JING DIAN LI XUE
JING DIAN LI XUE
JING DIAN LI XUE
JING DIAN LI XUE
JING DIAN LI XUE
JING DIAN LI XUE
JING DIAN LI XUE

经典力学

——理论纲要与习题

吴承壎 编

JING DIAN LI XUE
JING DIAN LI XUE

经 典 力 学

——理论纲要与习题

吴承埙 编

吉林大学出版社

经 典 力 学

——理论纲要与习题

吴承壎 编

责任编辑：张 延　　封面设计：甘 莉

吉林大学出版社出版　　吉林省新华书店发行

（长春市解放大路85号）　　长春市第四印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1989年11月第1版

印张：15.375　　1989年11月第1次印刷

字数：383千字　　印数：1—1500册

ISBN 7-5601-0288-3/N·4　　定价：3.80元

前　　言

这是一本为综合大学及高等师范院校物理类专业的大学生编写的教学参考书。

经典力学(或称理论力学)是物理类专业的重要基础理论课"四大力学"之一，是有关专业的大学生最先学习的一门理论物理课。从学习普通物理到学习理论物理，无论在课程内容的深度上还是方法上，都有很大不同，不少学生在初学时都感到不大适应，尤其对如何把理论与实际问题结合起来，常常感到困惑。理论力学"作题难"便是这种情况的集中反映，在历届学生中，这是普遍存在的问题。作者在教学实践中感到，由于理论力学本身具有理论系统性强、严谨成熟、历史悠久、应用广泛、问题类型多及大量运用高等数学进行演绎等特点，初学者难于在短时间内既熟悉了理论，又能运用自如地解题。为了帮助学生克服这一困难，尽量缩短适应理论课学习的过程，理论联系实际地在较深的层次上理解、消化所学的理论，特编写了这本参考书。

由于教学的实际需要，并考虑到国内外已有一些比较成熟的教科书可资参考，本书不采用通常教科书或习题集的写法。它的结构可分四部分：理论要点，例题，习题和附录。"理论要点"是本课中应当掌握的理论的一个详细纲要，"例题"占用了大量篇幅，演示了共 190 个各种类型的典型题目，部分题目给出了两种解法，必要的地方以附注形式作了简要的说明。某些重要的理论问题的深入讨论，也放在"例题"中。各章后共附 260 多个习题，以供课外作业及进一步探讨之用。书后的附录，提供某些本课必须的数学工具。

本书在内容与编排上，具有不同于某些现行理论力学教材的一些特点：

1. 在内容的取舍上，侧重物理专业的需要，注意与代物理及后继物理课的连接，在概念与方法上，为它们作准备。

2. 书的前部，概述牛顿力学及分析力学的基本原理。牛顿力学部分，尽量精讲多练，避免与普物力学重复或雷同，注意深化与提高。让学生尽可能早地接触分析力学，使他们有充足的时间和机会反复应用牛顿力学和分析力学两种方法处理力学问题，熟悉和掌握它们。

书的后部，主要阐述经典力学理论在若干典型力学问题中的应用，即一种运动——微振动；一种力——中心力；一种体系——刚体。不仅仅把它们作为理论应用的举例，而是尽可能系统地阐明处理这些重要力学问题的方法。

3. 运动与平衡的稳定性问题、打击理论等，尽管不是本课最基本的内容，但正愈益受到人们的重视，并广泛出现在国际上流行的教材中。这些内容也在本书中占据一定的位置。

4. 本书部分章节采用了矩阵方法，符号系统尽可能与国际上通用的表记相一致。如笛卡儿坐标系表为$O\text{-}x_1x_2x_3$，以利讨论坐标变换和推广到高维空间。

