GUINA · DIGUI · DIEDAI

归纳 递归 迭代

$a_n = A a_{n-1} + B$

$n = 2, 3, \cdots\cdots$

已知 $f(x) = x^2$

求 $f^{(n)}(x)$

吴之季　严镇军　杜锡录

人民教育出版社

归纳　递归　迭代

吴之季　严镇军　杜锡录

人民教育出版社

归纳 递归 迭代

吴之季 严镇军 杜锡录

责任编辑 易 熔

*

人民教育出版社出版发行
新华书店总店科技发行所经销
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.625 字数 84,000
1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷
印数 1—2 000

ISBN 7-107-10512-4

G·1668 定价 1.45元

前　言

归纳、递归、迭代是数学(特别是离散数学)中处理一些问题的三种常用方法，它们之间有着密切的联系．本书通过大量有趣的例题，用不大的篇幅把这三者介绍给读者．本书可作为中学生的课外读物和中学数学教师的教学参考书．

全书分三部分．在归纳这部分中，介绍了如何应用数学归纳法证题．首先从归纳法的基本形式开始，研究了归纳法的几种重要变形及怎样变换命题的形式等等．在递归这部分中，从一些有趣的计数问题出发，介绍什么是递归方法，然后讲了解递归方程的一些常用方法．如：直接迭代法、特征根法、母函数方法等，这些方法在现代计算技术中有着重要的应用，最后讨论了某些非线性递归数列的问题．迭代是现代数学的一个重要分支，在这部分中，首先介绍了函数迭代的概念及迭代指数的推广，然后讨论了一些常用的迭代方法，如：不动点法、相似法、桥函数方法等等．最后介绍了迭代在初等几何及代数方面的一些有趣应用．书中的许多例题选自国内外的数学竞赛试题及国内的高考数学试题．

由于编者水平所限，对素材的处理可能挂一漏万，更难免有不妥之处，恳请读者不吝赐教．本书如能对读者的工作和学习略有帮助，我们将感到欣慰．

编者

1986年5月于合肥

目　　录

一　数学归纳法

(一) 基本形式

数学归纳法是用于证明与自然数 n 有关的命题的一种重要方法. 用这种方法论证命题时，一般有两个步骤：对于一个关于自然数 n 的命题，第一步，验证命题对于 $n=n_0=1$ 成立；第二步，在假设命题对于 $n=k$ ($k\in N$，且 $k\geqslant n_0$) 成立的条件下，论证命题对于 $n=k+1$ 也成立. 由此，可作出结论：命题对于所有的自然数 n 都成立. 这是数学归纳法论证命题的基本形式. 数学归纳法有多种变化形式，通常称这种基本形式为第一数学归纳法.

在上述的两个论证步骤中，通常称第一步为“奠基步骤”，将第二步中“假设命题对 $n=k$ 成立”称为“归纳假设”，由此推出 $n=k+1$ 时命题成立，则称为“归纳递推步骤”. 此外，还有两点值得注意：一是在第一步中，n 不一定必须取 1，在一些具体问题中它也可以是某个自然数，甚至于可以是零或者是负整数；二是第二步，由假设 $n=k$ 成立去论证 $n=k+1$ 也成立的过程中，由于数学变形技巧性强，涉及的知识面广，方法也常因题而异，所以是个难点. 下面看几个例题.

例 1　证明：如果 x_1 和 x_2 是方程 $x^2+px-1=0$ 的两个根(p 是奇数)，那么，对任何整数 $n\geqslant 0$，数 $x_1^n+x_2^n$ 和 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 是互素整数.

证明：（1）当 $n=0$ 时，$x_1^0+x_2^0=2$，$x_1+x_2=-p$，而 2 与 p 互素，故命题成立.

