HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

# 电路理论

## ——时域与频域分析

DIANLU LILUN SHIYU YU PINYU FENXI

杨传谱　孙敏　杨泽富

华中理工大学出版社

# 电 路 理 论

## ——时域与频域分析

杨传谱　孙敏　杨泽富



华中理工大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

电路理论——时域与频域分析/杨传谱等
武汉:华中理工大学出版社, 1998.12
ISBN 7-5609-1855-7

Ⅰ.电…
Ⅱ.①杨… ②孙… ③杨…
Ⅲ.电路理论-网络分析-高等学校教材
Ⅳ.TM7.71

**电路理论——时域与频域分析** 杨传谱 等

责任编辑:李 德 封面设计:刘 卉
责任校对:蔡晓瑚 监 印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

排版:华中理工大学出版社照排室
印刷:黄石市红日彩印厂

开本:787×1092 1/16 印张:17.75 字数:430 000
版次:1998年12月第1版 印次:1999年7月第2次印刷 印数:1 501—4 500
ISBN 7-5609-1855-7/TM·74 定价:19.50元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

## 内容简介

本书是电路理论模块化教材的第二部分，主要讨论时域网络和频域网络。全书共分七章：动态电路元件、动态电路的时域分析、正弦稳态分析、互感耦合电路、正弦稳态三相电路、周期性非正弦稳态电路分析以及网络的复频域分析法(运算法)。

本书立论严谨、概念清晰、要点突出、叙述流畅、例题丰富、便于自学。可作为高等院校电类有关专业的教材或教学参考书，也可供有关技术人员参考。

# 总　　序

电路理论是一门重要的技术基础课，是工科电类、电子、通信、控制以及电机一体化等学科必备的理论基础，对大学生总体课程的学习和今后的工作起着深远的影响。

为了提高教学质量，适应21世纪高等工程教学内容及课程体系改革的要求，我们按照模块化的方式组织编写了这套电路理论教材。

全书分为《电阻性网络》、《时域与频域分析》、《端口网络与均匀传输线》三个模块，形成电路理论课程的三个台阶。这样，可使学生在学习过程中具有明确的阶段性，发挥他们学习的自觉性、主动性和创造性，使他们沿着这三个台阶攀登，打下深厚、坚实的电路理论基础。

为了便于自学，在一些重点章节及难以理解的地方，论述得比较详尽，同时还编有丰富的具有一定深度和难度的颇具启发性的例题分析，以启迪学生们的思路，扩大他们的视野。

本书各章都配有一定数量的习题，其中有些习题的难度较大，可以激发学生的思考，促使他们从更深的层面去理解和掌握电路理论的有关内容，可以说是各章内容的延续。为了方便学生对这些习题的自我训练，各章习题都附有参考答案，供学生对照检查。

编写本教材的作者，都是从事电路理论课程教学多年的教授、副教授，具有较丰富的教学经验。他们在教学过程中，力求在讲深讲透电路理论的基本概念、基本原理和基本分析方法的同时，加强对学生分析问题、解决问题的能力以及素质的培养。在本书的编写中，作者多少溶进了这方面的心血，具有一定的特色。书中有不少观点和提法是作者经过多年的教学总结和提炼出来的。

本书的内容具有一定的深度、广度和难度，在组织教学时可以根据不同的情况进行取舍。本书不仅可作为有关专业的电路理论课程的教材，也可供有关的工程技术人员参考。

为了满足需要，本书以附录形式编写了“磁路与含铁心的线圈”一章。

本书《电阻性网络》由黄冠斌副教授主编，《时域与频域分析》由杨传谱副教授主编，《端口网络与均匀传输线》由陈崇源教授主编。

由于本书内容较多，范围较广，篇幅较大，可能会有一些考虑不周和错漏之处，恳请广大读者与同仁给予批评指正。

编者 1997 年 10 月于华工大

# 序

将电路理论分为《电阻性网络》、《时域与频域网络》和《端口网络与均匀传输线》三个模块是电路理论体系和内容改革的一种尝试。本书是这三个模块中的第二部分。

时域和频域分析实际上包括时域网络和频域网络两部分。在时间域内分析和讨论电路称为时域网络分析，在频率域和复频率域（$s$ 域）内分析和讨论电路称为频域网络分析。时域网络主要包括电路变量的波形及函数表示、动态电路元件、一阶和二阶电路等。频域网络主要包括正弦稳态电路、互感耦合电路、正弦稳态三相电路、周期性非正弦稳态电路及网络的复频域分析法等。网络的状态变量分析法应属本书的内容，但根据模块化教学的需要而将其编入第三个模块。