以上仅是作者在教材改革中所作的若干初步尝试，不当之处，以及书中的错误，恳请读者批评指正。

作者在教学过程中曾得到朱诚久、赵炳林、王克协、朱耀银及教学小组中其他同志的帮助，谨向他们表示衷心的感谢。

吴承埙

1987年9月于吉林大学物理系

目　　录

第一章　质点运动学

运动学是运动的几何学，是物理体系在三维空间和时间中运动的几何描述。它主要通过位置向量$\boldsymbol{r}$，位移$d\boldsymbol{r}$，速度$\boldsymbol{v}$，加速度$\boldsymbol{a}$，角速度$\boldsymbol{\omega}$等运动学量，来描述物体是怎样运动的。

一个质点可看作没有延展性的物体。质点的位置可以用三维空间的一个点来表示，它的大小与它的运动轨道及周围的物体相比非常地小。在运动学中，质点就是几何点。

质点运动学，是研究质点系或有延展性的物体运动学的基础。

§1　速度　加速度

理论要点

1．参考系　坐标系　计算系统

由于运动的相对性，判定物体静止还是运动及如何运动，必须选定另外的物体作标准。这个被选定的物体或物体群，称为**参考系**。参考系选定后，对物体运动的描述就确定了。

物体的运动可以用向量表示。以向量表达物理规律十分简洁，但为了应用数学的分析表达式并进行具体运算，还必须在参考系中建立坐标系，以便用一组数来表示一个向量，进行数学运算。对运动学来说，参考系的选择是任意的，但对动力学来说则不是所有参考系都是等价的，要区别惯性系和非惯性系。物体的动力学方程式，对于不同的参考系是不同的。

坐标系确定后，加上计时方法，就构成一个计算系统。

2. 速度、加速度及其在各种坐标系中的表达式

（1）位置向量、速度向量和加速度向量

位置向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，它表出了质点位置随时间变化的规律，称为**运动方程**。质点在空间描画的连续曲线，就是位置向量端点的轨迹，称为**轨道**。

速度向量

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1}$$

加速度向量

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.2}$$

（2）笛卡儿坐标系

右手笛卡儿坐标系一组基矢以（$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$）表示。在无转动和加速度的笛卡儿坐标系中，基矢为常量。

$$\boldsymbol{r}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{v}=(\dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3)=\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{x}_1,\ \ddot{x}_2,\ \ddot{x}_3)=\sum_{i=1}^{3}\ddot{x}_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.5}$$

（3）平面极坐标系

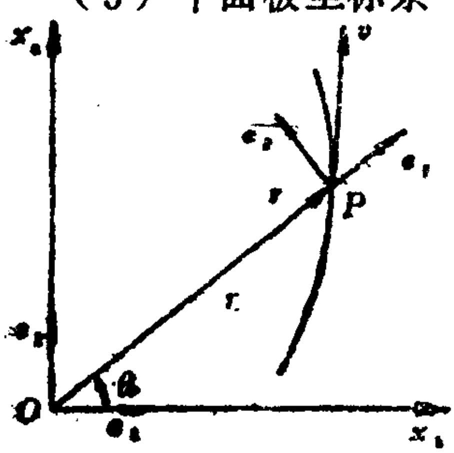

图 1.1

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r=(r,\ 0) \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta=(\dot{r},\ r\dot{\theta}) \tag{1.7}$$

$$v^2=(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2 \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)\boldsymbol{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta\\&=(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\end{aligned} \tag{1.9}$$

（4）圆柱坐标系

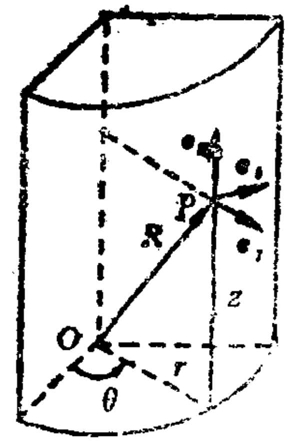

图 1.2

$$\mathbf{R} = r\boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{e}_z = (\dot{r},\ r\dot{\theta},\ \dot{z}) \tag{1.11}$$

$$v^2 = (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2 \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta},\ \ddot{z})^2 \tag{1.13}$$