（2）假设 $n=k$ 时命题成立，即 $x_1^k+x_2^k$ 与 $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ 是互素整数，那么，$(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})(x_1+x_2)=x_1^{k+2}+x_2^{k+2}+x_1x_2(x_1^k+x_2^k)$，将 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=-1$ 代入，得

$$x_1^{k+2}+x_2^{k+2}=-p(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})+(x_1^k+x_2^k).$$

由此可见，$x_1^{k+2}+x_2^{k+2}$ 与 $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ 的每个公因式也是 $x_1^k+x_2^k$ 的因式，因而也是$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ 与$x_1^k+x_2^k$ 的公因式. 但后两数互质，因此 $x_1^{k+2}+x_2^{k+2}$ 与 $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ 互质，即 $n=k+1$ 时命题成立.

故命题对一切整数 $n\geqslant 0$ 都成立.

例 2 用数学归纳法证明：x^n-y^n（n 为偶数）能被 $x+y$ 整除.

证明：（1）当 $n=2$ 时，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$能被 $x+y$ 整除.

（2）假设当 $n=k$（k 为偶数）时，x^k-y^k 能被 $x+y$ 整除，那么，当 $n=k+2$ 时，有

$$x^{k+2}-y^{k+2}=x^{k+2}-x^2y^k+x^2y^k-y^{k+2}=x^2(x^k-y^k)+y^k(x^2-y^2)$$

因为 x^k-y^k 与 x^2-y^2 都能被 $x+y$ 整除，所以 $x^{k+2}-y^{k+2}$ 能被$x+y$ 整除. 这就是说，当 $n=k+2$ 时，$x^{k+2}-y^{k+2}$ 能被 $x+y$ 整除.

综上可知，n 为任何偶数时 x^n-y^n 都能被 $x+y$ 整除.

本例的第二步，是由 $n=k$（k 为偶数）时命题成立，去论证 $n=k+2$（不是 $n=k+1$）也成立的. 如果作归纳假设 $n=2k-$

1 时命题成立，那么论证 $n=2k+1$ 时成立也可以. 当然，如果把题目改为："证明：$x^{2n}-y^{2n}(n\in N)$ 能被 $x+y$ 整除"，那么，整个证明就可以完全按基本形式办了.

例 3 证明：多于 6 元的任何一笔整数款项，都可以用 2 元及 5 元的两种钞票支付.

证明： (1) 当 $n=7$ 时，可用一张 2 元及一张 5 元的钞票支付，所以命题成立.

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant 7)$ 时，命题成立，即 k 元款项可用 2 元及 5 元的钞票支付，这时有两种可能：(1) k 元款项可以全部用 2 元钞票支付，此时至少有 4 张 2 元的；当支付 $k+1$ 元时，只要把其中两张 2 元的换成一张 5 元的钞票支付就行了. (2) k 元款项中至少有一张 5 元时，这时若支付 $k+1$ 元，只要把其中一张 5 元的换成三张 2 元的支付就行了. 即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

综上可知，当 $n\geqslant 7$ 时命题成立.

例 4 用数学归纳法证明，当 $n\in N$ 时，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

略证： 假设 $n=k$ 时，原式成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}.$$

因为 $$\left(\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}\right)^2=\frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4}$$

$$=\frac{(2k+1)^2}{(12k^3+28k^2+19k+4)+k}$$

$$=\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k}\leqslant\frac{1}{3k+4}.$$

所以 $$\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

于是得到 $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时原式成立. 故原命题得证.

例 5 若 $a>0$、$b>0$, 当 $n\in N$ 时, 用数学归纳法证明

$$(n-1)a^n+b^n\geqslant na^{n-1}b.$$

并且, 当且仅当 $a=b$ 时, 式子取等号.

略证: 假设 $n=k$ 时, 原式成立, 即

$$(k-1)a^k+b^k\geqslant ka^{k-1}b.$$

式子两边乘以 a 后, 移项, 得

$$ka^{k+1}\geqslant ka^kb+a^{k+1}-ab^k.$$

两边加 b^{k+1}, 得

$$ka^{k+1}+b^{k+1}\geqslant ka^kb+a^{k+1}-ab^k+b^{k+1}.$$

下面只须证明 $ka^kb+a^{k+1}-ab^k+b^{k+1}\geqslant(k+1)a^kb$, 且取等号的充要条件为 $a=b$ 即可. 为此, 我们来反推.