本书除在体系上有较大的变动外，作者还根据我校电工基础教研室全体同仁多年的教学经验对传统电路理论的不少内容提出了自己的一些观点和看法。如提出用直接叠加法表示具有直线段的波形；用零状态响应算子 $z_0$ 导出卷积积分公式和用全解析算法计算卷积积分；互感耦合元件的符号规则及复频域分析中关于网络函数的论述等。另外，作者还有意识地将变换的思想贯穿本书的始终，对培养读者科学的思维方法也将起到积极作用。

本书第一、二、六章由杨传谱编写，第三、四章由孙敏编写，第五、七章由杨泽富编写。编写本书时，参考了许多电路理论教材版本及相关的教学参考书，在此一并对这些书的作者表示诚挚的谢意。书中不当之处，欢迎广大读者批评指正。

编者

1998 年 4 月于华中理工大学

# 目　录

第一章　动态电路元件 …… (1)
1-1　电路变量的波形及函数表示 …… (1)
1-1-1　几种典型的奇异函数及其波形 …… (1)
1-1-2　波形表示 …… (10)
1-2　电容元件 …… (13)
1-2-1　电容元件的定义及分类 …… (13)
1-2-2　线性时不变电容元件 …… (14)
1-2-3　线性时变电容元件 …… (18)
1-2-4　非线性电容元件 …… (18)
1-2-5　线性时不变电容元件的串联、并联与混联 …… (18)
1-3　电感元件 …… (22)
1-3-1　电感元件的定义及分类 …… (22)
1-3-2　线性时不变电感元件 …… (22)
1-3-3　线性时变电感元件 …… (26)
1-3-4　非线性电感元件 …… (26)
1-3-5　线性时不变电感元件的串联、并联与混联 …… (27)
习题一 …… (30)
第二章　动态电路的时域分析 …… (34)
2-1　一阶电路 …… (34)
2-1-1　一阶电路的两种基本类型 …… (34)
2-1-2　零输入响应 …… (35)
2-1-3　零状态响应 …… (44)
2-1-4　全响应 …… (56)
2-1-5　求解一阶电路的三要素法 …… (59)
2-1-6　单位冲激响应 …… (63)
2-1-7　任意波形激励下的零状态响应——卷积积分 …… (66)
2-2　二阶电路 …… (69)
2-2-1　二阶线性齐次微分方程解的一般形式 …… (69)
2-2-2　二阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应 …… (70)
习题二 …… (80)
第三章　正弦稳态分析 …… (93)
3-1　正弦量的基本概念 …… (93)
3-1-1　正弦量的三要素 …… (93)
3-1-2　同频率正弦量的相位关系 …… (94)
3-1-3　正弦电量的有效值 …… (95)

**3-2　正弦量的相量表示——相量法** …… (95)
3-2-1　用相量表示正弦量 …… (95)
3-2-2　$\mathscr{I}_m$ 算子对旋转相量的几条运算规则 …… (97)
**3-3　KCL、KVL 的相量形式** …… (99)
**3-4　*R*、*L*、*C* 元件特性方程的相量形式及相量模型** …… (100)
3-4-1　*R* 元件 …… (101)
3-4-2　*L* 元件 …… (101)
3-4-3　*C* 元件 …… (103)
**3-5　阻抗和导纳** …… (105)
3-5-1　阻抗 …… (105)
3-5-2　导纳 …… (109)
**3-6　正弦稳态电路的分析计算** …… (114)
**3-7　正弦稳态电路的相量图、位形图分析法** …… (118)
**3-8　正弦稳态电路的功率** …… (122)
3-8-1　瞬时功率 …… (122)
3-8-2　有功功率(平均功率) …… (123)
3-8-3　视在功率、功率因数 …… (124)
3-8-4　无功功率 …… (125)
3-8-5　复数功率 …… (127)
3-8-6　功率因数的提高 …… (130)
3-8-7　最大功率传输条件 …… (132)
**3-9　电路的频率响应** …… (134)
3-9-1　正弦稳态网络函数 …… (134)
3-9-2　谐振 …… (137)
**习题三** …… (147)
**第四章　互感耦合电路** …… (156)
**4-1　耦合电感元件** …… (156)
4-1-1　两线圈线性定常耦合电感元件 …… (156)
4-1-2　多线圈线性定常耦合电感元件 …… (162)
4-1-3　耦合电感元件的等效电路 …… (163)
4-1-4　含耦合电感元件电路的分析计算 …… (167)
**4-2　空心变压器** …… (172)
4-2-1　空心变压器的电路模型及回路方程 …… (172)
4-2-2　原方等效电路、反映阻抗 …… (173)
**4-3　理想变压器** …… (174)
4-3-1　理想变压器的特性方程 …… (174)
4-3-2　理想变压器的阻抗变换性质 …… (176)
4-3-3　含理想变压器的电路分析 …… (177)
***4-4　变压器模型** …… (180)
4-4-1　全耦合变压器的模型 …… (180)

