初等数学论丛

CHU DENG SHU X

初等数学论丛

（第 4 辑）

上海教育出版社

初等数学论丛
（第4辑）
本社编
上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 4.5　字数 99,000
1982年6月第1版　1982年6月第1次印刷
印数 1—18,000 本
统一书号：7150·2677　定价：0.38元

目　录

论　相　切

蒋　声

（一）关于切线的概念

定义1　如果P是曲线c上的一个点，在曲线c上P的邻近任取一点Q，当点Q沿着曲线c无限接近于点P时，直线PQ的极限位置PT叫做曲线c上经过点P的切线，点P叫做切线PT的切点。

这时我们也常常说，直线PT与曲线c在点P相切。

在理解切线这一概念时，需要注意下面几个问题：

1．切线概念只涉及切点邻近的一小段曲线弧，不考虑曲线其它部分的情况。

例如，在图1-1中，曲线c是三叶玫瑰线，直线l与曲线c在一点P相切，而在另外两点M、N处相交。所以，笼统地说直线l与曲线c相切，或者说它们相交，都不很确切。应该说明它们在点P相切，在点M相交，在点N也相交。

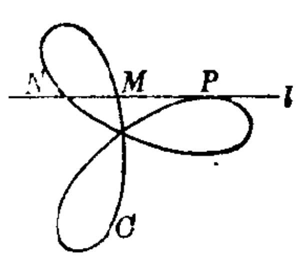

图　1-1

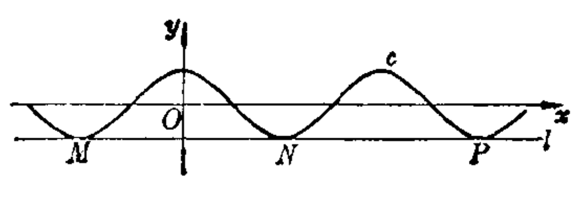

图　1-2

又如，在图 1-2 中，曲线 c 是余弦曲线 $y=\cos x$，直线 l 的方程是 $y=-1$。这条直线与曲线 c 在无穷多个点$[(2k+1)\pi, -1]$ 处相切。所以，曲线的一条切线上可能有好几个切点，甚至有无穷多个切点。

总之，如果已知直线 l 与曲线 c 相切于一点 P，并不能断定 l 与 c 是否在其它点相交或相切，或者不再有任何公共点。

只涉及图形在一点邻近的状态的概念(或性质)，叫做局部的概念(或性质)。上述情况表明，切线概念是一个局部的概念，直线与曲线相切是一个局部的性质。

2. 根据切线的定义，如果直线 l 与曲线 c 在点 P 相切，那么点 P 是 l 与 c 的一个至少是二重的公共点。这是因为按定义切点 P 是由 l 与 c 的两个邻近的公共点 P 和 Q 无限趋近，直到重叠在一起而得到的，因此，将直线 l 的方程与曲线 c 的方程联列，求所得方程组的解，切点的坐标一定是重根，即两个或更多个相等的实根。以单根为坐标的公共点，只能是交点，而不会是切点。

注意到直线方程是一次的，如果两个一次方程联列，要得到重根，只能是两直线重合，所以直线段上任一点的切线是与其共线的一条直线。如果把一个一次方程和一个非退化二次曲线的方程联列，消去一个未知量后，化为一个一元二次方程，它最多只能有两个实根，每个实根对应着直线与二次曲线的一个公共点。若两实根不等，则此直线与二次曲线相交；若两实根相等，则直线与二次曲线相切；如果没有实根，直线与二次曲线就没有公共点。这个事实不但提供了求二次曲线切线的一种方法，而且将相切问题与一元二次方程的判别式联系起来，成为构造综合题的一个途径。