要证 $$ka^kb+a^{k+1}-ab^k+b^{k+1}\geqslant(k+1)a^kb,$$

须证 $$a^{k+1}-a^kb+b^{k+1}-ab^k\geqslant 0,$$

须证 $$a^k(a-b)-b^k(a-b)\geqslant 0,$$

须证 $$(a-b)(a^k-b^k)\geqslant 0.$$

这里, 因为 $a-b$ 与 a^k-b^k 同号, 所以不等式是成立的, 并且当且仅当 $a=b$ 时取等号. 这就是说 $n=k+1$ 时原式

成立。

本例若用比较法证明，较为容易，请读者自己完成。

需要提醒的是，有些题目在论证由 k 成立到 $k+1$ 也成立时，常常不只要添上一项，如：

例 6 证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}\quad(n\in N)$.

略证： 假设 $n=k$ 时，原式成立，即

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

$$>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}.$$

由于 $\quad\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{1}{2^k+1}>\frac{1}{2^{k+1}},\ \cdots,\ \frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{1}{2^{k+1}},$

所以 $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$

$$>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{k}{2}+\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{k+1}{2}.$$

这就是说 $n=k+1$ 时，原式成立。

这里，由于 $2^{k+1}-1=2^k+2^k-1=(2^k-1)+2^k$，所以由 2^k-1 到 $2^{k+1}-1$ 增加了 2^k 项。

（二）几种重要变形

数学归纳法有下面几种重要的变形，在证明有关问题时，也经常被采用.

1. **第二数学归纳法** 将第一数学归纳法的第二步改为"如果当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时命题成立，论证当 $n=k+1$ 时命题也成立"，同样可以得出"命题对所有自然数 n 都成立"的结论.

例7 设 f 是具有下列性质的函数：(1) $f(n)$ 对每个正整数 n 定义；(2) $f(n)$ 是整数；(3) $f(2)=2$；(4) 对一切 m 和 n，$f(mn)=f(m)f(n)$；(5) 当 $m>n$ 时，$f(m)>f(n)$. 证明：$f(n)=n$.

证明： (1) 当 $n=1$ 时，由 $f(2\cdot1)=f(2)\cdot f(1)$ 得 $2=2f(1)$，所以 $f(1)=1$ 即结论正确.

(2) 假设 $n\leqslant k$ 时结论正确，即 $f(k)=k$，下面来证 $f(k+1)=k+1$.

如果 $k+1=2i$，$(1\leqslant i\leqslant k)$，于是

$$f(k+1)=f(2i)=f(2)f(i)=2i=k+1;$$

如果 $k+1=2i+1$，$(1\leqslant i\leqslant k)$，于是

$$\begin{aligned}2i&=f(2i)<f(2i+1)<f(2i+2)=f(2)f(i+1)\\&=2(i+1)=2i+2.\end{aligned}$$

而 $f(2i+1)$ 是整数，所以 $f(2i+1)=2i+1=k+1$.
即 $n=k+1$ 时结论正确.

因而，对一切自然数 n 有 $f(n)=n$.

例8 若 $a_0=2$，$a_1=3$，并且对于任意自然数 $k(k\geqslant2)$，有 $a_k=3a_{k-1}-2a_{k-2}$，证明：$a_n=2^n+1$.

证明： (1) 当 $n=0,1,$ 时 $a_0=2^0+1=2, a_1=2+1=3$，而 $a_0=2, a_1=3$ 命题成立；当 $n=2$ 时，$a_2=3a_1-2a_0=3\times3-2\times2=5$，而 $a_2=2^2+1=5$，故命题也成立。

(2) 假设当 $n\leqslant k(k\geqslant2)$ 时命题成立，即 $a_k=2^k+1$，那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)$$
$$=3\cdot2^k-2^k+1=2^{k+1}+1.$$

即 $n=k+1$ 时命题成立.