4-4-2 一般变压器的模型 …………………………………………………… (181)
习题四 …………………………………………………………………… (182)
第五章 正弦稳态三相电路 ……………………………………………… (188)
5-1 三相电路的基本概念 ……………………………………………… (188)
5-1-1 对称三相电源和对称三相负载 ………………………………… (188)
5-1-2 三相电路的基本联接方式 ……………………………………… (189)
5-2 对称三相电路正弦稳态分析 ……………………………………… (192)
5-2-1 Y-Y 对称三相电路的计算 ……………………………………… (192)
5-2-2 △-△对称三相电路的计算 ……………………………………… (194)
5-2-3 其它类型对称三相电路的计算 ………………………………… (195)
5-3 不对称三相正弦稳态电路分析 …………………………………… (197)
5-3-1 不对称三相电路的一般分析方法 ……………………………… (197)
5-3-2 一相开路 ………………………………………………………… (201)
5-3-3 一相短路 ………………………………………………………… (202)
5-4 三相电路的功率与测量 …………………………………………… (204)
5-4-1 三相电路的功率 ………………………………………………… (204)
5-4-2 三相电路功率的测量 …………………………………………… (209)
习题五 …………………………………………………………………… (211)
第六章 周期性非正弦稳态电路分析 …………………………………… (214)
6-1 周期函数的傅里叶级数 …………………………………………… (215)
6-1-1 傅里叶级数 ……………………………………………………… (215)
6-1-2 几种对称周期函数的谐波分析 ………………………………… (216)
6-1-3 周期性非正弦函数的频谱 ……………………………………… (218)
6-2 傅里叶级数的指数形式 …………………………………………… (220)
6-3 周期性非正弦电量的有效值和平均值,平均功率 ………………… (222)
6-3-1 有效值 …………………………………………………………… (222)
6-3-2 平均值,均绝值 ………………………………………………… (222)
6-3-3 平均功率 ………………………………………………………… (223)
6-4 周期性非正弦稳态电路分析 ……………………………………… (224)
6-5 对称三相周期性非正弦电路 ……………………………………… (227)
6-5-1 对称三相周期性非正弦电源 …………………………………… (227)
6-5-2 对称三相周期性非正弦电路分析 ……………………………… (228)
习题六 …………………………………………………………………… (231)
第七章 网络的复频域分析法 …………………………………………… (234)
7-1 拉普拉斯变换的定义 ……………………………………………… (234)
7-2 拉氏变换的基本性质 ……………………………………………… (236)
7-3 拉氏反变换 ………………………………………………………… (238)
7-4 运算法 ……………………………………………………………… (242)
7-4-1 KCL 和 KVL 的运算形式 ……………………………………… (242)
7-4-2 电路元件特性方程的运算形式 ………………………………… (243)

7-4-3 运算法 …………………………………………………………………… (245)
**7-5 网络函数 $H(s)$** …………………………………………………………… (249)
7-5-1 网络函数的定义 ……………………………………………………… (250)
7-5-2 $H(s)$与$h(t)$之间的关系 …………………………………………… (252)
7-5-3 极点与网络的稳定性 ………………………………………………… (253)
7-5-4 $H(j\omega)$与$H(s)$之间的关系 ……………………………………… (255)
7-5-5 零点、极点对频率响应的影响 ……………………………………… (256)
**习题七** ……………………………………………………………………… (258)
**习题答案** …………………………………………………………………… (262)

