

气象雷达 回波信息原理

马振骅 等编著



科学出版社

p959.4
MZH

气象雷达回波信息原理

马振骅 等 编著



科学出版社

1986

004233

内 容 简 介

本书系统地论述了气象目标物对雷达发射的无线电波的散射过程、雷达回波中包含的信息，以及回波信息的提取原理。书中着重分析云雨粒子的散射、回波的偏振特性、回波强度的涨落现象、回波信号的频谱结构以及晴空大气的雷达探测原理等。

本书可供从事大气探测、雷达气象工作的科研人员和大专院校中相应专业的师生阅读，也可供研制气象雷达设备的工程技术人员参考。

气象雷达回波信息原理

马振群 等 编著

责任编辑 许贻刚

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986年4月第一版

1986年4月第一次印刷

印数：0001—8,500

开本：787×1092 1/32

印张：12

字数：268,000

统一书号 13031·3130

本社书号：4745·13-15

定 价：2.85 元

前 言

人类有意识地用雷达追踪和观测天气现象，最早可以追溯到1941年。以后雷达在大气探测中的独特功能受到越来越多的重视，许多研究工作者在雷达回波原理、探测方法和对探测结果的分析解释等方面，开展了广泛的研究，并且逐渐使雷达探测走上业务应用的阶段。雷达气象学的发展情况大致如下：

在雷达气象发展初期的四十年代，是学科的描述性阶段。在这时期，主要是应用雷达来观测天气回波的形态、移动速度、回波高度、回波的初生和发展，以及这些特性与天气形势和天气现象之间的联系。在定量工作方面，主要是解释了零度层亮带出现的机制。此外对雷达反射率、雨滴谱和降水强度之间的关系，也作了少量的工作。

到五十年代，雷达气象的研究工作开始进入定量解释的阶段。研究的主要方面包括降雨强度和雷达反射率之间的定量联系、等反射率廓线（等雨强廓线）的自动显示、回波信号的起伏现象、信号的偏振特性等。在这个阶段，描述性的研究工作依旧大量地进行着，主要包括回波形态结构的分类、龙卷的结构和雷达鉴别龙卷的方法、飓风的结构和雷达监测等。此外对仙波起因的研究也开始了；另外，还有少量研究工作是关于雷暴中的闪电所产生的回波。

在六十年代，值得提及的有下列几方面工作：

（1）对水汽凝结体球形粒子的散射特性作了大量的计算，这主要是为了解释在产生冰雹和龙卷的强雷暴云中观测到的异常高的反射率。这些散射体主要包括有均质球形粒子，双层同心球粒子，冰、水混合粒子和非球形的瑞利粒子等。

（2）将超灵敏度雷达应用到大气研究中，从而能够探测到由晴空中的折射指数不均匀结构所产生的回波。因为这种不均匀结构在大气中几乎总是存在的，使得有可能将雷达作为一种包括晴天、云天、雨天在内的任何天气下都能有效地进行观测的工具，用来勾划出大气的状态和运动。在六十年代末研制成功的调频连续波雷达，则是一种既具有极高灵敏度，又具有极高空间分辨率的大气探测雷达。

（3）在大气探测中开始尝试性地应用脉冲多普勒雷达。虽然技术条件还不很成熟，但是这种雷达在它用于气象研究的早期就开始显示出它具有特别重要的性能。由于多普勒雷达具有测量目标运动速度的能力，使人们第一次能够在很短时间内，以很高的取样密度来测量很大空间范围内的风场结构。因为这种雷达能够同时测量降水量的分布和流场结构，使得人们在降水物理和风暴动力学方面的知识有很大提高。

在六十年代里，雷达已经比较广泛地应用到气象研究的各个领域中去，从而标志雷达气象学这门学科已趋于成熟。它所应用的研究方面包括云和降水物理、人工影响天气、大气电学、水文气象、中小尺度气象等。此外，在一些国家设置了业务应用的天气雷达网，说明雷达气象已经成为一门应用性的科学了。

