{n+1/2},\tag{1.2.3}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_j^n=\frac{u(j+1,n)-2u(j,n)+u(j-1,n)}{h^2}$$
$$-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\tilde{x}_1,t_n)}{\partial x^4},$$
$$x_{j-1}\leqslant\tilde{x}_1\leqslant x_{j+1},\tag{1.2.4}$$

式中$[\ ]_j^n$表示括号内函数在节点(x_j,t_n)处的值，后面将经常使用这个记号．以上四式右端的第一项依次表示函数$u(x,t)$在点(x_j,t_n)处关于t的一阶向前差商，一阶向后差商，一阶中心差商和关于x的二阶中心差商，我们总假定$u(x,t)$具有我们需要的有界偏导数．

1.2.2 几个古典差分格式

1. 古典显格式

利用公式(1.2.1),(1.2.4)有

$$
\begin{aligned}
[Lu]_j^n = [\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]_j^n
&= \frac{u(j,n+1)-u(j,n)}{\tau} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_j,\bar{t}_1)}{\partial t^2} \\
&\quad - a\frac{u(j+1,n)-2u(j,n)+u(j-1,n)}{h^2} \\
&\quad + \frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u(\widetilde{x}_1,t_n)}{\partial x^4},
\end{aligned}
$$

若令

$$
\begin{aligned}
L_h[u]_j^n = &\frac{u(j,n+1)-u(j,n)}{\tau} \\
&- a\frac{u(j+1,n)-2u(j,n)+u(j-1,n)}{h^2},
\end{aligned}
$$

$$
R_j^n = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_j,\bar{t}_1)}{\partial t^2} + \frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u(\widetilde{x}_1,t_n)}{\partial x^4}, \tag{1.2.5}
$$

则上式可改写为

$$
[Lu]_j^n = L_h[u]_j^n + R_j^n,
$$

其中 L_h 表示差分算子,R_j^n表示在点(x_j,t_n)以 L_h 逼近 L 的截断误差. 由(1.2.5)式看出,若$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$在所考虑的区域内保持有界,则当 $h\to 0,\tau\to 0$ 时有

$$
R_j^n = O(\tau) + O(h^2) = O(\tau + h^2). \tag{1.2.6}
$$

因为在内部节点(x_j,t_n)上微分方程(1.1.1)的解 $u(x,t)$应满足

$$
[Lu]_j^n = [\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]_j^n = f(x_j,t_n),
$$

故有

$$
L_h[u]_j^n + R_j^n = f(x_j,t_n).
$$

在上式中略去 R_j^n,并用 u_j^n表示 $u(j,n)$的近似值,则得到逼近方程(1.1.1)的有限差分方程(简称差分方程)

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f_j^n, \quad (1.2.7)$$

式中 $f_j^n = f(x_j, t_n)$. 引入网比记号 $r = \tau/h^2$,则可将(1.2.7)式改写成便于计算的形式

$$u_j^{n+1} = (1 - 2ar)u_j^n + ar(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \tau f_j^n. \quad (1.2.8)$$

如果我们求解的是方程(1.1.1)的初值问题,则由差分方程(1.2.8)再加上初始条件(1.1.2)的离散化,就可以按时间逐层计算. 如果求解的是混合问题,则还需要将边界条件进行离散化,才可逐层计算. 关于定解条件的离散化方法我们在下面讨论. 这里使用术语"层"是表示在直线 $t = n\tau$ 上网格点的全体. 差分方程(1.2.8)和定解条件的离散化结合在一起构成了一个**差分格式**. 事实上,(1.2.8)式就给出了根据定解条件的离散来逐层计算的一个算法,因此有时就称差分方程(1.2.8)或(1.2.7)为一个差分格式,以后我们将对二者不加区分,但要作如下理解:说到差分格式就隐含了定解条件的离散. 在这样的含义下,当构造出差分方程后,就认为已构出一个差分格式.

由第 n 个时间层推进到第 $n+1$ 个时间层时,(1.2.7)或(1.2.8)式给出了逐点计算 u_j^{n+1} 的明显表达式,这样的格式称为**显式格式**. 通常称(1.2.8)或(1.2.7)式为**古典显格式**. 它用到的节点图式如图 1.1. 在 (j,n) 处列出的差分方程用到了两个时间层上四个节点,故又称为双层四点显格式.

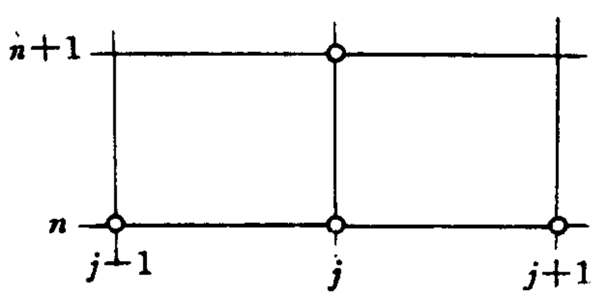

图 1.1 古典显格式节点图式

2. 古典隐格式

仿照构造古典显格式的方法,关于 t 采用向后差商,关于 x 仍采用二阶中心差商,则由(1.2.2),(1.2.4)式可得

$$[Lu]_j^n = L_h[u]_j^n + R_j^n,$$

这里

$$L_h[u]_j^n = \frac{u(j,n) - u(j,n-1)}{\tau}$$
$$- a\,\frac{u(j+1,n) - 2u(j,n) + u(j-1,n)}{h^2},$$

$$R_j^n = \frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^2 u(x_j,\tilde{t}_2)}{\partial t^2} + \frac{ah^2}{12}\,\frac{\partial^4 u(\tilde{x}_1,t_n)}{\partial x^4}$$
$$= O(\tau + h^2).$$