# 第一章　动态电路元件

本书第一部分，讨论了电阻电路的分析方法。在电阻电路中，构成电路的元件均为电阻元件，其端口电压、电流之间满足代数方程。电路中的电源通常是恒定直流量——常量，因此，电路中的所有电路变量也均为常量，它们随时间的变化率为零。从这个意义上讲，电阻电路又称为静态电路。

除电阻元件外，电路中还有电容和电感元件，电容元件表征电磁现象中的电场特性，电感元件表征磁场特性。电容和电感元件的端口电压、电流之间满足微分或积分关系，故称它们为动态元件，而把含有动态元件的电路称为动态电路。

在动态电路中，电路变量通常是时间的函数。本章首先介绍电路变量的表示方法，然后介绍动态电路元件——电容和电感元件。全书的物理量作无量纲化处理，物理量无量纲。

## 1-1　电路变量的波形及函数表示

从信号与系统的观点看，电路变量不管是电荷 $q$，磁链 $\psi$，还是电压 $u$、电流 $i$ 等都属于信号的范畴。在集中参数电路中，信号最基本的特征是时间特征，即仅随时间变化而变化的特征。对于电信号特征最确切的描述应是数学描述，这种描述的通用形式就是函数表达式，简称函数表示。对于信号的另一种描述是波形表示，即将信号随时间的变化规律在坐标平面上用曲线表示。函数表示和波形表示是描述信号最常用的两种形式。

对于各色各样的信号，可以从不同的角度加以分类。根据函数的性质，可将信号分为普通函数和奇异函数。所谓普通函数是指函数 $f$ 对定义域 $X$ 中的每一个元素 $x$ 能确切地规定出它的值域 $Y$ 中的一个确定元素 $y$。凡自变量与因变量之间的关系不符合普通函数定义的均可称之为奇异函数。例如，常量、正弦函数、指数函数等均属普通函数。具有第一类间断点，或其微分具有间断点的函数通常都是奇异函数。普通函数及其波形已为大家所熟知，在此不再加以讨论。近代电路的重要特征之一就是引用了奇异函数并用它来表示电路变量的波形及函数。以下介绍几种典型的奇异函数及其波形。

### 1-1-1　几种典型的奇异函数及其波形

**一、单位阶跃函数 $\mathbf{1}(t)$**

1. 单位阶跃函数的定义

单位阶跃函数的定义为

$$\mathbf{1}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

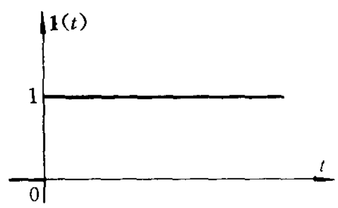

图 1-1　单位阶跃函数的波形

其波形如图 1-1 所示。可以看出，函数在 $t=0$ 时发生跳变，在 $t=0$ 时的左极限 $\mathbf{1}(0_-)$ 为

$$\mathbf{1}(0_-)=\lim_{t\to 0_-}\mathbf{1}(t)=0$$

右极限 $\mathbf{1}(0_+)$为

$$\mathbf{1}(0_+) = \lim_{t\to 0_+} \mathbf{1}(t) = 1$$

跳变值 $\Delta\mathbf{1}(0)$为

$$\Delta\mathbf{1}(0) = \mathbf{1}(0_+) - \mathbf{1}(0_-) = 1$$

即一个单位，故称 $1(t)$为单位阶跃函数。单位阶跃函数在 $t=0$ 时的数值是不确定的，它介于 0～1 之间。对电路理论所涉及的问题而言，该点取什么数值是无关紧要的。

单位阶跃函数可用来描述 $t=0$ 时幅值为一个单位的电源突然接入电路的输入信号。图 1-2 为1V 电压源突然接入电路的情形。设开关 K 未闭合时，电路的输入信号 $u_{in}=0$，$t=0$ 时 K 合上后，$u_{in}=1$，因此，对所有时间 $t$，$u_{in}$的确切描述就是一个阶跃函数。