3. 晚间观察沿弯道行驶的汽车，就会发现，汽车前灯射出的光柱总是指明汽车行驶路线的切线方向。一般地，任何作曲线运动的物体，它在任何时刻的运动方向，都是沿着运动轨道的切线方向。如果它在某一瞬间脱离外力束缚而越出轨道，就必定沿着脱轨处的切线方向冲出去。这些简单的经验告诉我们，曲线 c 在其一点 P 处的切线，是过点 P 的所有直线中与曲线 c 关系最密切的一条，这条切线的方向就是曲线 c 在点 P 处的方向。曲线 c 在点 P 附近的一小段弧，可以近似看成 c 在 P 处的切线上的一条小的线段。

这种把一点邻近的小块复杂图形近似地用小块简单图形代替的方法，叫做局部近似。根据局部近似的想法，例如，就可把平面镜的光的反射定律，即出射角等于入射角，用到曲面镜上。这只要把曲线在一点附近的小段曲线弧近似看成过该点所作切线上的小线段，就可以归结到平面镜的情形了。又如，光的折射定律是对两种介质的分界面是平面的情形讲的，根据同样的道理，可以用于分界面是曲面的情形，例如光线通过凸透镜和凹透镜的折射。

4. 并不是任何曲线在每一点都有切线的。例如图 1-3 所示曲线为一个半圆的周界，在直径的两端点 A 和 B 处，这条曲线就没有切线。这是因为，如果根据切线的定义，在曲线上 A 点附近任取一点 Q，连直线 AQ，那么当点 Q 沿着直径 BA 无限趋于点 A 时，直线 AQ 始终保持与直线 AB 重合；而当点 Q 沿半圆周无限趋于点 A 时，直线 AQ 却趋于 AB 的垂线。所以当点 Q 沿曲线以任意方式趋于点 A 时，直线 AQ 并不趋于一个确定的极限位置，因而这条曲线在点 A 上不存在切线。

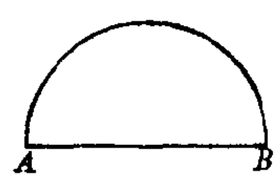

图 1-3

在这种情况下，通常采取的办法是把整个曲线看成由两条曲线在点A和点B连接而成的，一条是半圆周，一条是直径，两者在它们的每一点(包括A和B)都有切线，但是两曲线在其公共点A处的切线相交成一个角，在点B也成一个角。两曲线在其公共点的切线所成的角叫做两曲线在这一点的交角。有关曲线交角的问题，已超出本文的论题，这里就不赘叙了。

(二) 有关切线问题的解法

有关切线的一般问题，本来是微积分学的讨论对象。但是，对于某些比较简单的特殊曲线，以及某些曲线在个别特殊点处的切线，还是可以用初等方法来处理的。这方面的问题大致可分两种类型：一类是已知曲线方程和一点的坐标，求通过这点所作曲线的切线的方程。解这类问题的关键是求切线的斜率，利用点斜式写出切线的方程，解答的思路比较简单，但是运算过程中往往带有一定的技巧。另一类问题是讨论切线的性质，或是根据切线的性质求曲线方程中的某个参数，其中有很多问题是以综合题的姿态出现，在解题的思路方面需要有一定的灵活性。

