

# 理论力学解题指导

东北农学院力学教研室 叶仲文 乔永芬编

农业出版社

# 理论力学解题指导

东北农学院力学教研室

叶仲文 乔永芬编

农业出版社

## 理论力学解题指导

东北农学院力学教研室

叶仲文 乔永芬编

---

农业出版社出版 (北京朝内大街130号)

新华书店北京发行所发行 农业出版社印刷厂印刷

---

850×1168毫米 32开本 18.375印张 470千字

1983年3月第1版 1983年3月北京第1次印刷

印数 1—15,300册

统一书号 13144·250 定价 2.70元

## 前 言

理论力学既是一门密切结合生产实际，应用较为广泛的技术基础课，又是一门具有较强的系统性和理论性的基础理论课。在机械、动力类各专业中，它是承前启后的重要基础课之一。

学生在学习理论力学时，时常感到理论容易懂，而解题比较困难。为了培养学生更好地掌握分析与解决力学问题的基本方法，故编写此书作为教学或自学参考书。

本书是在 1963 年东北农学院理论力学教研组编的《理论力学解题指导》的基础上，参考全国高等农业院校理论力学教材编写提纲的要求而重编的。

全书分为静力学、运动学、动力学三部分，内容包括：理论概要、解题方法步骤、解题时应注意之点及例题 252 个。

本书例题力求做到，由浅入深，由具体到抽象的过程，以利于自学。书中采用国际单位制。

参加本书绘图工作的有沈惠芬、雷德天、李宏志等同志；描图工作由崔庚铭同志承担。

限于我们的业务水平，书中缺点错误在所难免，诚恳希望同志们批评指正。

编 者

## 本书应用的基本符号

$F, Q, P, G$  等等——力

$X, Y, Z$ ——力在坐标轴  $ox, oy, oz$  上的投影

$R$ ——合力

$M, m$ ——力偶矩

$M_o$ ——平面力系对中心  $O$  的主矩

$M_o$ ——空间力系对中心  $O$  的主矩

$R'$ ——主矢

$N$ ——法向反力

$q$ ——分布载荷

$R_A$ ——支座  $A$  的反力

$X_A, Y_A, Z_A$ ——支座  $A$  的反力在  $ox, oy, oz$  轴上的投影

$x_c, y_c, z_c$ ——重心的坐标

$\varphi$ ——摩擦角

$f$ ——静滑动摩擦系数

$f'$ ——动滑动摩擦系数

$F_{\max}$ ——最大静摩擦力

$\delta$ ——滚动摩擦系数

$M_{\max}$ ——滚动摩擦力偶矩的最大值

$S$ ——面积

$V$ ——体积

$l$ ——曲线长度

$s_i$ ——杆的内力 ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ )

$r$ ——点的矢径

$s$ ——弧坐标

$t$ ——时间

$v$ ——点的速度

$v_x, v_y, v_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ——速度在直角坐标轴上的投影

$a_x, a_y, a_z(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ ——加速度在直角坐标轴上的投影