（5）球极坐标系

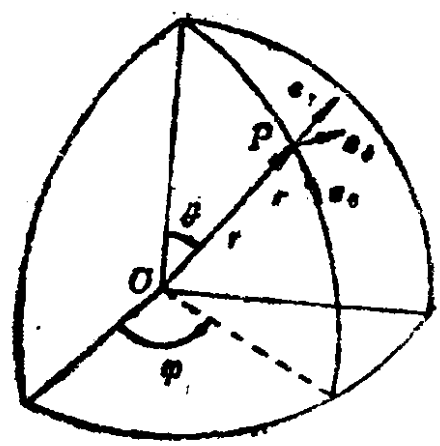

图 1.3

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r = (r,\ 0,\ 0) \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.15}$$

$$v^2 = (\dot{r})^2 + r^2((\dot{\theta})^2 + \sin^2\theta(\dot{\varphi})^2) \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = & [\ddot{r} - r((\dot{\theta})^2 + \sin^2\theta(\dot{\varphi})^2)]\boldsymbol{e}_r \\ & + [2\dot{r}\dot{\theta} + r(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta(\dot{\varphi})^2)]\boldsymbol{e}_\theta \\ & + [2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + r(2\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \\ & + \sin\theta\ddot{\varphi})]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1.17}$$

（6）自然坐标系

右手坐标系正交基矢为（$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$），坐标系原点取为轨道上每瞬间与运动质点重合的点。

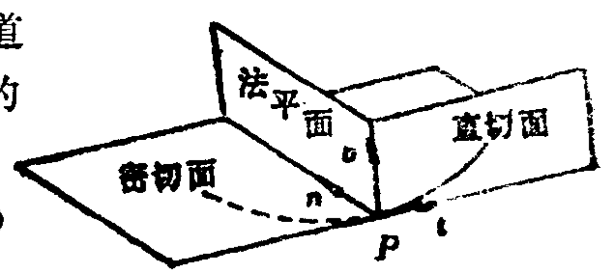

图 1.4

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),\quad s = s(t) \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{s}\boldsymbol{t} = v\boldsymbol{t} = (v,\ 0,\ 0) \tag{1.19}$$

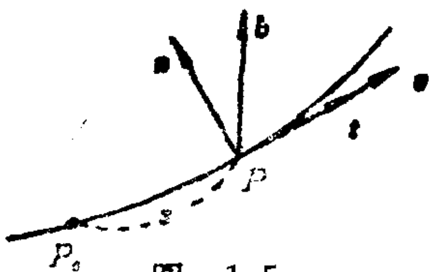

图 1.5

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v\dot{\boldsymbol{t}}$$
$$=\dot{v}\boldsymbol{t}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}+0\boldsymbol{b}$$
$$=\left(\dot{v},\ \frac{v^2}{\rho},\ 0\right) \qquad (1.20)$$

（五种坐标系的讨论，请参阅附录一）

例　　题

1.1 （1）证明 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\theta=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$，其中 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ 是平面极坐标的单位向量。

〔解〕 由图1.6，极坐标基矢和笛卡儿坐标基矢的变换方程为

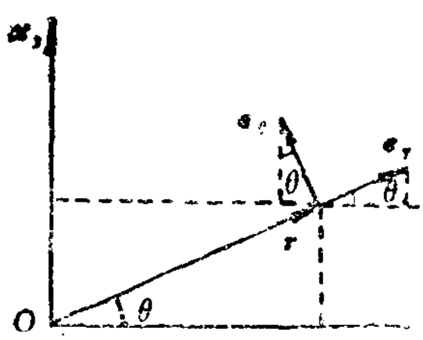

图 1.6

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{e}_\theta=-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r=-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2$$
$$=(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)\dot{\theta}$$
$$=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\theta=-\cos\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2$$
$$=-(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\dot{\theta}$$
$$=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$$