七十年代雷达气象学所取得的成就是和雷达技术、计算机技术和显示技术的发展紧密相联系的。新的成就主要有：

(1) 多部多普勒雷达的联合观测已经实现。由于信号处理理论和高速运算器件的发展,多部多普勒雷达在同步观测的时刻,即可以实时地计算出观测空间中的实测三维风场。这对于有效地进行多种设备的综合观测是非常有利的。由于多部多普勒雷达技术的实现,必将大大加速人们对于对流风暴机制的认识过程。

(2) 出现了甚高频雷达。气象上用的甚高频雷达是既具有很高灵敏度又具有多普勒性能的米波段雷达(有的工作在分米波段,称特高频雷达)。借助于大气中存在的折射指数随机不均匀结构对电磁波的散射,它可以测量空气的运动速度。这就为我们提供了一种在晴空大气中快速地测量风场的遥感方法。由于这种雷达工作在较长的波长,不仅能用来测量对流层内,而且能够测量平流层内,甚至中层大气内的空气运动。甚高频雷达必将成为未来大气参数无球探测系统的重要组成部分。

(3) 应用了有效的数据处理和显示方法。在七十年代,气象雷达上出现了信号处理结果的数字式显示、彩色显示和其它各种直观的显示方式。这些灵活有效的显示方式的发明,在很大程度上归功于在高速数字技术方面所取得的成就。因为数字化了的信息,能够在保持高精度的条件下进行重新组合和实现各种复杂的运算。

七十年代在利用雷达所作的气象研究工作方面,大多是继续过去年代里已开创的工作,且主要致力于:

(1) 强烈风暴的结构及预告方法的研究。由于雷达性能的改进,强烈风暴的空间结构及其演变(包括风暴发生前的对流过程)的图象,越来越清晰地呈现在人们的眼前。在风暴识别技术方面努力的结果,已使得灾害性局地强风暴所造成的损失大为减少。

(2) 使雷达测量区域降水量的工作达到实用化的程度。这方面的研究工作,有代表性的是美国的数字化雷达计划(D/RADEX)和英国的 Dee 计划。由于采用了计算机和标定用的遥测雨量站系统,使测量精度和测量结果的实时性得到提高。雷达-计算机系统能够实时地提供各个支流域上的降雨量、河水的流量,还可以预告洪峰的大小和出现的时刻。

(3) 晴空湍流的研究。晴空湍流的探测,不仅对于航空警报有实际意义,对于研究大气中的参数分布、能量交换以及污染物质的积累,也是很重要的。

在八十年代,雷达气象学将有更多的成就投入到业务应用中去。多普勒气象雷达技术将达到成熟的程度,并在日常的强风暴预报服务中得到更多的应用。配有计算机的降水测量雷达系统,会比较广泛地应用到与雨量关系非常密切的水文工作中去。某些类型的气象雷达将与其它辐射仪器一起组成无球探测系统而进行常规的大气参数测量。在这个年代里,雷达资料处理的自动化和实时化程度也将更为完善。此外,也可能会有建立新的探测原理基础上的雷达研制出来。

从上面雷达气象学发展过程的概述可以看出,这门学科的发展主要包含两方面的内容。第一是如何充分地利用雷达回波所可能携带的信息,这包括对信息原理的研究、雷达技术的提高和对回波信息的有效处理。第二是对探测结果作出科学的(主要是从天气学和云物理学角度的)解释。这后一方面的内容,就是大多数雷达气象学专著的主题。本书则主要从前一方面来介绍雷达气象学中所涉及的知识。

全书共分八章。第一章概要地介绍雷达回波信号分析的主要内容,第二章至第四章

重点阐述降水粒子的散射特性以及用雷达测量降水量和研究降水性质的一些方法，第五、六章叙述回波强度的起伏理论和信号的数字化处理技术，第七、八章则较为详细地介绍气象上用的微波多普勒雷达和晴空大气探测雷达的工作原理和信号分析方法。

本书是由下列几位同志合作编写的：马振骅（第一—四、七、八章和第六章第三节）、陶善昌（第五章）和葛润生（第六章第一、二节），刘锦丽参加了部分工作。全书由马振骅整理定稿。

