徐秉业 主编

塑性力学教学研究和学习指导

SXLX

清华大学出版社

塑性力学

教学研究和学习指导

徐秉业　主编

清华大学出版社

（京）新登字 158 号

内容简介

本书为论文选集，每篇论文原则上涉及一方面的内容。全书共分四个部分。第一部分主要讨论塑性力学中的重要概念，特别是对这一学科领域中容易混淆的概念。第二部分分析塑性力学中的物理关系，这是塑性力学中的核心内容，但在初学时，往往不容易建立起巩固的概念，因此是塑性力学中的一个难点，书中从不同角度对这一问题的讲解和学习进行了阐述。第三部分研究了塑性力学中求解边值问题的方法，特别是界限法和滑移线法都是比较成功的方法，文章作者对这些内容作了深入的探讨，这一部分内容对初学者将会带来启迪。第四部分则介绍了塑性力学发展现状和趋势以及讲授这门课程的经验、体会和具体作法。

本书可供力学、机械、土木、航空、水利等专业的大学生和研究生作为学习参考书，也可供这些专业的教师或工程技术人员掌握学习这一学科领域有关知识的参考。

塑性力学教学研究和学习指导
徐秉业　主编
☆
清华大学出版社出版
北京　清华园
北京顺义振华印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
☆
开本：787×1092 1/32　印张：7　字数：155 千字
1993 年 9 月第 1 版　1993 年 9 月第 1 次印刷
印数：0001—3000
ISBN 7-302-01241-5/O·135
定价：7.50 元

前　　言

塑性力学教学近年来在我国有了很大的发展。它不仅对力学专业是一门必修课，而且对土木、水利、机械和航空等专业都已被确定为本科生和研究生的必修或选修课程。目前在我国已先后出版了数十本与塑性力学有关的教材和专著，它们都有各自的特点和可取之处。由中国力学学会塑性力学专业组主办并由同济大学承办的全国第一次塑性力学教学经验交流会议于 1991 年 10 月 31 日至 11 月 2 日在上海召开。参加这次会议的代表都是在塑性力学教学第一线的教师和塑性力学教材的作者，他们有多年从事塑性力学教学的丰富经验，对这门课的教和学的规律有深刻的体会，因此会议开得十分活跃，非常热烈，对问题看法和理解也比较深入，在许多问题上都有不少独到的见解。讨论内容涉及塑性力学的基本概念、问题解法及塑性力学发展趋势。为了更好地促进塑性力学教学工作，提高教学质量、指导塑性力学的学习并扩大这次会议讨论成果的影响，我们在宣读论文中选择了 31 篇文章经过改写正式出版了这本"塑性力学教学研究和学习指导"。根据论文内容，将论文分类，分别安排在四个部分中

本书的出版得到中国力学学会教育工作委员会和清华大学出版社以及论文作者的充分合作。对于他们的努力，我们谨表示诚挚的谢意。我们期望这本小册子能在塑性力学教学中起到良好的作用，也诚恳地希望得到广大读者的批评指正。

《塑性力学教学研究和学习指导》编辑委员会

1992 年 4 月于北京

《塑性力学教学研究和学习指导》编辑委员会名单

主　编：徐秉业

副主编：黄筑平、林钟祥

编　委：（以姓氏笔划为序）
严宗达、杨　卫、林治平、林钟祥、
金永杰、俞茂铉、夏志皋、徐秉业、
诸德培、黄文彬、黄筑平、穆霞英

秘　书：宋　军

目　　录

第一部分　基本概念

第二部分　屈服条件与本构关系

第三部分　界限定理·滑移线场与安定分析

第四部分　塑性力学的现代发展和教学研究

第一部分　基本概念

给学生以正确的概念和方法
——塑性力学教学十年来的心得体会

黄筑平
（北京大学力学系）

在北大，塑性力学是作为高年级学生的选修课而开设的。在多年的教学中，我们除遵循由浅入深、分散难点、循序渐进的原则外，还始终突出和强调了基本概念提法的准确性和理论体系的严密性。不仅澄清了当前塑性力学书籍中所出现的许多含混概念和错误提法，而且还尽可能地把塑性力学的近代研究成果熔汇到教材中去。从而使学生能对塑性力学中的基本概念、特点以及处理问题的方法有较全面的了解和掌握，并使他们对塑性力学中基本问题和某些典型问题的求解技巧有更为透彻的认识。所有这些，已基本上在文献[1]中得到了反映。下面将具体地对此进行说明。