（2）试求圆柱坐标系中元弧长的平方 $(ds)^2$。

〔解一〕 $x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，$x_3=z$

$dx_1=-r\sin\theta d\theta+\cos\theta dr$，$dx_2=r\cos\theta d\theta+\sin\theta dr$

$$dx_3 = dz$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$= (-r\sin\theta d\theta + \cos dr)^2 + (r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr)^2 + (dz)^2$$

$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + dz^2$$

〔解二〕 位置向量$\boldsymbol{R} = r\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + r\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$

$$d\boldsymbol{R} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial r} dr + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial z} dz$$

$$= (\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2)dr + (-r\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + r\cos\theta \boldsymbol{e}_2)d\theta + \boldsymbol{e}_3 dz$$

$$= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 dz$$

$$ds^2 = d\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{R}$$

$$= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 + (dz)^2$$

$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2$$

1.2 证明参量方程为 $x_1 = x_1(s)$，$x_2 = x_2(s)$，$x_3 = x_3(s)$ 的曲线的曲率半径

$$\rho = \left(\sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}\right)^{-1}$$

〔解〕 $\boldsymbol{r} = x_1(s)\boldsymbol{e}_1 + x_2(s)\boldsymbol{e}_2 + x_3(s)\boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{dx_1}{ds}\boldsymbol{e}_1 + \frac{dx_2}{ds}\boldsymbol{e}_2 + \frac{dx_3}{ds}\boldsymbol{e}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d^2x_1}{ds^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{d^2x_2}{ds^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{d^2x_3}{ds^2}\boldsymbol{e}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}$$

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}}$$

1.3 一个质点以速率v(常数)沿曲线$r=k(1+\cos\theta)$运动，求$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_r$，$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_\theta$，$|\ddot{\boldsymbol{r}}|$及$\dot{\theta}$。

〔解〕 由$r=k(1+\cos\theta)$有

$$\dot{r}=-k\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}(\dot{r}^2+r^2(\dot{\theta})^2)&=k^2\sin^2\theta\cdot(\dot{\theta})^2+r^2(\dot{\theta})^2\\&=k^2\sin^2\theta\cdot(\dot{\theta})^2+k^2(\dot{\theta})^2(1+\cos\theta)^2\\&=2k^2(\dot{\theta})^2(1+\cos\theta)\\&=\frac{2k^2(\dot{\theta})^2}{k}r=2kr(\dot{\theta})^2=v^2\end{aligned}$$

$$(\dot{\theta})^2=\frac{v^2}{2kr},\quad \dot{\theta}=\frac{v}{\sqrt{2kr}} \tag{1}$$

对（1）式求导得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=-\frac{\dot{r}v^2}{2kr^2}$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{-k\sin\theta\cdot\dot{\theta}v^2}{4kr^2\dot{\theta}}=\frac{\sin\theta\cdot v^2}{4r^2}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r}&=-k\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2-k\sin\theta\cdot\ddot{\theta}\\&=-k\cos\theta\cdot\frac{v^2}{2kr}-k\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta\cdot v^2}{4r^2}\\&=-(r-k)\frac{v^2}{2kr}-\frac{k[1-(\frac{r-k}{k})^2]v^2}{4r^2}\\&=-\frac{v^2}{4k}\end{aligned}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_r=\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2=-\frac{v^2}{4k}-\frac{v^2}{2k}=-\frac{3v^2}{4k} \tag{2}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$= r\cdot\frac{\sin\theta\cdot v^2}{4r^2} + 2(-k\sin\theta\cdot\dot{\theta})\frac{v}{\sqrt{2kr}}$$

$$= -\frac{3}{4r}v^2\sin\theta$$

$$= -\frac{3}{4}\ \frac{v^2\sin\theta}{k(1+\cos\theta)} \tag{3}$$

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}| = \frac{3v^2}{4k}\sqrt{1+\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2} = \frac{3v^2}{4k}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}} \tag{4}$$