$v_r, v_\rho$ ——速度在极坐标轴上的投影

$a_r, a_\rho$ ——加速度在极坐标轴上的投影

$a$ ——点的加速度

$a_\tau$ ——切向加速度

$a_n$ ——法向加速度

$\varepsilon$ ——角加速度

$\omega$ ——角速度

$n$ ——每分钟转数

$\rho$ ——曲率半径

$xOyz$ ——静坐标系

$x'O'y'z'$ ——动坐标系

$v_a, a_a, \omega_a$ ——绝对运动的运动学特征量

$v_e, a_e, \omega_e$ ——牵连运动的运动学特征量

$v_r, a_r, \omega_r$ ——相对运动的运动学特征量

$a_k$ ——科氏加速度

$m, M$ ——质点和质点系的质量

$K$ ——质点系的动量

$S$ ——力的冲量

$L_o, L_x$ ——质点系对点  $O$  和轴  $Ox$  的动量矩

$M_o^{(e)}, M_x^{(e)}$ ——外力对轴  $O$  和轴  $x$  的主矩

$J_o, J_x$ ——刚体对轴  $O$  和轴  $x$  的转动惯量

$J_{xy}$ ——离心转动惯量（惯性积）

$\rho_u$ ——回转半径

$A$ ——功

$N$ ——功率  
 $T$ ——质点和质点系的动能  
 $c, K$ ——刚性系数  
 $F^u$ ——惯性力  
 $F_r^u$ ——切向惯性力  
 $F_n^u$ ——法向惯性力（离心力）  
 $M_o^u$ ——惯性力对轴  $o$  的主矩  
 $\delta s_c$ ——虚位移  
 $\delta x, \delta y, \delta z$ ——虚位移在  $ox, oy, oz$  轴上的投影  
 $\delta s_s$ ——静伸长  
 $R$ ——阻力  
 $S(t)$ ——干扰力  
 $k$ ——自然频率（圆频率）  
 $T$ ——周期  
 $\alpha$ ——初位相  
 $A, \varphi$ ——自由振动的振幅  
 $\mu$ ——阻力系数  
 $n$ ——阻尼系数  
 $\delta$ ——对数减缩率  
 $b$ ——强迫振动振幅  
 $p$ ——强迫振动的频率  
 $k$ ——碰撞恢复系数  
 $F_e^u$ ——牵连惯性力  
 $F_k^u$ ——科氏惯性力  
 $Q_j$ ——广义力  
 $q_j$ ——广义坐标  
 $\Pi$ ——势能  
 $L$ ——拉格朗日函数

# 目 录

第一篇 静力学 .....	1
一、静力学研究的问题 .....	1
二、解静力学问题的一般方法与步骤 .....	1
第一章 受力分析基础 .....	2
一、理论概要 .....	2
二、画受力图时应注意之点 .....	2
三、例题 .....	3
第二章 平面汇交力系 .....	12
一、理论概要 .....	12
二、解题时应注意之点 .....	12
三、例题 .....	13
第三章 平面任意力系 .....	28
一、理论概要 .....	28
二、解题时应注意之点 .....	30
三、例题 .....	31
第四章 摩擦 .....	62
一、理论概要 .....	62
二、解题时应注意之点 .....	63
三、例题 .....	63
第五章 空间力系 .....	79
一、理论概要 .....	79
二、解题时应注意之点 .....	80
三、例题 .....	81
第六章 重心 .....	105
一、理论概要 .....	105
二、解题时应注意之点 .....	106



三、例题 .....	107
<b>第二篇 运动学</b> .....	118
一、运动学研究的问题 .....	118
二、解运动学问题的一般方法与步骤 .....	118
<b>第七章 点的运动</b> .....	118
一、理论概要 .....	118
二、解题时应注意之点 .....	121
三、例题 .....	122
<b>第八章 刚体的基本运动</b> .....	148
一、理论概要 .....	148
二、解题时应注意之点 .....	150
三、例题 .....	151
<b>第九章 点的复合运动</b> .....	168
一、理论概要 .....	168
二、解题时应注意之点 .....	169
三、例题 .....	170
<b>第十章 刚体平面运动</b> .....	204
一、理论概要 .....	204
二、解题时应注意之点 .....	206
三、例题 .....	207
<b>第十一章 刚体转动的合成</b> .....	249
一、理论概要 .....	249
二、解题时应注意之点 .....	249
三、例题 .....	251
<b>第三篇 动力学</b> .....	266
一、动力学研究的问题 .....	266
二、解动力学问题的一般方法与步骤 .....	266
<b>第十二章 质点运动微分方程</b> .....	266
一、理论概要 .....	266
二、解题时应注意之点 .....	267
三、例题 .....	269
<b>第十三章 动量定理及质心运动定理</b> .....	283
一、理论概要 .....	283
二、解题时应注意之点 .....	286
三、例题 .....	287

第十四章 动量矩定理	305
一、理论概要	305
二、解题时应注意之点	309
三、例题	310
第十五章 动能定理	347
一、理论概要	347
二、解题时应注意之点	349
三、例题	350
第十六章 达朗伯原理	373
一、理论概要	373
二、解题时应注意之点	374
三、应用达朗伯原理解题步骤	376
四、例题	376
第十七章 虚位移原理及动力学普遍方程式	408
一、理论概要	408
二、解题时应注意之点	409
三、应用虚位移原理解题步骤	411
四、例题	411
第十八章 振动	446
一、理论概要	446
二、解题时应注意之点	450
三、解振动问题的步骤	450
四、例题	451
第十九章 相对运动	472
一、理论概要	472
二、解题时应注意之点	473
三、例题	473
第二十章 碰撞	483
一、理论概要	483
二、解题时应注意之点	485
三、例题	486
第二十一章 综合性动力学问题	502
一、理论概要	502
二、解题时应注意之点	503
三、例题	503
第二十二章 第二类拉格朗日方程	535