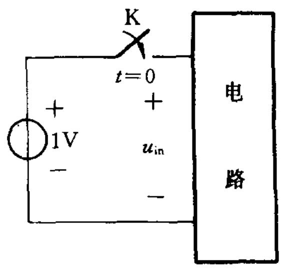

图 1-2　1V 电压源 $t=0$ 时接入电路的情形

若电压源的幅值为 $E$(常量)，则

$$u_{in} = E\mathbf{1}(t)$$

称为阶跃函数。

2. 延迟单位阶跃函数

将单位阶跃函数延迟 $t_0$ 称为延迟单位阶跃函数。其函数表达式为

$$\mathbf{1}(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

其波形如图 1-3 所示。

广而言之，可定义

$$\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

为延迟单位阶跃函数。式中 $x$ 称为宗量，原则上可以是 $t$ 的函数，即 $x=f(t)$。引入宗量 $x$ 的概念后，使阶跃函数的应用更具灵活性。

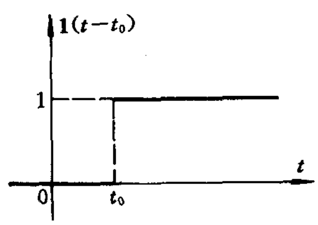

图 1-3　延迟单位阶跃函数的波形

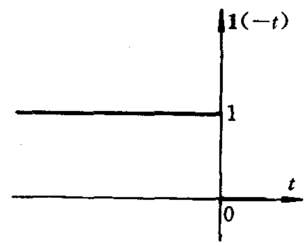

图 1-4　函数 $\mathbf{1}(-t)$的波形

**例 1-1**　作出函数 $\mathbf{1}(-t)$的波形。

**解**：由定义得

$$\mathbf{1}(-t) = \begin{cases} 0 & -t < 0 \\ 1 & -t > 0 \end{cases}$$

可知当宗量$-t<0$，即 $t>0$ 时，$\mathbf{1}(-t)=0$，当宗量$-t>0$ 即 $t<0$ 时，$\mathbf{1}(-t)=1$。由此可得其波形如图 1-4 所示。显而易见，$\mathbf{1}(-t)$是 $\mathbf{1}(t)$的转置。

**例 1-2**　作出函数 $\mathbf{1}(-t+2)$的波形。

**解**：由定义得

$$\mathbf{1}(-t+2) = \begin{cases} 0 & t > 2 \\ 1 & t < 2 \end{cases}$$

其波形如图 1-5 所示。

**例 1-3** 作出函数 $\mathbf{1}(t-1)$的波形。

**解**:
$$\mathbf{1}(t-1)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1 & t>1\end{cases}$$

$\mathbf{1}(t-1)$的波形如图 1-6 所示。它是将 $\mathbf{1}(t)$延迟 1 个时间单位后的结果。

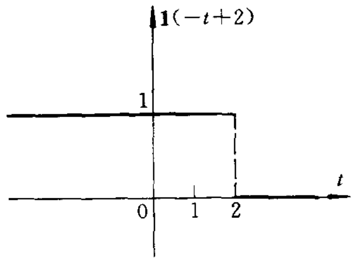


图 1-5 函数 $\mathbf{1}(-t+2)$的波形

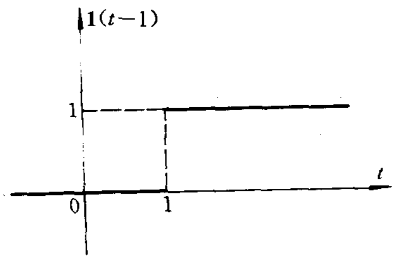


图 1-6 函数 $\mathbf{1}(t-1)$的波形

3. 单位阶跃函数的主要功能

(1) 定义时间域

如一函数

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin\omega t & t>0\end{cases}$$

式中,$t<0$,$t>0$ 为 $f(t)$的时间定义域。当用单位阶跃函数表示时可简单地写成

$$f(t)=\mathbf{1}(t)\sin\omega t$$

这事实上是用单位阶跃函数 $\mathbf{1}(t)$定义了函数 $f(t)$的时间域。

(2) 截取波形

若 $f(t)=Ae^{-2t}$的波形如图 1-7 所示,当需截取 $t>0$ 的波形时,可用 $\mathbf{1}(t)$加以表示,即

$$f_c(t)=Ae^{-2t}\mathbf{1}(t)$$

其波形如图 1-7 中黑粗线所示。

(3)构成闸门函数 $G(t)$

闸门函数的定义为

$$G(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0<t<t_0\\ 0 & t>t_0\end{cases}$$