［例 1］ 求抛物线$y=ax^2+bx+c$上一点$M(x_0, y_0)$的切线的方程。

解 设切线斜率为k，则所求切线方程可用点斜式写成

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

即

$$y=kx+(y_0-kx_0).$$

代入曲线方程

$$y=ax^2+bx+c,$$

整理后，得

$$ax^2+(b-k)x+(c-y_0+kx_0)=0.$$

切线与抛物线有二重公共点，故此一元二次方程应有两相等实根，其判别式为零：

$$(b-k)^2-4a(c-y_0+kx_0)=0,$$

即

$$k^2-2(b+2ax_0)k+(b^2-4ac+4ay_0)=0.$$

但因点(x_0,y_0)在抛物线上，所以

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c.$$

代入上式，化为

$$k^2-2(b+2ax_0)k+(b^2+4a^2x_0^2+4abx_0)=0,$$

即

$$[k-(b+2ax_0)]^2=0,$$

$$\therefore\quad k=b+2ax_0,$$

故所求切线方程为

$$y-y_0=(2ax_0+b)(x-x_0).$$

从例1的解题过程可以看出，这种方法的一般步骤是：第一步总是设切线斜率为k，写出切线的点斜式方程；第二步将切线方程与已知二次曲线方程联列，消去一个流动坐标（例如消去y），得到关于另一流动坐标的二次方程；第三步令此二次方程的判别式为0，得到一个决定斜率k的方程；第四步利用x_0、y_0满足的条件化简所得方程，并求出斜率k，从而求得切线方程．这种解法的优点是不借助于极限，思路比较简单；其中的关键性技巧，是利用点(x_0, y_0)在已知曲线上，将所得方程化简，从而求出斜率k.

这种解法也适用于点(x_0,y_0)不在已知曲线上的情形，不

过这时决定斜率 k 的二次方程左端不再能化成完全平方了。

上述解法虽然简单和巧妙，却主要适用于求二次曲线的切线，缺乏一般性。对于其它曲线，通常还是只能按定义通过极限过程求切线斜率。

[例 2] 求三次抛物线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线的方程。

解 设 $N(p, q)$ 是曲线上邻近 $M(x_0, y_0)$ 的一点，则直线 MN 的斜率是

$$k_p=\frac{q-y_0}{p-x_0}.$$

但是，从曲线方程有

$$q=ap^3+bp^2+cp+d,$$

$$y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d.$$

两式相减，得

$$\begin{aligned} q-y_0&=a(p^3-x_0^3)+b(p^2-x_0^2)+c(p-x_0)\\ &=(p-x_0)\cdot[a(p^2+px_0+x_0^2)+b(p+x_0)+c]. \end{aligned}$$

代入 k_p 的表达式，约去 $p-x_0$ 后，得到

$$k_p=a(p^2+px_0+x_0^2)+b(p+x_0)+c.$$

当点 N 沿曲线无限趋于 M 时，MN 的极限位置是过 M 所作曲线的切线，所以切线斜率是

$$\begin{aligned} k&=\lim_{p\to x_0}k_p=\lim_{p\to x_0}[a(p^2+px_0+x_0^2)+b(p+x_0)+c]\\ &=3ax_0^2+2bx_0+c. \end{aligned}$$

因而所求的切线方程是

$$y-y_0=(3ax_0^2+2bx_0+c)(x-x_0).$$

从例 2 的解题过程可以看出，这种方法的一般步骤是：第一步，在曲线上已知点 M 附近取一点 N，利用两点的坐标差之比写出直线 MN 的斜率 k_p；第二步，利用曲线方程将 k_p

的表达式变形，关键是约去一个不为零但当 $N\to M$ 时趋于零的因式；第三步，约分后令 $N\to M$，取 k_p 的极限，得到过 M 所作切线的斜率 k，随后也就得到了切线的方程。

如果利用微分法，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率，只要计算在这一点的导数 $f'(x_0)$ 就行了。上面介绍的用极限过程求切线斜率的初等方法，实际上不过是按照导数的定义直接计算 $f'(x_0)$ 罢了。

下面再来看一个有关切线的综合题。

［例 3］ 已知椭圆的两个半轴顺次为 a 和 b，求此椭圆的切线与两条对称轴所成三角形面积的最小值。

解 由于椭圆的半轴为 a 和 b，它的方程可写成标准形状

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

这时椭圆的两条对称轴就是 x 轴和 y 轴。过椭圆上一点 (x_0,y_0)所作切线的方程是

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

与直线的截距式方程对照，可知此切线在 x 轴上的截距为 $\frac{a^2}{x_0}$，在 y 轴上的截距为 $\frac{b^2}{y_0}$。这里，不需考虑 x_0 或 y_0 为 0 的情况，因为在这些点的切线平行于一条对称轴，因而不能与两条对称轴构成三角形。又，从对称性，可以只考虑第一象限的点，这时

$$x_0>0,\qquad y_0>0.$$

因此，切线与两条对称轴（坐标轴）围成的三角形是直角三角形，它的两条直角边长度为 $\frac{a^2}{x_0}$ 和 $\frac{b^2}{y_0}$，因而面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}.$$