在本书的公式推演中，一部分参考了国外发表的文献，但为求得全书在符号、公式和表达方式上的统一，以及按照我国现行规定的用国际单位制来表达物理量，本书中的表达式与前人所发表的表达式可能有所不同，读者在对照参考文献时应予注意。

对于书中存在的缺点和错误，欢迎读者批评指正。

TW26/05 TW26/25

目 录

前言	iii
第一章 气象雷达回波信息的提取	1
第一节 回波信号的解析形式	1
第二节 信号的取样和分析	2
第二章 微波在降水粒子上的散射和在大气中的衰减	6
第一节 在均质球形粒子上的散射	6
第二节 在非均质球形粒子上的散射	14
第三节 在大气中的衰减	19
参考文献	22
第三章 雷达气象方程和雷达测量区域降雨量	24
第一节 雷达气象方程	24
第二节 雷达测量区域降雨量	27
第三节 地面镜反射对雷达测雨的影响	30
参考文献	35
第四章 偏振雷达探测降雨	36
第一节 正交偏振技术测量降雨	36
第二节 圆偏振波技术探测降水体	42
参考文献	51
第五章 气象雷达回波信号的涨落理论和平均化处理	53
第一节 回波涨落现象及其原因	53
第二节 回波信号强度及其平均值的分布律	55
第三节 视频积分器的工作原理和性能	64
第四节 非独立取样的均值估计原理	72
第五节 平均措施对接收机灵敏度的改善	79
参考文献	80
第六章 天气雷达回波信号的数字化处理及其应用	82
第一节 降水回波信号的数字化	82
第二节 天气雷达回波数据的坐标转换和插值	83
第三节 用数字化天气雷达资料作现时降水预报	88
参考文献	94
第七章 气象相干雷达回波的频率分析	96
第一节 载波脉冲的频谱结构	96
第二节 雷达回波的多普勒频谱分析方法	114
参考文献	142
第八章 晴空大气回波探测	144
第一节 湍流大气对电磁波的散射	144
第二节 晴空大气中的镜面反射	150

第三节 探测晴空大气的甚高频和特高频雷达.....	157
第四节 调频连续波雷达.....	171
参考文献.....	180

第一章 气象雷达回波信息的提取

第一节 回波信号的解析形式

气象回波中的信息,产生于雷达发射的电磁波被大气中的物质所散射的过程中。假如雷达发射的电磁波的角频率为 ω_0 ,并且信号可表达成

$$S_0(t) = A_0 \cos \omega_0 t \quad (1)$$

其中 t 是时间, A_0 是发射信号的振幅,则取样体积中每一个粒子的回波可写作

$$s_j(t) = a_j \cos(\omega_0 t - \phi_j) \quad (2)$$

式中 a_j 是振幅, ϕ_j 是相位延迟(在后面简称相位),由下式给定

$$\phi_j = \frac{4\pi}{\lambda_0} r_j \quad (3)$$

λ_0 是发射信号波长, $\lambda_0 = c/f_0$, 其中 f_0 是发射信号频率, c 是光速。下角 j 表示取样体积中粒子序号, r_j 是第 j 个粒子离雷达站的距离。

来自取样体积 V 内全部粒子的合成散射信号为各粒子信号之叠加,即

$$s(t) = \sum_V a_j \cos(\omega_0 t - \phi_j) \quad (4)$$

为了理解和演算上的方便,把(2)式那样的实信号表示成解析的形式更为适宜。这样,对应于(4)式的合成信号的解析形式为

$$s(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_V a_j e^{-i\phi_j} \quad (5)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$ 。(5)式累加号下的每一项可以看作是复平面上一个幅度等于 a_j ,相角为 $-\phi_j$ 的复矢量。在体积 V 内,所有这样的复矢量累加的结果,得到的合成矢量具有振幅 a ,相角 $-\phi$,因而有

$$ae^{-i\phi} = \sum_V a_j e^{-i\phi_j} \quad (6)$$

在(5)式中,射频频项 $e^{i\omega_0 t}$ 并不包含任何信息,雷达回波中所含有的全部信息包含在(6)式所示的解析函数中。单个粒子的散射信号振幅 a_j 取决于粒子的大小、形状和其它物理特性, ϕ_j 取决于粒子的位置。合成矢量的 a 和 ϕ 则与所有的 a_j 和 ϕ_j 有关。通常, a 和 ϕ 的时间变化要比射频振荡缓慢得多,故解析信号 $ae^{-i\phi}$ 称为(5)式信号的复包络函数(或复调制函数)。在雷达气象学中,信号处理的全部任务就是分析复包络函数的性质。