一、理论概要 .....	535
二、解题时应注意之点 .....	536
三、应用第二类拉格朗日方程解题步骤 .....	537
四、例题 .....	537
参考文献 .....	574

# 第一篇 静力学

## 一、静力学研究的问题

静力学研究的基本内容可概括为以下两大类。

1. 力系的简化：用一最简单的等效力系来代替已知力系。以便看出力系的作用效果。

2. 力系的平衡：根据力系简化的结果，来确定力系平衡的条件。通过作用在平衡物体上的已知力，并应用平衡条件来求出未知力。主要是求约束反作用力。

## 二、解静力学问题的一般方法与步骤

1. 弄清题意，明确已知与未知条件。

2. 按题意选定研究对象——某一个平衡的物体（或物体系）。同时要分析作用在研究对象上的力，包括已知力与要解出的未知力。

3. 解除约束，画受力图（自由体图或分离体图）。解除研究对象所受到的约束，代之以约束反力。要注意受力图上别忘了画主动力（如重力等）。

4. 应用平衡条件求解未知力。

（1）用图解法时，选择一个适当的比例尺，应用力多边形封闭的理论，从已知力到未知力准确作图。按所选的比例尺量出未知力的大小，并由已知力的方向来逐个确定未知力的方向。

（2）用分析法时，选择一个适当的坐标系，仔细地列出平衡方程式，先解出文字结果，然后代入已知数值解出数字结果。

5. 讨论或校核所得的结果。

# 第一章 受力分析基础

## 一、理论概要

1. 二力平衡定理。刚体在二力作用下平衡的必要和充分条件是：这二力大小相等，方向相反，且作用在同一直线上。

2. 三力平衡定理。位于同平面内、互不平行的三个力平衡时，其作用线必汇交于一点。

3. 作用与反作用定律：两物体间相互作用的力，总是大小相等，方向相反，作用在同一直线上。

### 4. 几种常见的约束类型

(1) 软绳（柔索）：包括皮带、链条、电线、钢丝绳等各种绳索。软绳只能受拉力，不能受压力。故软绳约束反力的方向沿软绳而背离物体。