另一方面，点(x_0, y_0)在椭圆上，所以

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

这里，两数$\frac{x_0^2}{a^2}$与$\frac{y_0^2}{b^2}$之和为定值1，仅当它们相等时，它们的乘积$\frac{x_0^2y_0^2}{a^2b^2}$才取最大值，因而乘积的倒数$\frac{a^2b^2}{x_0^2y_0^2}$取最小值。所以，当

$$\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{1}{2},$$

即

$$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\qquad y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}b,$$

这时$\frac{a^2b^2}{x_0^2y_0^2}$取最小值，因而它的平方根$\frac{ab}{x_0y_0}$取最小值。但面积$S$与$\frac{ab}{x_0y_0}$只相差一个正的常数因子$\frac{ab}{2}$，所以这时面积$S$也取最小值：

$$S_{\min}=\frac{a^2b^2}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b}=ab.$$

这就是说，当切点为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$时，切线与两条对称轴所成三角形的面积$S$取得最小值$ab$。

顺便指出，当面积S取最小值时，直角三角形的两条直角边长度分别为$\sqrt{2}a$和$\sqrt{2}b$，恰好与椭圆的两半轴a、b成比例，因而斜边平行于椭圆的顶点$(a, 0)$和$(0, b)$的连线。这样就推出椭圆的切线的一个几何性质：**在椭圆的任意切线与椭圆的两条对称轴所成的三角形中，由平行于椭圆两相邻顶点**

连线的切线得到的三角形面积最小(图 1-4)。

有关曲线的切线的综合题，变化多样，对于已知曲线(例如二次曲线)，通过切线作媒介，可以将问题与解析几何中关于直线的许多内容联系起来。再通过长度、角度、面积等几何量与平面几何和三角联系，通过求公共点坐标、二重公共点的条件、切线斜率、极值等与代数里的方程组、一元二次方程的判别式、极限、不等式和极值等问题联系。因此，有关切线的综合题最容易锻炼和考查一个学生对中学数学各部分知识的熟悉程度和灵活运用的能力。这方面的题目可以千变万化，基本解题原则却只有一条：不管在综合题里把多少方面的内容搅和在一起，只要学会把一个综合性的大问题有条不紊地分解成一连串单纯的小问题，逐个解决就行了。

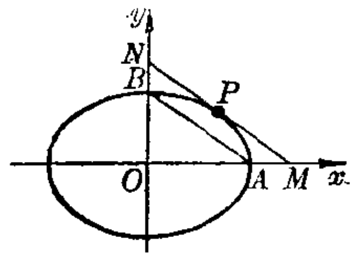

图 1-4

(三) 两曲线相切

定义 2 对于两条曲线 c_1 和 c_2，如果在它们的一个公共点 P 处有公共的切线 PT，就说曲线 c_1 和 c_2 在点 P 相切，P 是它们的切点(图 1-5)。

两曲线在一点相切也是一个局部的概念。完全同样地，如图 1-5，两条曲线 c_1 和 c_2 可以在一点 P 相切，同时又在另外的点 M、N 等处相交。

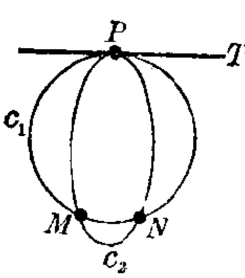

图 1-5

与一直线与一曲线相切的情形类似，当两条曲线在一点 P 相切时，切点也是这两条曲线的至少二重公共点。因此，将两曲线方程联列时，切点坐标一定是所得

方程组的重根(两组或两组以上相等的实数解)。

[例 4] a 是什么正数值时，曲线 $xy=x+y$ 与 $x^2+y^2=a$ 相切?