第二节 信号的取样和分析

一、信号的取样问题

如果雷达向固定方向发射连续波，并且在该方向上只存在唯一的散射物体，则雷达接收到的连续回波信号可以不间断地反映目标物特性和速度的变化。但是在气象雷达应用中，散射介质是延续地分布在广大的空间中的，为了取得对目标物的距离分辨能力，雷达发射的是一连串窄脉冲信号，而在发射脉冲的间歇期间，依次接收到自近而远的目标物的回波信号。来自 r 距离上的回波信号，相对于发射脉冲的延迟时间为

$$t = 2r/c \quad (7)$$

典型值是：每个发射脉冲的持续时间约 1 微秒，重复频率约每秒 1000 次。在发射脉冲间歇（约 1 毫秒）中的每 1 微秒，我们可以收到某一固定距离上的散射体积所产生的一个独立回波信号。如果我们想要了解每一个这种散射体积的信息，则必须对各个距离上的信号作分别的处理。这样，首先就要对信号进行分离取样。如图 1 所示，在零时刻，雷达发射一个脉冲，并在发射脉冲结束之后立即开始接收信号，每 1 微秒取样一次。从最

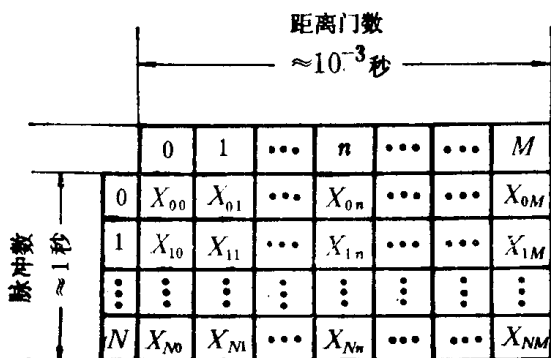


图 1 多重信号的取样

初的 150 米（即第一个距离门）来的样本是 X_{00} ，下一个是 X_{01} ；这样下去，一直到与发射脉冲相距 M 微秒的来自最远不模糊距离的回波信号被接收到为止。按上面所给的参数，则 $M = 1000$ 。最后这个取样脉冲与发射脉冲相距 1 毫秒，相当于散射体积离雷达的距离为 150 公里。此后，发射第二个脉冲，取样过程又如此重复下去，取样脉冲依次为 $X_{10}, X_{11}, \dots, X_{1M}$ 。这样，从第零行往下排列，直到所取的样本数够一次分析之用为止；假定最后一行是第 N 行。第 n 列中的样本都来自第 n 个距离门上的回波信号。且此距离门上每两次取样之间的时间间隔与两次发射脉冲之间的间隔是相同的。来自同一散射体积的这一连串离散的回波取样脉冲相当于下述情况：雷达发射连续信号，该散射体积也相应地产生连续的回波信号，然后对回波信号按固定的时间间隔进行脉冲取样。因此，要知道第 n 个距离门上的目标特性，就必须处理图 1 第 n 列中的信号。这就是说，在每次发射脉冲间歇期间，回波信号是按图 1 中的横行取样的，但信号的处理是按图 1 中的纵列进行的。在很多实际观测中，我们需要考虑每个取样脉冲的宽度，每一行中脉冲的总个数 M ，每一列中相邻脉冲之间的间隔（也就是发射脉冲重复周期）和每一列中取样脉冲的

