WEIJIFEN JIANMING DUBEN

田守拙 黄宗成 编著

微积分简明读本

科学技术文献出版社

微积分简明读本

田守拙 黄宗成 编著

科学技术文献出版社

1983

内 容 简 介

本书根据中学数学教学大纲的要求系统而简明地介绍了一元微积分的知识，讲述细腻、通俗，推理较严谨．配有一定数量不同类型的例题以加深对所述问题的理解，并有助于提高分析问题和解决问题的能力．

本书可作为高中学生以及具有高中一年级文化水平的青年工人和知识青年的自学课本，也可作为教师的教学参考书．

微 积 分 简 明 读 本

田守拙　黄宗成　编著

科学技术文献出版社出版

重庆印制第一厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：787×1092　1/32　印张：10　字数：210千字

1983年1月北京第一版第一次印刷

印数：1—17605册

科技新书目：38—64

统一书号：13176·157　　定价：1.25元

前　言

微积分是数学的一个分支，它是研究函数的导数、微分、不定积分、定积分的性质和应用的一门学科。早在十六、十七世纪，由于航海、天文学、力学等发展的需要，在研究运动规律的过程中产生了极限、导数、微分、积分等的初步概念。到十七世纪中叶，牛顿和莱布尼茨在总结前人经验的基础上，分别在研究力学和几何学的过程中，建立了导数、微分、不定积分、定积分的概念和运算法则，明确了求导数与求不定积分是互逆的运算，初步形成了这门学科。随着科学不断地前进，微积分做为一门学科更加完善了。今天它已成为现代科学与技术以及自然科学的各个分支中广泛应用的最基本的数学工具之一。例如，各种复杂图形的研究，弹道、人造卫星轨道的计算，运动状态的研究，化学反映过程的分析，物理探矿，气象预报以及生物，医学，农业科学等方面都要用到微积分。

正因为这样，目前世界上所有先进的国家都已把一元微积分的知识作为普通的基础知识放在中等学校学习。八十年代起，我国也把这部分内容列入中学数学教学大纲之中，作为中学阶段必学的内容。

为了帮助中学生以及具有高中一年级文化水平的青年工人和知识青年，更好地学习、理解和掌握一元微积分的知识，我们编写了这本《微积分简明读本》。

在编写的过程中，我们力求使本书有以下特点：1.由浅入深，通俗易懂，便于读者接受；2.以中学数学教学大纲为

基础，但也不过分受它的限制。凡是比较重要的而读者又完全可以接受的内容，可略超大纲；3.尽量保持完整的系统性和严密的科学性。确实难以接受的定理，采取略去证明而予以承认的办法来处理；4.要比一般课本详细。如讲解细致一些；多配一些不同类型的例题来说明问题；凡是容易混淆的问题都提出“注意”事项，予以提醒或纠正；每节之后配练习题，每章配习题以加强练习，并在本书的最后给出答案，以便于读者自行核对。

本书也可作为教师的教学参考书使用。

限于我们的水平，书中难免有些不妥之处，欢迎读者批评指正。

目　录

第一章 预备知识

数学是随着生产技术的不断提高而逐步发展起来的，它是一门系统性很强的学科，因此为了使读者学好微积分，现将常用的初等数学（代数、几何、三角、解析几何）中有关的概念和公式，特别是函数的内容，作为预备知识加以简要介绍。

1. 实数 本书是在实数范围内研究问题的。实数的范围如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正、负整数}\\ \text{正、负分数(有限小数和无限循环小数)}\\ \text{零}\end{cases}\\ \\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}$$

2. 二次方程$ax^2+bx+c=0$的求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

根的判别式$\varDelta=b^2-4ac$，

$$\left.\begin{matrix}\varDelta>0\\ \varDelta=0\\ \varDelta<0\end{matrix}\right\}\Longleftrightarrow\begin{cases}\text{有两个不相等的实数根；}\\ \text{有两个相等的实数根；}\\ \text{没有实数根（或说有两个虚数根）。}\end{cases}$$