其波形如图 1-8 所示。$G(t)=1$ 时的时间定义域 $0<t<t_0$为闸门开放时间。$G(t)=0$ 时的时间为闸门关闭时间。显然,闸门函数可以用单位阶跃函数和延迟单位阶跃函数的叠加加以表示,

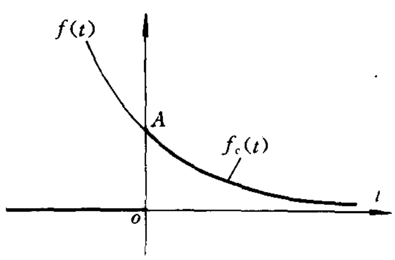


图 1-7 用 $\mathbf{1}(t)$截取波形示例

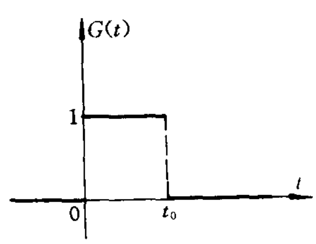


图 1-8 闸门函数的波形

即

$$G(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_0)$$

$G(t)$还可以表示为

$$G(t) = \mathbf{1}(t) \cdot \mathbf{1}(-t + t_0)$$

分别作出$\mathbf{1}(t)$和$\mathbf{1}(-t+t_0)$的波形，然后将两波形每一瞬间的值相乘，所得波形即为闸门函数$G(t)$。读者可自行验证。

利用闸门函数可方便地截取或表示某些波形。

**例 1-4** 写出图 1-9(a)、(b)所示波形的函数表达式。

**解**:图 1-9(a)中$f_1(t)$波形按正弦规律变化，周期$T=0.02$，$\omega=2\pi\frac{1}{T}=314$，其值不为零的

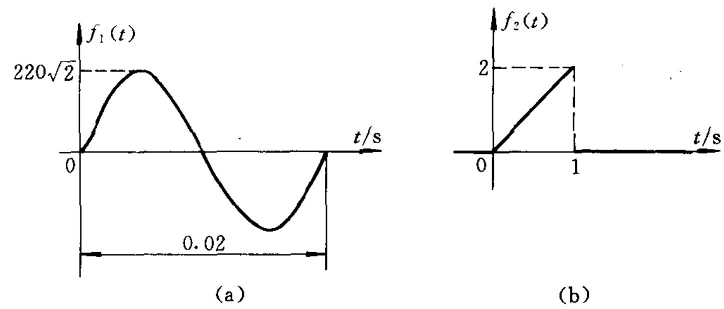


图 1-9 例 1-4 用图

时间定义域为$0<t<0.02$s，于是

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (220\sqrt{2}\sin\omega t)G(t) \\ &= (220\sqrt{2}\sin 314t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 0.02)] \end{aligned}$$

图 1-9(b)中，$f_2(t)$不为零的时间定义域为$0<t<1$。在定义域内，其表达式为$f_2(t)=2t$，于是对所有$t$有

$$f_2(t) = 2tG(t) = 2t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)]$$

## 二、单位脉冲函数 $P_\Delta(t)$

单位脉冲函数的定义为

$$P_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

其波形如图 1-10 所示。式中$\Delta$称为$P_\Delta(t)$的脉冲宽度(简称脉宽)，$\frac{1}{\Delta}$为脉冲幅值。容易看出，单位脉冲函数的显著特征是$P_\Delta(t)$波形下所围的面积是单位 1，即

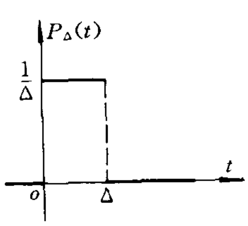


图 1-10 $P_\Delta(t)$的波形

$$\int_0^\Delta P_\Delta(t)\mathrm{d}t = \Delta \cdot \frac{1}{\Delta} = 1$$

$P_\Delta(t)$与闸门函数$G(t)$的波形类似，但$G(t)$在闸门开放时间内其幅值为 1，而$P_\Delta(t)$为$\frac{1}{\Delta}$。单位脉冲函数与闸门函数之间的关系是

$$P_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}G(t) = \frac{1}{\Delta}[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \Delta)] \tag{1-1}$$