因此，命题对于一切自然数 $n\geqslant0$ 都成立.

例 9 若方程 $x^3-x^2-x-1=0$ 时根为互不相等的 a、b、c，设 $S_n=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}+\dfrac{b^n-c^n}{b-c}+\dfrac{c^n-a^n}{c-a}$ ($n\geqslant0$ 的整数)，用数学归纳法证明 S_n 是整数.

证明： (1) 当 $n=0$ 时，$S_0=0$；$n=1$ 时，$S_1=3$；$n=2$时，$S_2=(a+b+b+c+c+a)=2(a+b+c)$，由根与系数关系知 $a+b+c=1$，所以 $S_2=2$. 即 $n=0,1,2$ 时命题成立.

(2) 假设当 $n\leqslant k(k\geqslant3)$ 时命题成立. 由于 $a^3-a^2-a-1=0$，各项都乘以 a^{k-2} 后，移项得

$$a^{k+1}=a^k+a^{k-1}+a^{k-2}.$$

同理可得
$$b^{k+1}=b^k+b^{k-1}+b^{k-2}.$$
$$c^{k+1}=c^k+c^{k-1}+c^{k-2}.$$

由此三式可得
$$S_{k+1}=S_k+S_{k-1}+S_{k-2}.$$

由归纳假设 S_k、S_{k-1}、S_{k-2} 都是整数，故 S_{k+1} 也是整数. 即对于 $n=k+1$ 命题成立.

综上所述，对一切 $n\geqslant0$ 的整数，命题成立.

第八、九两例说明,由于第二步论证的需要,迫使我们在第一步中,同时对 $n=0,1,2$等几个值都要加以验证.

2. 大跨度归纳法 这种方法的论证步骤是将第一数学归纳法的第一步改为:验证当 $n=1,2,\cdots,l(l\geqslant 2)$时,命题都正确,第二步相应地改为假设当 $n=k$ 时命题正确,然后论证当 $n=k+l$ 时命题也正确,从而得到命题对所有自然数都正确的结论.

例 10 证明:对于任何正数 x 及任意自然数 n,有

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1.$$

证明: (1) 当 $n=1$ 时,因 $x>0$,所以 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$,当 $n=2$ 时,$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 2+1=3$ 命题也成立.

(2) 假设 $n=k$ 时,命题成立,即

$$x^k+x^{k-2}+x^{k-4}+\cdots+\frac{1}{x^{k-4}}+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1.$$

那么,$n=k+2$ 时,有

$$\begin{aligned}&x^{k+2}+x^k+x^{k-2}+x^{k-4}+\cdots+\frac{1}{x^{k-4}}+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\\&=\left(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\right)+\left(x^k+x^{k-2}+x^{k-4}+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{x^{k-4}}+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\right)\geqslant 2+k+1=(k+2)+1.\end{aligned}$$

即 $n=k+2$ 时命题也成立.

根据(1)、(2),对任何自然数 n 命题成立.

例 11 证明:对一切不可表示为 $3(2l+1)$ 形式的自然

数 n，1986^n-6 都不能被 7 整除（l 表示非负整数）.

略证： 本题只须证明对一切自然数 n，1986^n 被 7 除的余数不是 6 即可.

由于 $1986=7\times283+5$，所以 1986^n 与 5^n 被 7 除的余数相同.

当 $n=1,2,4,5,6$ 时，5^n 被 7 除的余数分别是 5、4、2、3、1．都不是 6，而 $3=3\times(2\times0+1)$，故不须验证．当 $n=1,2,4,5,6$ 时，命题成立.