总个数 N 。 $M \times N$ 通常在 10^4-10^6 之间。

二、信号强度和偏振特性的分析

粒子散射信号的振幅 a_j 取决于粒子的大小和性质，而散射体积内所有粒子的合成散射信号的振幅则不仅取决于该体积内粒子大小的分布，也与粒子间的相互位置有关。因为在实际情况下，散射体积内的粒子总是处在不停的相对运动之中，所以观测到的取样回波脉冲幅度总是存在着快速的起伏。但是理论和观测都表明，对于来自实际大气介质的回波信号，在一段时间内回波脉冲幅度的平均值，只决定于粒子的大小和数目，而与其相对位置的变化无关。因此我们有可能通过测量回波信号的平均强度来估计散射体积中的含水量或降水强度。在第二至第六各章中，我们将分别介绍与雷达测量降水有关的各种问题。

三、平均速度和速度谱的计算

粒子散射信号的相位 ϕ_j 决定于粒子离雷达的距离，因此相位的变化率就对应于粒子的径向运动速度。回波相位的变化率正是回波信号的多普勒频移。因为散射体积中粒子存在相对运动，所以回波能量是分布在一个多普勒谱段上的。但最有重要意义的是散射体积中粒子的平均运动速度，对应的是平均多普勒频率。

计算平均多普勒频率最直截了当的方法是先计算多普勒频谱，随后就可以以多普勒频谱为权重函数计算出频域中的零阶矩（回波功率）、一阶矩（平均多普勒频率）、二阶偏心矩（多普勒频谱宽度）等等。要计算频谱，必须在计算前保留回波的振幅信息和相位信息。包含这两种信息的复调制函数（见（6）式）也可以用两个正交的信号来表示，它们分别等于复调制函数的实部和虚部：

$$X(t) \sim a(t) \cos \phi(t)$$

$$Y(t) \sim a(t) \sin \phi(t)$$

利用两个相位相差 $\pi/2$ 的稳定本振信号对回波信号作相干相位检波就可得到上述两个分量（见第七章）。对任一距离门上一连串相继的复调制脉冲取样信号作快速傅氏变换，就可以算出多普勒谱。

虽然多普勒谱能够最充分地反映回波信号中所包含的信息，但是这要求雷达信号的处理机具有很大的存储容量和很快的运算速度。如果所感兴趣的只是多普勒平均频率（或者再加上多普勒频率方差），而不是全部多普勒信息，就可以不必先去计算多普勒谱，而采用比较简单的计算原理和易于实现的计算技术。目前采用得比较多的是脉冲对处理方法，用这种方法可以实时地得到平均频率和频率方差。早在六十年代前期就开始应用到脉冲多普勒雷达上的模拟式的相干存储滤波器方法，虽然也可以给出实时的结果，但是它在速度测量精度和距离分辨能力方面是低性能的。

四、晴空回波

晴空大气的散射机制与降水粒子的散射机制有很大的不同，但是这两种散射体都是在大气中连续分布的介质。如果我们都用单位体积中的雷达散射截面来表征介质的散射能力的话，那么从雷达的角度看来，可以不去顾及两者之间的差别，甚至信号的处理方法