宗量的概念同样适用于单位脉冲函数。

**例 1-5** 作出函数 $P_2(t-1)$的波形。

**解法一**:由定义知

$$P_2(t-1)=\begin{cases}0 & t<1\\ \dfrac{1}{2} & 1<t<3\\ 0 & t>3\end{cases}$$

由此不难作出其波形如图 1-11 所示。

**解法二**:由给定的单位脉冲函数知,其脉宽 $\Delta$ 为

$$\Delta=2$$

其幅值为
$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{2}$$

在时间上比 $P_2(t)$延迟了一个时间单位,故 $P_2(t-1)$的波形如图 1-11 所示。

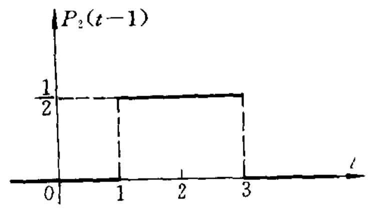


图 1-11 例 1-5 图

**例 1-6** 试写出图 1-12 所示波形的函数表达式。

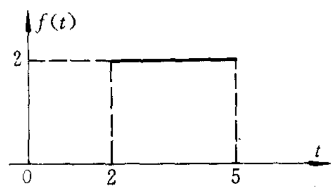


图 1-12 例 1-6 图

**解**:若用闸门函数表示,则

$$f(t)=2[\mathbf{1}(t-2)-\mathbf{1}(t-5)]$$

若用脉冲函数表示,则

$$f(t)=KP_3(t-2)$$

显然应有

$$K\cdot\frac{1}{\Delta}=K\cdot\frac{1}{3}=2$$

所以
$$K=6$$

即
$$f(t)=6P_3(t-2)$$

**三、单位冲激函数 $\delta(t)$**

单位冲激函数又称狄拉克函数,是对于一种瞬间作用的信号的理想化描述。

1. 单位冲激函数的定义

单位冲激函数 $\delta(t)$的定义为

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \text{奇异} & t=0\end{cases}$$

其奇异性必须满足

$$\int_{-\xi}^{+\xi}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{1-2}$$

式中,$\xi$ 为原点 $o$ 的任一邻域。$\delta(t)$的波形如图 1-13 所示。

当 $\xi=0$ 或$\infty$时,式(1-2)可写为

$$\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

数值 1 称为 $\delta(t)$的脉冲强度,其数学意义是 $\delta(t)$波形下所围的面积为 1。

单位冲激函数 $\delta(t)$最显著的特征是其仅在 $t=0$ 取值,且其强度为 1。

2. 单位冲激函数可以看作是满足式(1-2)奇异性的函数在一定条件下的极限

比如,单位冲激函数可以看作是 $P_\Delta(t)$函数当 $\Delta\to 0$ 时的极限。由式(1-1)知,当 $\Delta\to 0$ 时,

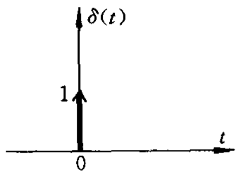


图 1-13 单位冲激函数的波形

其幅值$\frac{1}{\Delta}\to\infty$，而 $P_\Delta(t)$下所围的面积仍为 1，满足式(1-2)的奇异性，故

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t) \tag{1-3}$$

又如，单位冲激函数还可以看作是图 1-14 所示三角形脉冲函数 $T_\Delta(t)$当 $\Delta\to 0$ 时的极限。容易看出，$T_\Delta(t)$波形下所围的面积为 1，满足式(1-2)的奇异性，故

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} T_\Delta(t)$$

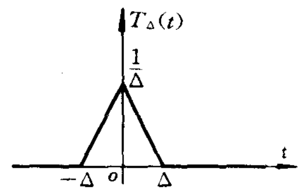


图 1-14 三角形脉冲函数

单位冲激函数还可看作是许多函数在一定条件下的极限，如正态分布函数，抽样函数等。在此不一一说明。

把单位冲激函数看作某些函数在一定条件下的极限，对于我们理解 $\delta(t)$的定义将是有益的。

3. 单位冲激函数 $\delta(t)$与单位阶跃函数 $\mathbf{1}(t)$之间的关系

将式(1-1)

$$P_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\Delta)]$$

代入式(1-3)得

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\Delta)] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{1}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-4}$$