解 考虑方程组

$$x^2+y^2=a, \tag{1}$$

$$xy=x+y. \tag{2}$$

将(2)式乘以 2 后与(1)式相加，得

$$(x+y)^2=2(x+y)+a,$$

这是关于$(x+y)$的二次方程。解之，得

$$x+y=1\pm\sqrt{1+a}. \tag{3}$$

方程(3)中取正号和取负号对应着两条平行直线，所以取正号时求得的两曲线交点坐标，决不会与取负号时求得的交点坐标相同。而为了两曲线相切，它们必须有二重公共点(切点)，因而对应的方程组必须有两组解完全相同。这样的两组解只能同时对应于(3)式右端取正号，或者同时对应于取负号。令

$$b=1\pm\sqrt{1+a}, \tag{4}$$

由(3)式和(2)式知道，x 和 y 分别是下面的辅助方程的两个根：

$$t^2-bt+b=0.$$

若对某个 b 值求得辅助方程的两个根为 t_1 和 t_2，就得到原方程组的两组解(t_1, t_2)和(t_2, t_1)。为了这两组解相同，必须 $t_1=t_2$，即辅助方程有二相等实根，故其判别式为零：

$$b^2-4b=0.$$

由此 $b=0$ 或 $b=4$。但因 a 为正数，由(4)式知道 $b\neq 0$，所以 $b=4$，即

$$1\pm\sqrt{1+a}=4.$$

由此容易求得

$$a=8.$$

如图 1-6，这时曲线 $x^2+y^2=a$ 是半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆，圆心在坐标原点。它与双曲线 $xy=x+y$ 的一支相切于顶点 $A(2, 2)$，同时与这双曲线的另一支相交于两点 B 和 C（作为练习，请读者证明以 A、B、C 为顶点的三角形是正三角形）。

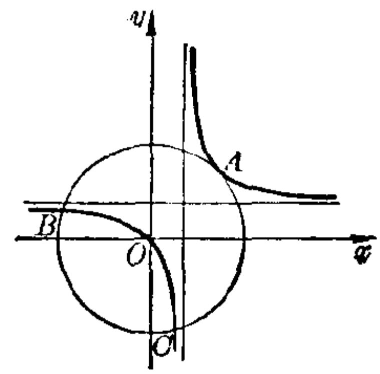

图 1-6

在解析几何中还知道，若曲线 c 在其上一点 P 处的切线为 PT，过点 P 作直线 $PN\perp PT$，则 PN 叫做曲线 c 在点 P 的法线。圆周在其任一点处的法线就是这一点与圆心的连线。

几何上了解得最透彻的线是直线和圆周，物理上研究得最清楚的运动是匀速直线运动和匀速圆周运动。前面曾把曲线在其一点附近的小段曲线弧近似看成过该点所作切线上的相应线段，并且这条切线的方向指明曲线在这一点的方向。现在讨论两曲线相切，是否也可运用局部近似的想法，把曲线在一点邻近的小段曲线弧近似看成圆弧，用来研究曲线在一点附近的弯曲情况呢？当然不能拿一个任意的圆来描写一条曲线 c 在其一点 P 处的弯曲情况，必须找一个在点 P 附近与曲线 c 的关系最为密切的圆。这样就引出了下面的概念：

定义 3 在曲线 c 上取三个邻近的点 P、U、V，过这三点作一个圆。令两点 U 和 V 沿曲线 c 无限趋近于点 P，这时过 P、U、V 三点的圆趋近于一个极限位置圆 O，叫做曲线 c 在点 P 的**密切圆**。密切圆的圆心 O 叫做曲线 c 在点 P 的**曲率中心**。密切圆的半径 R 叫做曲线 c 在点 P 的**曲率半径**。

这样定义的密切圆 O，显然是通过点 P 的所有圆中与曲

线 c 关系最为密切的一个，因而人们就把曲线 c 在其点 P 附近的小段曲线弧近似看成 c 在点 P 的密切圆上相应的圆弧，这样就能从曲率半径 R 的大小来判断曲线在点 P 附近的弯曲程度，从曲率中心 O 的位置判断曲线在点 P 向什么方向弯曲。由于密切圆可以反映曲线在一点附近的弯曲程度，所以它又叫曲率圆。