1.4 一半径为 r 的圆轮以等速 v_0 沿直线滚动．求轮缘上一点 A 的运动方程及 A 点的速度和加速度．

〔解〕 设 $t=0$ 时，A点与坐标系 $O\text{-}x_1x_2$ 原点重合．由图1.7可见

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{v_0 t}{r}$$

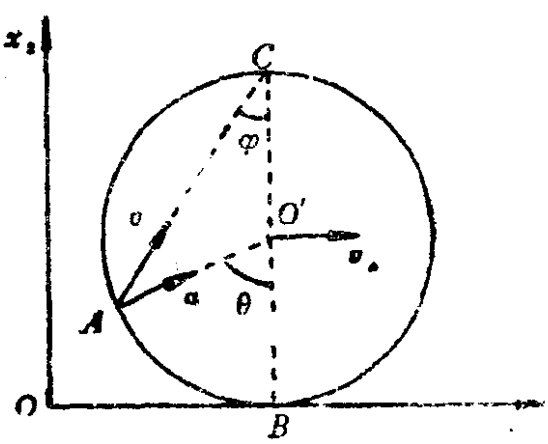

图 1.7

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= s - r\sin\theta \\ &= v_0 t - r\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right) \\ x_2 &= r(1-\cos\theta) \\ &= r\left[1-\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_0\left[1-\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)\right] \\ \dot{x}_2 &= v_0\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$v = ((\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2)^{1/2} = v_0\left[2\left(1-\cos\frac{v_0 t}{r}\right)\right]^{1\ 2}$$

$$= 2v_0\sin\left(\frac{v_0 t}{2r}\right)$$

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{v_0^2}{r}\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right),$$

$$a_2 = \ddot{x}_2 = \frac{v_0^2}{r}\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right) \qquad (3)$$

$$a = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2} = \frac{v_0^2}{r}$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向：

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right)}{1-\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)} = \mathrm{ctg}\frac{v_0 t}{2r}$$

$$= \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} = \mathrm{ctg}\varphi \qquad (4)$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向：

$$\frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \mathrm{ctg}\frac{v_0 t}{r} = \mathrm{ctg}\theta \qquad (5)$$

1.5 小船被水冲走后，由一荡桨人以不变的相对速度 c_2 朝岸上A点划回（图1.8），假定河水流速是 c_1，且沿河宽不变，小船可以看成质点，求船的轨迹。

〔解〕 由图1.8易见

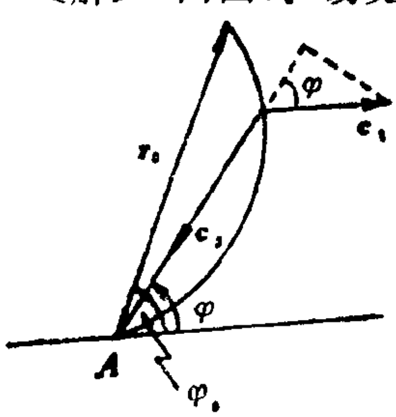

图 1.8

$$\frac{dr}{dt} = -c_2 + c_1\cos\varphi \qquad (1)$$

$$r\frac{d\varphi}{dt} = -c_1\sin\varphi \qquad (2)$$

（1）、（2）相除得

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{c_2}{c_1\sin\varphi} - \mathrm{ctg}\varphi\right)d\varphi$$

$$\ln r = \int\left(\frac{c_2}{c_1}\csc\varphi - \mathrm{ctg}\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{c_2}{c_1}\ln\ \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} - \mathrm{lnsig}\varphi + c$$

令 $\dfrac{c_2}{c_1}=k$，$\alpha=\dfrac{\varphi}{2}$，则

$$\ln r=\ln \mathrm{tg}^k\alpha-\ln\sin 2\alpha+c$$

$$=\ln\frac{\mathrm{tg}^k\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}+c=\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha}{2\cos^{k+1}\alpha}+c$$