可见，$\delta(t)$等于 $\mathbf{1}(t)$的导数。式(1-4)的数学意义是十分明显的。当 $t\neq 0$ 时，$\mathbf{1}(t)$为恒定值(0 或 1)，对时间 $t$ 的变化率均为零。而 $t=0$ 时，$\mathbf{1}(t)$发生单位阶跃跳变，对时间 $t$ 的变化率为无穷大，相当于瞬间单位冲激。

需要指出，按照对普通函数求导数的定义，当变化率为∞时，其导数是不存在的。式(1-4)是对奇异函数求导数，奇异函数及其运算建立在广义函数论的基础上。关于广义函数论本书不作深入讨论，但读者可以直观地将普通函数的运算规则(如加减，乘除，微积分等)用于奇异函数的运算。

对式(1-4)两边从 $0_-$到 $t$ 取积分得

$$\int_{0_-}^{t}\delta(t')\mathrm{d}t' = \int_{0_-}^{t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{1}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \mathbf{1}(t')\Big|_{0_-}^{t} = \mathbf{1}(t)$$

即

$$\mathbf{1}(t) = \int_{0_-}^{t}\delta(t')\mathrm{d}t' \tag{1-5}$$

式(1-4)，式(1-5)反映了 $\delta(t)$与 $\mathbf{1}(t)$之间的关系，在以后的内容中要经常用到。

4. 单位冲激函数的重要性质

单位冲激函数 $\delta(t)$属奇异函数，而奇异函数的定义、运算等严格地讲都建立在广义函数理论的基础上。为了说明单位冲激函数的重要性质，在此先介绍广义函数理论中关于广义函数的等值特性。

设 $f_1(t)$，$f_2(t)$为任意广义函数，$\varphi(t)$为任意连续函数且处处可微任意多次。若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1-6}$$

则

$$f_1(t) = f_2(t) \tag{1-7}$$

式(1-6)、(1-7)称为广义函数的等值特性。式中$\varphi(t)$通常称为检验(或试验)函数。

性质1 $\delta(t)$与任意连续函数$f(t)$的相乘特性

设$f(t)$为任意连续函数,则

$$f(t)\cdot\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{1-8}$$

证明:式(1-8)左右两边均为奇异函数。根据式(1-6)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{0_-}f(t)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}f(t)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&\quad+\int_{0_-}^{\infty}f(t)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0+\int_{0_-}^{0_+}f(0)\delta(t)\varphi(0)\mathrm{d}t+0\\&=f(0)\varphi(0)\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\varphi(0)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(0)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{0_+}f(0)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}f(0)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&\quad+\int_{0_+}^{\infty}f(0)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0+\int_{0_-}^{0_+}f(0)\delta(t)\varphi(0)\mathrm{d}t+0\\&=f(0)\varphi(0)\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\varphi(0)\end{aligned}$$

故

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

事实上,式(1-8)很容易从函数的相乘规则上直观地加以理解。当$t\neq0$时由于$\delta(t)$均为零,而仅在$t=0$时取值,故

$$f(t)\delta(t)=f(t)|_{t=0}\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

根据上述性质不难得出

$$t\delta(t)=t|_{t=0}\delta(t)=0$$

$$f(t-t_0)\delta(t)=f(t-t_0)|_{t=0}\delta(t)=f(-t_0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t)|_{t=t_0}\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

性质2 筛分性

设$f(t)$为任意连续函数,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(t)|_{t=0}=f(0) \tag{1-9}$$

式(1-9)称为单位冲激函数的筛分性。即任意连续函数$f(t)$与$\delta(t)$相乘并在$(0_-\sim0_+)$或$(-\infty,+\infty)$时域内积分,其值等于$f(t)$在$t=0$的值,即把函数$f(t)$在$t=0$的值筛分出来。

证明:将式(1-8)代入式(1-9)左边得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(0)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

证毕。

同理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\delta(t)\mathrm{d}t=f(-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_{-t_0}^{+t_0}f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$$