(2) 光滑面支承（包括平面与曲面）：它的约束反力沿支承面在接触处的公法线。

(3) 光滑铰链：约束反力通过铰链中心，在垂直于铰链轴线的平面内，方向一般不能预先确定，通常用它的两个互相垂直的分力来表示。

## 二、画受力图时应注意之点

1. 必须明确研究对象是哪个物体（或物体系）。

2. 受力图上只画别的物体对所选的研究对象的作用力，而不画研究对象对其他物体的作用力，也不画研究对象内部、各部分之间的相互作用力。

3. 物体的重力（地球对物体的作用力），画在物体的重心上。

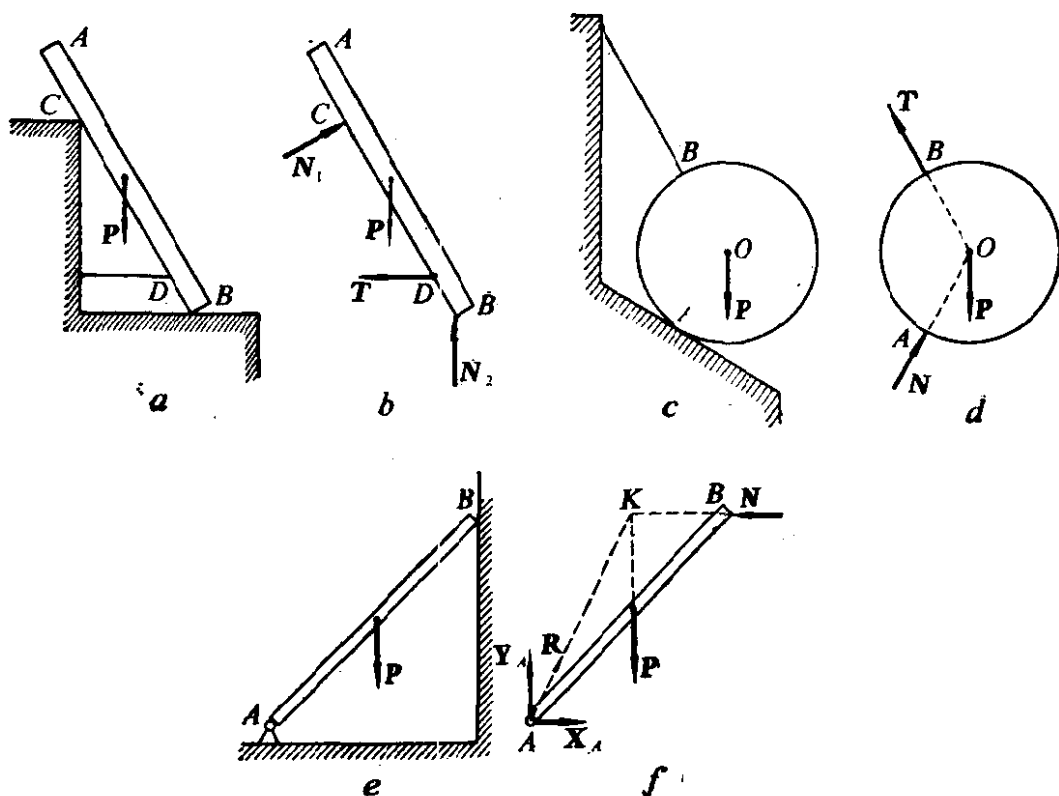
4. 解除研究对象所受的约束，画受力图时，凡是解除了约束的

地方，都要画上约束反力。约束反力的方向要按不同的约束类型来确定，不能主观臆断，每画一个力都要做到有根有据。

### 三、例题

1—1. 分析下面各物体所受的约束反力。假定所有接触面都是光滑的；其中没有画上重力矢的物体都不考虑其重量。

(1)  $AB$ 杆在图1—1a所示位置处于平衡。试画出其受力图。



题 1—1 图

**解：** $AB$ 杆所受的约束是软绳、棱对面与面对棱的约束。软绳 ( $D$ 处) 约束反力 $T$ 沿绳子，背离物体  $AB$ 。棱对面的约束 ( $C$ 处) 与面对棱的约束 ( $B$ 处) 其约束反力  $N_1 N_2$  都是通过接触点、垂直于平面且指向物体。如图 1—1b。

(2) 球在图 1—1c 位置处于平衡，试画出其受力图。

**解：**圆球所受的约束是软绳与固定面。软绳的约束反力  $T$ ，自

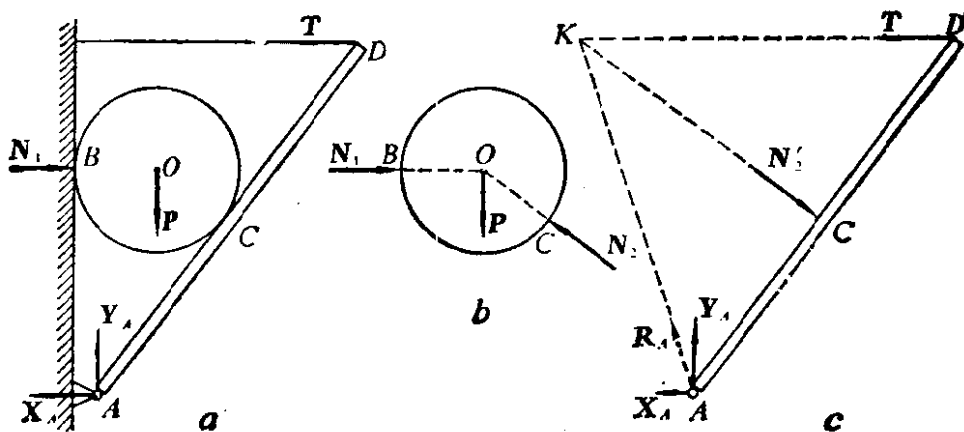
$B$  点沿软绳且背离圆球。固定面对圆球的约束反力  $N$ ，通过接触点  $A$  垂直于固定面（也通过球心）即约束反力  $N$  沿  $AO$  方向指向圆球。如图 1—1d。