从物理上说，一个以曲线 c 为轨道的运动物体，在它经过点 P 的这一瞬间，可以近似看成沿着 c 在点 P 处的密切圆运动，因而计算法向加速度的大小可利用匀速圆周运动计算向心加速度的公式

$$a=\frac{v^2}{R},$$

这里 v 是运动速度，R 是点 P 处的曲率半径。由此可见，密切圆是一个非常有用的概念。

求任意曲线在其任意点处的曲率中心和曲率半径，在微分学里有一般的计算公式。对于某些简单曲线在其上若干特殊点处的曲率中心和曲率半径，也可以用初等方法求出来。下面简单介绍曲率中心和曲率半径的初等求法。

在定义 3 中是先通过曲线上三个邻近的点 P、U、V 作圆，然后令两点 U 和 V 都沿着曲线无限趋近于 P 而取极限的。现在我们先保持 U 不动，让 V 沿曲线无限趋近于 P，在极限情形下，过三点 P、U、V 的圆变成与曲线 c 在点 P 相切而又在点 U 相交的圆，设其圆心为 Q，则点 Q 必在过点 P 所作曲线 c 的法线上。然后再令 U 沿曲线 c 无限趋近于 P，这时圆 Q 就以曲线在点 P 的密切圆为极限位置了。在下面两个例子里，我们都是先作一个与已知曲线在一点相切而在附近另一点相交的圆，然后令交点沿曲线无限趋近切点而取极限。

2

[例 5] 求曲线 $y=ax^2+bx^4$ 在点(0,0)的曲率中心和曲率半径。($a\neq 0$)

解 把 x 换成 $-x$,曲线方程不变，可见曲线关于 y 轴对称。因而曲线在点 $O(0,\ 0)$ 的切线是 x 轴,法线是 y 轴。

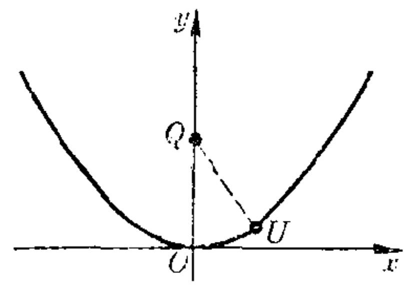

图 1-7

在曲线上点 O 邻近任取一点 U,设其坐标为 (p,q)。由曲线方程,得

$$q=ap^2+bp^4. \qquad (5)$$

设线段 OU 的垂直平分线交 y 轴于点 Q,则以 Q 为圆心、QO 为半径的圆，与已知曲线在点 O 相切,在点 U 相交。又因 $q>0$, 所以点 U 和 Q 都在 x 轴上方.由此知道,若 QO 的长度为 r, 则点 Q 的坐标为 $(0,\ r)$。再从 Q 与 U 之间的距离等于 r, 得到 $(p-0)^2+(q-r)^2=r^2$,即

$$p^2+q^2-2qr=0.$$

由此

$$r=\frac{p^2+q^2}{2q}.$$

将(5)式代入,得

$$r=\frac{p^2+(ap^2+bp^4)^2}{2ap^2+2bp^4}=\frac{1+(ap+bp^3)^2}{2a+2bp^2},$$

令点 $Q(p,q)$ 沿曲线无限趋近于 $O(0,0)$,取极限,得所求曲率半径为

$$R=\lim_{p\to 0} r=\lim_{p\to 0}\frac{1+(ap+bp^3)^2}{2a+2bp^2}=\frac{1}{2a}.$$

曲率中心是点 $\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$.

本题中的曲线在光学仪器中设计非球面透镜时经常用到. 本题结果表明,这种曲线在点(0,0)处的曲率半径与四次项的系数无关. 特别，当 $b=0$ 时得到抛物线 $y=ax^2$ 在顶点