因为

$$[Lu]_j^n = f(x_j,t_n),$$

故有

$$L_h[u]_j^n + R_j^n = f(x_j,t_n).$$

略去 R_j^n,则得到差分方程

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - a\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f_j^n,$$

或

$$(1 + 2ar)u_j^n - ar(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) = u_j^{n-1} + \tau f_j^n. \quad (1.2.9)$$

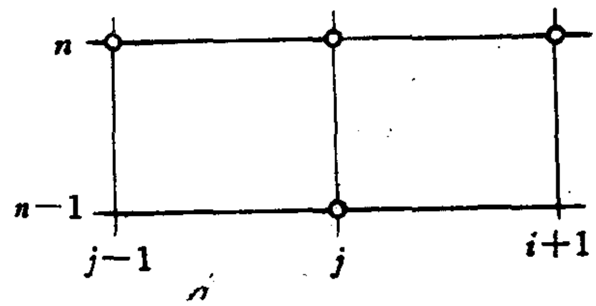

图 1.2　古典显格式节点图式

当我们已知第 $n-1$ 层上 u_j^{n-1}的值以后,为了确定第 n 层上 u_j^n的值,必须解一个线性代数方程组,这种格式称为**隐格式**. 通常称(1.2.9)式为古典隐格式,其节点图式如图 1.2.

3. Richardson 格式

为了提高截断误差的阶，在(j,n)点，关于t用一阶中心差商，关于x仍用二阶中心差商，仿以上两格式构造中的讨论，可得差分方程

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f_j^n,$$

或

$$u_j^{n+1} = 2ar(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + u_j^{n-1} + 2\tau f_j^n. \tag{1.2.10}$$

称之为 Richardson 格式，其截断误差 $R_j^n = O(\tau^2 + h^2)$，节点图式如图 1.3. 由图中看到，这是个显格式，但由于它是三层的，所以在逐层进行计算时，除了 $n=0$ 层的初值条件外，还必须先用其他方法求出 $n=1$层的值，然后才可按(1.2.10)式逐层逐点地求出一切 u_j^n.

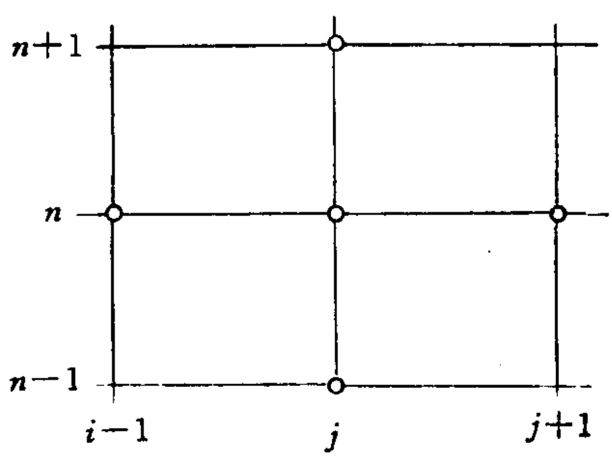

图 1.3 Richardson 节点图式

1.2.3 定解条件的处理

上面对微分方程(1.1.1)建立了三种不同类型的差分格式，为了把微分方程定解问题化为近似的差分方程问题，还必须对定解条件(即初、边值条件)构造相应的差分近似．

对于混合问题，由于求解区域是矩形区域$\{0<x<1, 0<t\leqslant T\}$，我们可以采用如下的长方形网格

$$\begin{cases} x_j = jh,\ j=0,1,2,\cdots,N;\ Nh=1, \\ t_n = n\tau,\ n=0,1,2,\cdots,m_0;\ m_0=[t/\tau]\text{是 } T/\tau \text{ 的最大整数部分}, \\ \qquad \text{即 } m_0\tau \leqslant T < (m_0+1)\tau. \end{cases}$$

将第一边值问题的定解条件(1.1.3),(1.1.4)直接转换为差分方程的初始条件

$$u_j^0 = \varphi(jh), \quad j = 0,1,2,\cdots,N \tag{1.2.11}$$

和边界条件

$$u_0^n = \mu_1(n\tau), \quad u_N^n = \mu_2(n\tau), \quad n = 0,1,2,\cdots,m_0. \tag{1.2.12}$$

当定解问题是第三边值问题时,因边界节点处的函数值是未知的,故需在这些点处列出相应的差分方程,再与内点处的差分方程联立求解.现介绍两种处理方法.

1. 在点(x_0,t_n)处利用向前差商逼近$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^n$,而在点$(x_N,t_n)$处利用向后差商逼近$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_N^n$,这样我们得出(1.1.5)式后两式的差分逼近

$$\begin{cases} \dfrac{u_1^n - u_0^n}{h} + \lambda_1(n\tau)u_0^n = \gamma_1(n\tau), \\ \dfrac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} + \lambda_2(n\tau)u_N^n = \gamma_2(n\tau), \end{cases} \tag{1.2.13}$$

其截断误差是$O(h)$.

2. 为了提高边界节点处差分方程的误差阶,我们利用下面两个一阶中心差商

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{1/2}^n = \frac{u(x_1,t_n) - u(x_0,t_n)}{h} + O(h^2),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{3/2}^n = \frac{u(x_2,t_n) - u(x_1,t_n)}{h} + O(h^2),$$

作线性插值以求$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^n$. 得

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^n = \frac{3}{2}\,\frac{u(x_1,t_n) - u(x_0,t_n)}{h} - \frac{1}{2}\,\frac{u(x_2,t_n) - u(x_1,t_n)}{h} + O(h^2), \tag{1.2.14}$$