(3) 在图 1—1e 中所示梯子  $AB$  重量为  $P$ ， $A$  端用固定铰链连接于地面， $B$  端搁在墙上。试画出它的受力图。

解：梯子  $AB$  所受的约束是固定面（墙）与固铰  $A$ 。面对棱的约束反力  $N$ ，通过  $B$  点垂直于墙。固定铰链的约束反力通过铰链  $A$ ，反力作用线垂直于铰链的轴线，但其方位与指向不定（视其他外力而定），故一般可假设为互相垂直的两个反力。如图 1—1f 中表示的  $X_A$  与  $Y_A$ 。

本题中由于物体只受 ( $P, N, R$ ) 三个力的作用，且其中  $P, N$  二力共面不平行。故可应用三力平衡定理来确定固铰  $A$  的约束反力，因为  $N, P$  二力作用线交于  $K$  点，所以铰链  $A$  的反力必沿  $AK$ 。如图 1—1f 中之  $R$  力（用虚线表示）。

1—2. 板  $AD$  与圆柱  $O$  在图示位置处于平衡，圆柱重为  $P$ ，板重不计，所有接触处都是光滑的。试画出整个系统与其中每个物体的受力图。



题 1--2 图

解：1. 以板与圆柱为对象，这是由二个物体组成的系统。解除这个系统所受的约束，画这个系统的受力图如图 1—2a。在这个系

统中有重力  $P$  (主动力), 面对圆柱的约束反力  $N_1$ , 固铰对板  $AD$  的约束反力  $X_A, Y_A$ , 绳子对板  $AD$  的约束反力  $T$ 。

2. 以圆柱为对象, 其受力图如图 1—2b。除重力  $P$  外,  $N_1$  为墙对圆柱的约束反力,  $N_2$  为板  $AD$  对圆柱的约束反力。 $N_2$  在以圆柱与板这个系统为对象时, 是内力, 未暴露出来, 所以不应画出, 但以单个物体为对象时, 已经暴露出来, 成为外力了, 所以必须画上。

3. 以板  $AD$  为研究对象, 固铰  $A$  的约束反力为  $X_A, Y_A$ ,  $D$  端软绳的约束反力为  $T$ ,  $N_2'$  为圆柱对板  $AD$  的约束反力。 $N_2' = -N_2$ , 是圆柱与板两个物体之间的作用与反作用力。

讨论: 1. 固铰  $A$  的反力也可应用三力平衡定理来确定。如图 1—2c 中, 由于  $T$  与  $N_2'$  交于  $K$ , 所以  $R_A$  也必然通过  $K$  点, 如图中虚线所示。

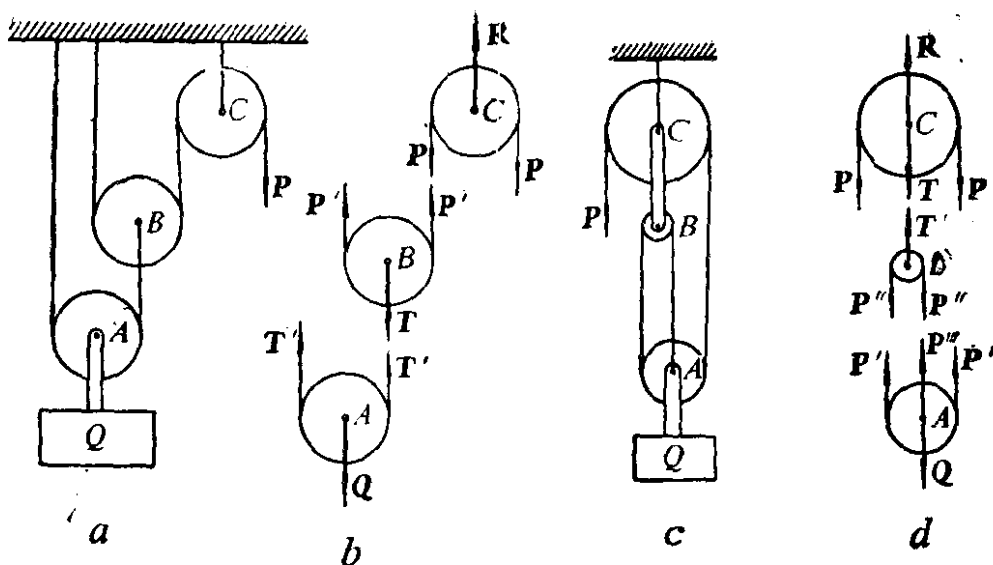
2. 在  $b, c$  两图中  $c$  点处的  $N_2$  与  $N_2'$ , 是圆柱与板两物体间的作用与反作用力。以整个系统为对象时, 在受力图中不出现。因为这两个力对系统来说是内力, 成对存在, 互相抵消。但在以系统中的某一个物体为对象时, 系统的内力转变为作用在系统中某一个物体上的外力了, 因此, 必须在受力图中画出。但是, 有一点必须注意: 由系统的内力转变成的两个外力  $N_2$  与  $N_2'$ , 仍然存在着  $N_2 = -N_2'$  的关系。即大小相等, 方向相反, 分别作用在两个物体上。