表 1 气象雷达工作内容简表

观测内容	天气对象	研究或服务目的	注 释
回波形态、位置与一般结构	大范围稳定性降水，阵雨，雷暴	公众天气预报，航空预报	这是雷达天气监测的主要内容
回波特征结构	冰雹，龙卷，飚线，台风	公众强风暴警报，航空警报，云物理研究	强烈风暴系统的回波常具有某些特征结构，可据以识别
零度层亮带	稳定性降水	公众天气预报，领航简报，温度层结探测	稳定性降水中的强反射层可以指示温度为摄氏度的高度
晴空回波层结构	低层晴空大气	大气稳定性结构，不稳定波发展过程	必须用超高灵敏度雷达才能观测到晴空回波
回波强度分布	稳定性降水和阵性降水	公众降水预报，航空预报，水文预报	回波强度可以与降雨率定量地联系起来
强反射核的反射率	局地强风暴	强风暴警报	暴雨、龙卷、冰雹等回波中常有很大的反射率极值
降水回波上、下界高度	一般性降水，局地强风暴	领航简报，强风暴警报	降水上、下界的确定有助于选择飞行高度。另外，风暴强烈程度常随回波顶高度的增大而增大
回波强度的瞬时起伏	强风暴	降水区内湍流运动	回波强度的起伏与波束照射体积内降水粒子随空气运动的不规则程度成正比
回波退偏振度	强风暴	降水粒子形态结构	降水粒子（例如冰雹和大雨滴）的非球形性，能使回波的偏振性不同于雷达发射波的偏振性
电磁波路径衰减率	一般性降水，强风暴	含水量和降雨率测量	衰减率与降水体积中的含水量成正比
（以下为多普勒雷达能测量的内容）波束体积中平均速度	一般性降水，强风暴	公众强风暴警报，航空警报，降水区动力学结构研究	平均速度的空间分布反映降水区内的流场结构
同上	晴空大气	风速廓线测量，大气波动	这项测量须用甚高频雷达进行
波束体积中速度方差	强风暴，晴空大气	降水区湍流结构，龙卷警报，晴空湍流研究，航空警报	速度方差随湍流程度的加剧而增大
垂直速度谱	降水区	降水粒子尺度分布（云物理研究）	粒子大的，下落速度也大
镜面反射层高度	对流层顶，平流层	对流层顶高度测量，中层大气动力学结构	此项测量须用甚高频雷达进行

也可以基本相同。当前探测晴空大气的脉冲多普勒雷达与风暴多普勒雷达之间的主要区别在于：（1）晴空大气雷达具有较长的波长；（2）晴空大气雷达具有较大的天线面积、较高的发射功率和很高的接收机灵敏度；（3）晴空大气雷达在信号处理中采用了相干积分方法以改善信号噪声比。

探测对流层下层晴空大气的调频连续波雷达工作的原理与脉冲雷达很不相同。由于它采用了调频波，从而避免了脉冲雷达中发射脉冲宽度对距离分辨率的限制，使得距离分辨能力达到1米左右。由于这种雷达具有很高的距离分辨能力和很高的接收机灵敏度，所以能够揭示低层晴空大气中的稳定层结和不稳定波的详细结构。

这里我们用一张简表（表1）来扼要地介绍现有的气象雷达所从事的主要观测内容，所观测的天气对象，以及观测的主要研究或服务目的。

第二章 微波在降水粒子上的散射 和在大气中的衰减

第一节 在均质球形粒子上的散射

气象雷达主要的探测对象是云和降水。云雨是由液相或冰相的水汽凝结体粒子组成的。雷达回波的强度，决定于散射体积中这类粒子的大小、形状、构成粒子的介质的介电常数以及粒子的浓度。当雷达气象学从早期的描述性学科向定量性学科发展的时候，就希望从雷达回波信号中了解散射粒子的性质以及降水区中的含水量或降雨率。为了这一目的，就需要对降水粒子的散射特性加以研究。在研究过程中发现，虽然一般说来，降水粒子具有比较简单的形状，但它们的散射特性的数学表示式却极为复杂，且随着粒子形状的不同而有很不相同的函数形式。对云的微物理性质的研究表明，在自然状态下的云和降水中，直径几毫米以下的水汽凝结体粒子是近乎圆球形的。因此这种形状最简单的粒子的散射特性也是雷达气象学的散射理论中首先被详细研究的。

下面我们从 Maxwell 方程组出发，引出均匀介质圆球形粒子的微波散射函数的表达式，最终得到雷达（后向散射）截面 σ 、衰减截面 Q_t 、散射截面 Q_s 和吸收截面 Q_a 等对入射的微波波长、圆球形粒子的直径和复折射指数的函数依赖关系。

计算所用的坐标系取为：坐标系原点放在圆球形散射粒子的中心；在直角坐标系中，入射电磁波的传播方向沿 z 轴，入射波电场矢量振动方向沿 x 轴，磁场矢量沿 y 轴。空间任一点（散射波观测点）的位置用 P 来表示。用球极坐标来确定时， P 点离原点的距离以矢径 r 表示， z 轴与矢径向量 r 之间的夹角为 θ （称为散射角）， r 在 $x-y$ 平面上的投影线与 x 轴之间的夹角（取由 x 轴向 y 轴旋转方向为正）为 ϕ （称为偏振角）（见图1）。