设 $t=0$ 时，$r=r_0$，$\alpha=\alpha_0$，则

$$c=\ln r_0-\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha_0}{2\cos^{k+1}\alpha_0}$$

所以

$$\ln r=\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha}{2\cos^{k+1}\alpha}+\ln r_0-\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha_0}{2\cos^{k+1}\alpha_0}$$

$$r=r_0\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha}\ \frac{\cos^{k+1}\alpha_0}{\sin^{k-1}\alpha_0}$$

1.6 点 P 在抛物线上运动，质点到焦点距离为 r，速率为 v(图1.9(a)).将加速度按径向及法向分解成分量 a'_r 及 a'_n，证明：

$$a'_r=v\frac{dv}{dr},\quad a'_n=\sqrt{\frac{a}{2r^3}}\ \frac{d}{dr}(v^2r)$$

抛物线半正焦弦为 $4a$。

〔解〕 将加速度按法向、切向分解，如图1.9(b)所示，有

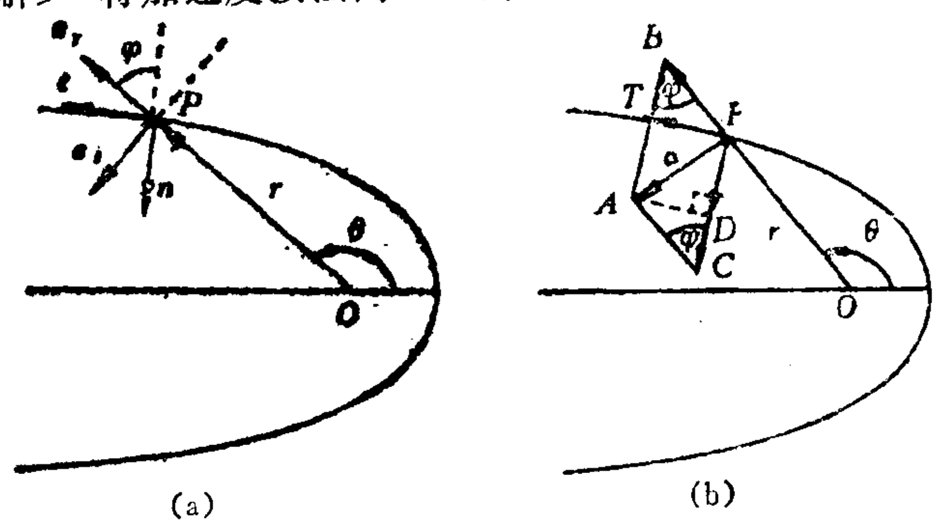

图 1.9

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = PD, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = PT$$

如将加速度按径向、法向分解，则

$$a'_r = PB = \frac{dv}{dt}\csc\varphi$$

$$a'_n = PC = \frac{v^2}{\rho} + \frac{dv}{dt}\text{ctg}\varphi$$

到 $\frac{dr}{ds} = \sin\varphi$，$r\frac{d\theta}{\ } = \cos\varphi$，$\text{ctg}\varphi = r\frac{d\theta}{dr}$，则有

$$\frac{dv}{t} \cdot \frac{ds}{dr} = v\frac{dv}{dr}$$

$$a'_n = \frac{v^2}{\ } + r\frac{dv}{dt}\frac{d\theta}{dr}$$

$$= \frac{v^2}{\rho} \qquad \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dr}$$

$$= \frac{v^2}{\rho} + rv\frac{dv}{dr}\frac{d\theta}{ds}$$

由于

$$ds = \sqrt{(rd\theta)^2 + (dr)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{r^3}{a}}d\theta \qquad \left(\text{其中用到 } r = \frac{4a}{1+\cos\theta}\right)$$

极坐标下的曲率半径

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}} = \sqrt{\frac{4r^3}{a}} = 2\frac{ds}{d\theta}$$