一、遵循由浅入深，循序渐进的原则

塑性力学的基本概念和处理问题的特点首先是通过前两

章对简单问题的分析入手的。学生只需具有材料力学的基础，就能很好地掌握这些内容。例如，通过第一章中对简单桁架的讨论，可对塑性力学中的以下概念和特点有一个全面的理解：① 约束塑性变形的概念；② 弹塑性问题的解对加载路径的依赖性；③ 强化效应对解的影响；④ 几何非线性效应对解的影响；⑤ 残余应力和残余应变的概念以及它们与塑性变形的关系；⑥ 结构物的弹性极限曲线（面）及其与残余应力状态的关系；⑦ 结构物的塑性极限曲线（面）及其基本性质；⑧ 结构的安定分析等等。在《塑性力学引论》（修订版）[1]中，关于三维弹塑性体的静力安定定理和机动安定定理的严格证明是在第七章中给出的。但是，如果学时较少而不能讲授这部分内容时，通过对简单桁架的安定分析，仍然可以使学生对结构的安定性问题有一个较为系统的认识。

二、强调基本概念提法的准确性

将塑性力学中的基本概念和方法正确地介绍给初学者是塑性力学教学中基本要求之一。为了做到这一点，就必须对这些概念进行认真的推敲，纠正目前书籍中所出现的错误和含混之处，并给出相应的正确结果。这里仅举几个例子：① 强调了稳定材料假设、Drucker 公设和 Il'yushin 公设等关于材料性质假设的区别和联系，以及上述这些假设与建立塑性本构方程之间的关系。

实际上，材料的稳定性假设和 Drucker 公设是两个不同的概念。在图 1 所示的应力-应变曲线中，(a) 中的实线和虚线分别对应于应力-应变曲线的稳定阶段和不稳定阶段，而 Drucker 公设则表示了“在应力闭循环中的余功非正”这一材

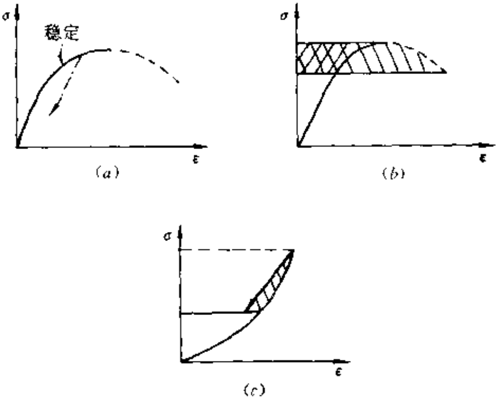

图 1

料性质(见(b))。以上这两个性质之间并无必然联系。例如(c)中所设想的材料虽然是稳定的，但并不满足 Drucker 公设。② 纠正了目前许多教材中关于 Tresca 屈服条件不变量表示的错误。如设 $\tau_i(i=1,2,3)$ 为主应力，则在主应力空间 (τ_1,τ_2,τ_3) 中，Tresca 屈服条件可用

$$\left|\frac{\tau_1-\tau_2}{2}\right|\leqslant K,\quad \left|\frac{\tau_2-\tau_3}{2}\right|\leqslant K,\quad \left|\frac{\tau_3-\tau_1}{2}\right|\leqslant K \qquad (1)$$

来表示，上式中 K 为材料常数。在 π 平面上，由(1)式所表示的区域的边界是一个正六边形(见图 2)。在一些书籍(如文献[2]、[3])中，该屈服条件的不变量表示是通过

$$[(\tau_1-\tau_2)^2-4K^2][(\tau_2-\tau_3)^2-4K^2] \times[(\tau_3-\tau_1)^2-4K^2]=0 \qquad (2)$$

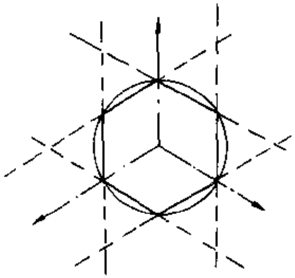

图 2

来求得的。用不变量表示时，(2)式可写为

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36K^2J_2^2 + 96K^4J_2 - 64K^6 = 0 \qquad (3)$$