3. 指数的概念和运算法则

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n个a}$（$n$为自然数）；

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\qquad(a\neq0);$$

$a^0=1 \qquad (a\neq 0)$；

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (a\geqslant 0)$；

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad (a\neq 0)$；

$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$；

$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$；

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n} \qquad (b\neq 0)$。

4．对数的概念和运算法则

如果$a^y=x$，那么$y=\log_a x \qquad (a>0，a\neq 1，x>0)$。

$a^{\log_a b}=b$；$\log_a a^x=x$；$\log_a 1=0$；$\log_a a=1$。

$\log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B$；

$\log_a\dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$；

$\log_a A^\alpha=\alpha\log_a A$。

以10为底的对数叫做常用对数，以符号lg表示；以e为底的对数叫做自然对数，以符号ln表示（$e=2.71828\cdots\cdots$）。

对数换底公式：

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a};$$

$$\ln x=\frac{\lg x}{\lg e}.$$

5．二项式展开公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots\cdots+b^n.$$

6. 有关圆的公式

如图1.1所示，

圆面积　$S=\pi R^2$，

圆周长　$l=2\pi R$，

圆扇形面积　$S=\frac{1}{2}R\,\widehat{AB}=\frac{1}{2}R^2\theta$

（θ是圆心角，以弧度计算）.

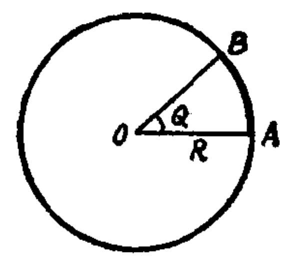

图 1.1

7. 弧度与度的换算

$180°=\pi$ 弧度，$1°=\frac{\pi}{180}$弧度$=0.01745\cdots$弧度，

1 弧 度$=\frac{180}{\pi}$度$=57°17'45''=57.296\cdots$度。

8. 三角公式

在直角三角形ABC中（如图1.2），

$$\sin\alpha=\frac{对边}{斜边}=\frac{BC}{AB};$$

$$\cos\alpha=\frac{邻边}{斜边}=\frac{AC}{AB};$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{对边}{邻边}=\frac{BC}{AC};$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{邻边}{对边}=\frac{AC}{BC};$$

$$\sec\alpha=\frac{斜边}{邻边}=\frac{AB}{AC};$$

$$\csc\alpha=\frac{斜边}{对边}=\frac{AB}{BC}.$$

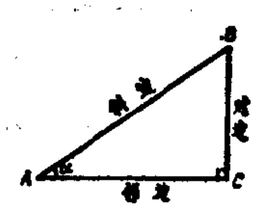

图 1.2

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

特殊角的三角函数值

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

和角公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

二倍角公式：

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

乘积与和差互化公式：

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta);$$

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta);$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta);$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta);$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

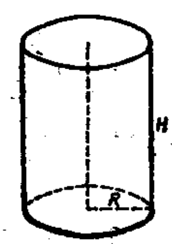

图 1.3

9. 圆柱、圆锥、球的公式

设圆柱的底半径为R，高为H（如图1.3），

则　侧面积$=2\pi RH$；

全面积$=2\pi R(R+H)$；

体积$=\pi R^2H$。

设圆锥的底半径为R，高为H，侧高（母线）为L（如

图1.4），则

侧高 $L=\sqrt{R^2+H^2}$；

侧面积 $=\pi RL$；

全面积 $=\pi R(L+R)$；

体积 $=\dfrac{1}{3}\pi R^2H.$

设球半径为R，直径为D，则

表面积 $=4\pi R^2=\pi D^2$；

体积 $=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{1}{6}\pi D^3$.

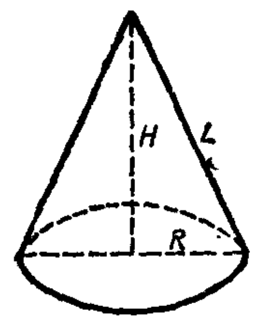

图 1.4

10． 两点距离公式和曲线的标准方程

设在直角坐标系中有点（x_1, y_1）和点（x_2, y_2），则两点距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

直线方程的一般形式为$Ax+By+C=0$，如果直线与x轴夹角为α，那么直线的斜率为

$$k=\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{A}{B}.$$

直线方程的斜截式为$y=kx+b$，其中k为斜率，b为直线在y轴上的截距。

直线方程的两点式为$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（其中（$x_1$，$y_1$）和（$x_2, y_2$）为直线通过的两定点）。

两直线平行，斜率相等；两直线垂直，斜率互为负倒数。

以原点为圆心，R 为半径的圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2.$$

以点(x_0, y_0)为圆心，以R 为半径的圆（如图 1.5）的方

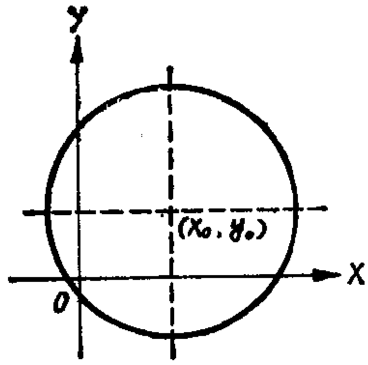

图 1.5

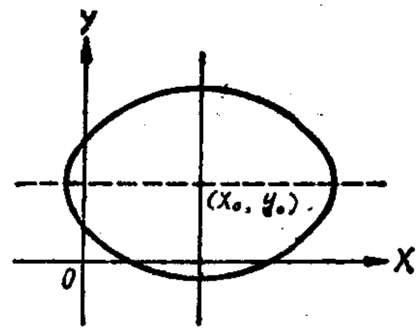

图 1.6

程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

中心在原点，焦点坐标为$(\pm c,0)$的椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中$2a$与$2b$分别为长、短轴，而$c^2=a^2-b^2$。