1—3. 试画出下列两组滑轮系统中每个滑轮的受力图。

解: 1. 左边一组滑轮系统中的每一个滑轮, 都是用软绳联接的。它们的受力图如图 1—3b。这个系统是由两个动滑轮与一个定滑轮组成。

2. 右边一组滑轮系统是由一个动滑轮与两个定滑轮组成, 两个定滑轮之间用二力杆连接, 其余都是用软绳联系着。各滑轮的受力图如图 1—3d。

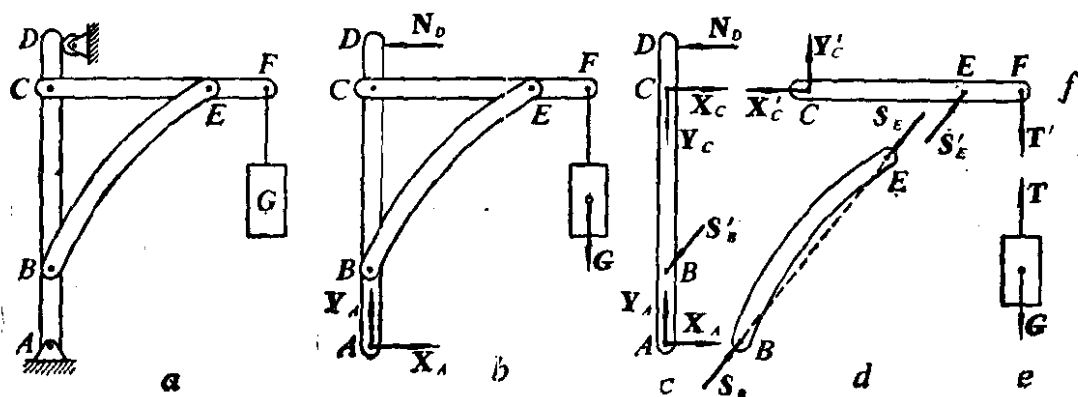




题 1—3 图

1—4. 图 1—4a 是一构架,  $A$  为固铰,  $D$  处有一滑轮支持, 在  $F$  处挂一重物  $G$ 。试画出整体与各杆的受力图。

解: 1. 整个构架为对象, 受力图中有重力  $G$ , 滑轮  $D$  对构架的约束反力  $N_D$ , 固铰  $A$  的反力  $X_A$  与  $Y_A$ 。如图 1—4a。



题 1—4 图

2. 杆  $BE$  为对象, 由于它仅受两个力作用, 在二力作用下处于平衡, 因此, 应用二力平衡定理, 即可确定二力的作用线沿  $B$ 、 $E$  两点的连线。至于二力的指向, 可通过分析它是受压力还是受张力 (拉力) 来确定, 显然, 此构架中的  $BE$  杆是受压力的, 故  $S_B$  与  $S_E$  的指向如图 1—4d,  $BE$  杆常被称为“二力杆”。由此可见, 二力杆中力的作用线与杆的形状 (直杆还是弯杆) 无关, 仅与二力作用点有关, 沿二力作用点的连线。