上式中 J_2 和 J_3 分别为应力偏量的第二和第三不变量。在 π 平面上，(2)式或(3)式所表示的实际上是可以无限伸展的三对平行线。它们除包含 Tresca 屈服条件（正六边形）的六条边外，还包含那些用虚线表示的半直线。显然，这些虚线上的点并不在 Tresca 屈服面上。因此，(2)式和(3)式是不恰当的。不加说明地引入这种表达式对学生正确建立屈服面的概念将是不合适的。

事实上，如在 π 平面上定义极坐标(r,θ)，则当应力值给定后，r 和 θ 值可分别写为：

$$r = \sqrt{2J_2},\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3}{\sqrt{3}(\tau_1 - \tau_3)}\right] = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}} \qquad (4)$$

式中 μ_σ 为 Lode 参数。若设 $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \tau_3$，便有

$$S_1 - S_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} r \left[\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \sqrt{2}\, r\cos\theta = 2K, \tag{5}$$

其中 $S_i (i = 1,2,3)$ 为偏主应力。另外,注意到

$$J_3 = S_1 S_2 S_3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} r^3 \sin 3\theta$$

或

$$\theta = -\frac{1}{3}\sin^{-1}\left[\frac{3\sqrt{3}J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right]$$

$\left(\theta \text{ 取值范围从} -\frac{\pi}{6} \text{到} \frac{\pi}{6}\right)$,则 Tresca 屈服条件的不变量表示可写为

$$\sqrt{J_2}\cos\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2^3}}\right)\right] - K = 0 \tag{6}$$

③ 理想刚塑性平面应变问题中关于特征线(滑移线)上的速度关系式(即 Geiringer 方程)是经典塑性理论中的一个基本关系式。如果以 S_α 和 S_β 分别表示沿 α 和 β 滑移线的弧长,θ 为 α 滑移线切向与 x 坐标轴的夹角,v_α 和 v_β 分别表示速度向量沿 α 和 β 滑移线的两个切向分量,则 Geiringer 方程可写为:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial S_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} = 0, \frac{\partial v_\beta}{\partial S_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} = 0 \tag{7}$$

(7)式的几何解释是:沿滑移线的伸长率为零。然而某些塑性力学教科书是以"沿滑移线的伸长率为零"作为出发点来导出(7)式的。把(7)式的几何解释作为前提,而把(7)式本身作为结果,这在逻辑上是不恰当的。尤其需要指出的是,在某些书籍(如[4])中,把"沿滑移线的伸长率为零"的关系式先写为:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial S_\alpha}=0,\quad \frac{\partial v_\beta}{\partial S_\beta}=0 \tag{8}$$

然后再导出(7)式。不难看出，在以上推导中，前提和结论的表达式之间显然是自相矛盾的。

三、强调了理论体系的严密性

强调了理论体系的严密性，把经典塑性力学与现代塑性理论有机地结合起来。例如，从内变量框架出发，在应力空间和应变空间这两个对偶的空间中系统建立塑性本构理论，并指出这些结果与经典塑性本构方程之间的关系；强调在应变空间中给出加卸载准则的合理性；用极值路径的观点来讨论全量理论的适用范围，并导出全量理论中的最小势能原理和最小余能原理……等等。

四、力图对典型算例进行全面、完整的剖析

为了使学生在具体问题的求解过程中更好地掌握塑性力学的特点和方法，而不只是为了解题而解题，就需要对典型问题进行全面的剖析。例如：① 在厚壁筒的弹塑性分析中，除了对应力、应变、位移分布等进行计算之外，还特别强调了采用 Tresca 屈服条件时所必须进行的中间主应力的校核。此外，还对卸载后的残余应力分布、安定问题、强化效应、几何非线性效应等一系列问题进行了讨论。从而使学生对厚壁筒问题的求解有一个全面的认识。② 在理想刚塑性平面应变问题的算例中，除按通常方式进行求解外，还特别强调了塑性区中速度场的不唯一性；除对塑性区的求解过程进行详细讨论外，还特别强调了对刚性区进行校核的必要性，给出了相应的