如果中心在点(x_0,y_0)时(如图 1.6)，椭圆的方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

中心在原点，焦点坐标为$(\pm c,0)$的双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中$2a$为实轴，$2b$为虚轴，而$c^2=a^2+b^2$。

如果中心在点(x_0,y_0)时(如图 1.7)，双曲线的方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

顶点在原点，对称轴是y轴的抛物线的方程为

$$y=cx^2 \qquad (c\text{为常数}),$$

c为正数时，抛物线开口向上；c为负数时，抛物线开口向

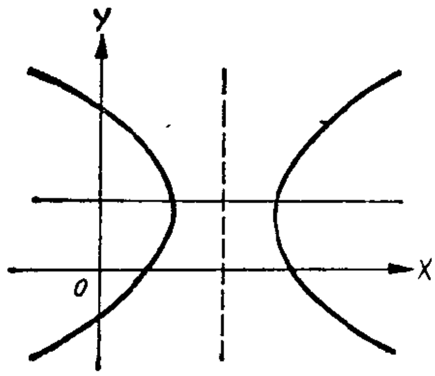

图 1.7

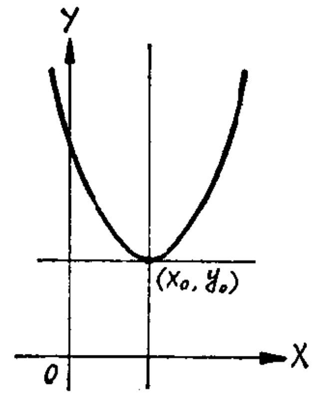

图 1.8

下。焦点坐标为$\left(0, \dfrac{c}{4}\right)$。

如果顶点在(x_0, y_0)，对称轴平行于y轴的抛物线方程为

$$y=c(x-x_0)^2+y_0,$$

c为正数时，抛物线开口向上（如图1.8）；c为负数时，抛物线开口向下。

11． 绝对值与不等式

对于任意实数a的绝对值，记作$|a|$，并且

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

$$|-a|=|a|.$$

如果$|a|<b$，那么$-b<a<b$，用数轴表示如图1.9。

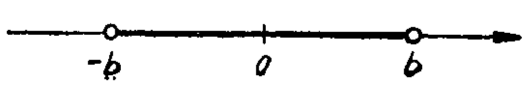

图 1.9

如果$|a|\leqslant b$，那么$-b\leqslant a\leqslant b$，用数轴表示如图1.10。

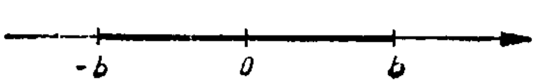

图 1.10

如果$|x-x_0|<\delta$，那么$x_0-\delta<x<x_0+\delta$，用数轴表示如图1.11。

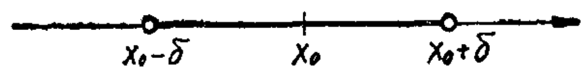

图 1.11

如果$|a|>b$，那么$a>b$或$a<-b$，用数轴表示如图1.12。

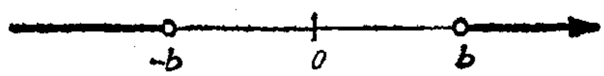

图 1.12

如果$|a|\geqslant b$，那么$a\geqslant b$或$a\leqslant -b$，用数轴表示如图1.13。

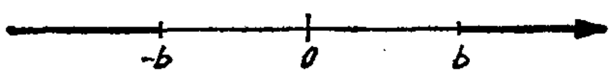

图 1.13

绝对值的运算：

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$
$$|a-b|\geqslant|a|-|b|,$$
$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|,$$
$$|a^n|=|a|^n,$$
$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

12． 数列

（1） 按一定顺序排列的一列数叫做数列。数列的一般形式为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots.$$

数列的每一个数叫做数列的一项，a_1叫做第一项，a_2叫做第二项，……，a_n叫做第n项，……。项数有限的数列叫