Maxwell 基本方程组是

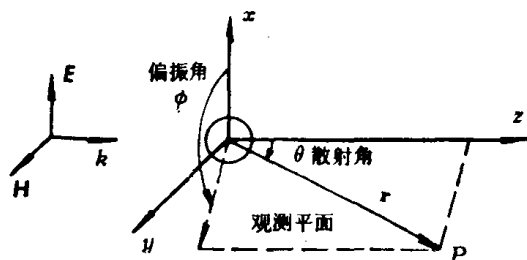


图1 分析圆球形粒子散射特性时，坐标系的选取

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

此外, 有物态方程

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (7)$$

上式中各符号意义: $\mathbf{E}$ 电场强度, $\mathbf{D}$ 电位移, $\mathbf{j}$ 电流密度, ρ 体电荷密度, $\mathbf{H}$ 磁场强度, $\mathbf{B}$ 磁感应强度, σ 物质的电导率, ϵ 介电常数, μ 磁导率, t 时间。将 (5) — (7) 式代入 (1) — (4) 式, 使场量都用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 两个量来表达, 得到

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (11)$$

由于在任何电磁扰动下, 介质的体电荷密度很快就趋于零, 因而 (10) 式可写成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (12)$$

假定涉及的电磁过程都是周期的, 设

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$$

式中 ω 是电磁场振动角频率, $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 分别是电场和磁场振幅, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

因而 (8), (9) 两式可写作

$$\nabla \times \mathbf{H} = ic \left(\epsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -ic\mu \mathbf{H} \quad (14)$$

其中

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (15)$$

称为波数。上述各式中 c 是真空中光速。因 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, 其中 ϵ_0 和 μ_0 是真空中介电常数和磁导率, ϵ_r 和 μ_r 是介质相对于真空的介电常数和磁导率, 并且因 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, 故而 (13) 与 (14) 式可写成

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\epsilon_r - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) k \mathbf{E} \\ &= i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} m^2 k \mathbf{E} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\mu_r \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} k \mathbf{H} \quad (17)$$

其中

$$m^2 = \epsilon_r - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (18)$$

m 称为介质的复折射指数。对(17)式取旋度,并将(16)式代入,可得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mu_r m^2 k^2 \mathbf{E}$$

因

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$$

并且 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (见(12)式),以及对大多数非导磁介质来说,有 $\mu_r \approx 1$,故上式可写成

$$\nabla^2 \mathbf{E} + m^2 k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (19)$$

同样,对(16)式取旋度,并以(17)式代入,可得

$$\nabla^2 \mathbf{H} + m^2 k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (20)$$

由此可见, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 满足同样的矢量波动方程。

假设用带有上角 (i), (s) 和 (r) 的符号分别表示与入射波, 散射波和折射波相应的物理量,则这三种波的电场矢量和磁场矢量分别以 $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{E}^{(s)}$, $\mathbf{E}^{(r)}$ 和 $\mathbf{H}^{(i)}$, $\mathbf{H}^{(s)}$, $\mathbf{H}^{(r)}$ 来表示。在两种不同介质的界面上,电磁场矢量应满足连续性条件。在圆球形粒子表面 ($r=a$, a 是粒子半径)处,连续性条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(s)} - \mathbf{E}^{(r)}) &= 0 \\ \mathbf{r} \times (\mathbf{H}^{(i)} + \mathbf{H}^{(s)} - \mathbf{H}^{(r)}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