算例，而这在一般引论性的教材中往往是被忽略的。

五、强调力学与数学的结合

强调力学与数学的结合，赋予数学表达式以更深刻的力学内涵。例如，在讨论柱体扭转问题时，指出了该问题在数学上可归结为变分不等式问题，故可从数学角度对其作更深入的研究。在介绍滑移线理论中关于速度场的特征线关系时，从力学角度进行分析不仅可得到 Geiringer 方程，而且还可得到一般书籍中所没有的用来校核速度场的“功不等式”：

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial v_\alpha}{\partial S_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial S_\alpha}+v_\alpha\frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha}-v_\beta\frac{\partial \theta}{\partial S_\beta}\right|\geqslant 0 \qquad (9)$$

从而使这些表达式具有更为鲜明的力学意义。

参 考 文 献

[1] 王仁，黄文彬，黄筑平. 塑性力学引论（修订版）. 北京大学出版社，1992年1月

[2] Martin JB. Plasticity: Fundamentals and General Results. MIT Press, 1975. 316

[3] Lubliner J. Plasticity Theory. Macmillan Publishing Company, 1990. 128

[4] Kachanov LM. Foundation of the Theory of Plasticity (Second Edition). North Holland Publication Company Amstertam-London, 1971. 180

中译本：卡恰诺夫，周承倜译. 塑性力学基础（第二版）. 人民教育出版社，1982年，第180页

警惕误用弹性力学概念或规律于塑性力学

诸德培

（西北工业大学）

一、引言

在研究生教学及平时审稿过程中，作者发现有不少学生、甚至有些非塑性力学课程的教师在学过大学的塑性力学之后仍然未能区别塑性力学与弹性力学某些基本概念和规律的不同，以致在求解弹塑性问题中误用了只适用于弹性力学的概念或规律。下面举两个常见的例子：

① 只记得理想塑性材料的泊松比为0.5，而不加区别地套用了弹性材料泊松比的关系式；

② 把比例加载误作为应力间比值不变的"简单加载"，误用全量理论。

这两个例子都是属于最简单的基本概念，不得不使人警惕到教学中的疏忽。本文介绍几个例子，可供参考或可放入教学内容，使学生产生深刻的印象，避免犯同类错误。

二、关于泊松比问题的说明及例子

众所周知，泊松比是弹性力学中一个有明确定义的量，它（本文中以 ν 表示）出现在应力（以 σ 表示）应变（以 ε 表示）关

系式中：

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E$$

式中 x、y、z 为坐标，可以轮转替换。泊松比是材料特性常数，与应力状态、坐标取向无关（指各向同性材料）。它的简单物理意义是在单向拉伸情况下的横向收缩比[1，34 页]。

在塑性力学的全量理论，或称为塑性形变理论中，把单调加载状态下的应力应变关系与非线性弹性力学关系等同起来[3，§98]，这时用减折弹性系数 E' 代替 E，并取泊松比为 0.5。这种关系，只在"简单加载"的理想情况下是成立的[2，§4.6]，在一定的实际条件下只能近似满足，而对于一般情况，可能导致不能容许的错误。

现代塑性力学中常以塑性流动理论为基础，加载状态时塑性应变增量与应力增量之间存在与弹性力学公式完全不同的本构关系。对于 Mises 等向强化模型为[2，196 页，(44)式]：

$$d\varepsilon_{ij}^p = (3/(2\psi'))(d\bar{\sigma}/\bar{\sigma})S_{ij}$$

显然，在这一基本关系式中不存在泊松比的项。

对于单向（以脚标 1 表示）拉伸情况，偏应力

$$S_{11} = (2/3)\sigma_{11}, \quad S_{22} = S_{33} = -(1/3)\sigma_{11}$$

故

$$d\varepsilon_{22}^p/d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon_{33}^p/d\varepsilon_{11}^p = -0.5$$

也就是说，此时塑性应变增量的横向分量与纵向分量的比值为 −0.5，有时也把它的绝对值称为"塑性泊松比"。对于复杂受力情况，因为塑性变形时体积不变，即

$$d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{22}^p + d\varepsilon_{33}^p = 0$$

所以任一法向的塑性应变增量总可以写成一个分量