因在环境介质中,入射波的传播方向沿 z 轴,电场矢量沿 x 轴方向,因而可以将入射波电磁场矢量在直角坐标系中的各个分量写成下列指数形式:

$$E_x^{(i)} = E_0 e^{-i(m_1 k_1 z - \omega t)} \quad (22)$$

$$H_y^{(i)} = H_0 e^{-i(m_1 k_1 z - \omega t)} \quad (23)$$

$$E_y^{(i)} = E_z^{(i)} = H_x^{(i)} = H_z^{(i)} = 0 \quad (24)$$

其中 E_0 和 H_0 是入射波电场和磁场矢量的振幅,其数值通过 $H_0 = m_1 E_0$ 相联系。式中 m_1 是环境介质的复折射指数, $k_1 = 2\pi/\lambda$ 是波数。利用电磁场波动方程(19), (20)及边界条件(21),就可以根据入射波(22) -- (24)式来求出球外散射波及球内折射波电磁场的表达式。其数学推演过程是比较复杂的,有兴趣的读者可参考文献[1]。在这里只给出演算结果。因为在雷达气象学中,只关心散射波,而对球内的折射波并不感兴趣,所以这里只给出散射波电场的表达式。在空间 P 点,接收到的散射电场矢量可以分解为球极坐标系中沿三个坐标变化方向(见图1)的三个分量。除纵波分量随距离很快衰减外,横波分量为

$$E_\theta^{(s)} = -\frac{iE_0}{m_1 k_1 r} e^{-i(m_1 k_1 r - \omega t)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\theta) + a_n \tau_n(\theta)] \cos\phi \quad (25)$$

$$E_\phi^{(s)} = \frac{iE_0}{m_1 k_1 r} e^{-i(m_1 k_1 r - \omega t)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\theta) + b_n \tau_n(\theta)] \sin\phi \quad (26)$$

上两式中的系数 a_n 和 b_n 具有下列形式:

$$a_n = \frac{m_1 \psi_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_2 \psi'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)}{m_1 W_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_2 W'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)} \quad (27)$$

$$b_n = \frac{m_2 \psi_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_1 \psi'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)}{m_2 W_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_1 W'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)} \quad (28)$$

式中 m_2 是球内介质的复折射指数, $k_2 = \omega/c$; $\psi_n(x)$ 和 $W_n(x)$ 是 Riccati-Bessel 函数:

$$\psi_n(x) = x j_n(x) \quad (29)$$

$$W_n(x) = x h_n^{(2)}(x) \quad (30)$$

式中 $j_n(x)$ 是球 Bessel 函数, $h_n^{(2)}(x)$ 是第二类球 Hankel 函数, 它们与普通 Bessel 函数的关系是

$$j_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} J_{n+1/2}(x) \quad (31)$$

$$h_n^{(2)}(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} H_{n+1/2}^{(2)}(x) \quad (32)$$

其中 $J_{n+1/2}(x)$ 是 $n + \frac{1}{2}$ 阶 Bessel 函数, $H_{n+1/2}^{(2)}$ 是第二类 $n + \frac{1}{2}$ 阶 Hankel 函数。(27),

(28) 式中的 $\psi'_n(x)$ 和 $W'_n(x)$ 分别是 $\psi_n(x)$ 和 $W_n(x)$ 对宗量的导数。

(25), (26) 式中散射角的两个函数的表达式是

$$\pi_n(\theta) = P_n^{(1)}(\cos\theta)/\sin\theta \quad (33)$$

$$\tau_n(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta} P_n^{(1)}(\cos\theta) \quad (34)$$

其中 $P_n^{(1)}(\cos\theta)$ 是缔合 Legendre 函数。

在前面的推演中, 根据 (15) 式的定义

$$k = \omega/c$$

其中 c 是一有量纲常数, 相当于真空中的光速; ω 为微波角频率, 无论在圆球形介质粒子的内外, 皆是同一不变的值。因此前面引入的球形介质外的 k_1 与球形介质内的 k_2 , 其实都等于同一个量; 即

$$k_1 = k_2 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

式中 λ 为真空中的波长。现重新规定, $m_1 k_1$ 称为球形散射体周围介质中的波数, 仍以符号 k 来表示 (因此, 此后书写的 k 稍不同于前面 (15) 式定义的 k), 则有

$$k = m_1 k_1 \quad (35)$$

令以 m 表示球形散射体相对于周围介质的相对复折射指数,

$$m = m_2/m_1 \quad (36)$$

则可得

$$m_2 k_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot m_1 k_1 = m k \quad (37)$$

根据 (35) — (37), 由 (27) 和 (28) 式表达的 a_n 和 b_n 可写成