假设当 $n=k$ 时，1986^k 被 7 除的余数 r 不是 6，那么，当 $n=k+6$ 时，有

$$
\begin{aligned}
5^{k+6}&=5^k\cdot5^6=(7l+r)\times15625=(7l+r)(7\times2232+1)\\
&=7\times2232(7l+r)+7l+r.
\end{aligned}
$$

即 5^{k+6} 被 7 除的余数还是 $r\neq6$，也即 $n=k+6$ 时命题成立.

所以，只要 $n\neq3(2l+1)$，1986^n-6 就不能被 7 整除.

3. 反向归纳法 按照这个方法证题，也需要两个步骤：对于一个含有自然数 n 的命题，(1) 命题对无穷多个自然数都成立；(2) 假设 $n=k+1$ 时命题成立，可以论证 $n=k$ 成立．由此断定对于任意自然数 n，命题成立.

例 12 证明：n 个非负数的几何平均数不大于它们的算术平均数．即设 $n(n\geqslant2)$ 个非负数为 a_1，a_2，…，a_n，那么，存在：

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

证明： (1) 首先证明，对于 $n=2^p$（p 为自然数）命题成立．对 p 施行归纳法：

当 $p=1$ 时,即 $n=2$ 有 $(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2)$,命题成立.

假设当 $n=2^k$ 时,命题成立,那么,

$$(a_1a_2\cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}}=\left[(a_1\,a_2\cdots a_{2^k}\,)^{\frac{1}{2^k}}(a_{2^k+1}\cdot a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[(a_1a_2\cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}+(a_{2^k+1}\,a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}}\,).$$

这就是说当 $n=2^{k+1}$ 时,命题成立.故命题对无穷多个整数 $n=2^p(p\in N)$ 都成立.

(2) 假设当 $n=k+1$ 时,命题成立,现在来证 $n=k$ 时它也成立.

取 $a_{k+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$,那么,$a_1+a_2+\cdots+a_k=ka_{k+1}$.

由归纳假设,有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}.$$

$$\geqslant(a_1\cdot a_2\cdots a_k\cdot a_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}$$

$$=\left(a_1a_2\cdots a_k\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

两边同除以$\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{\frac{1}{k+1}}$,得

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}}\geqslant(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k+1}}$$

由此得 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqslant(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}$.

即 $n=k$ 时，命题成立.

由(1)、(2)可知，对任意自然数 $n\geqslant 2$，命题都成立.

数学归纳法的这种变形，有的书上也称为“留空回填法”.

4. 翘翘板归纳法 若在一个问题里，含有两部分关于自然数 n 的命题，我们记作 $A(n)$、$B(n)$，此时可用翘翘板归纳法证明，其步骤如下：(1)先证 $A(n_0)$是正确的；(2)假设$A(k)$是正确的，根据这个假设证明 $B(k)$也是正确的；(3)假设 $B(k)$是正确的，由此再证明$A(k+1)$是正确的；(4)综合以上结论，可以断定对任意自然数 n，命题$A(n)$、$B(n)$都是正确的.

例13 在数列

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots$$

里，如果 a_n 是它的第 n 项，那么，

$a_{2n}=3n^2$，　　$a_{2n-1}=3n(n-1)+1$. 其中，n 是自然数.

证明：

$$S_{2n-1}=\frac{1}{2}n(4n^2-3n+1),\qquad S_{2n}=\frac{1}{2}n(4n^2+3n+1).$$

证明： 这里，设命题$A(n)$是$S_{2n-1}=\dfrac{1}{2}n(4n^2-3n+1)$，命题$B(n)$是 $S_{2n}=\dfrac{1}{2}n(4n^2+3n+1)$.

(1) 若 $n_0=1$，则 $A(1)$是正确的，即

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1\times(4\times 1^2-3\times 1+1)=1.$$

(2)假设 $A(k)$正确，　即　$S_{2k-1}=\dfrac{1}{2}k(4k^2-3k+1)$，那么，$S_{2k}=\dfrac{1}{2}k(4k^2-3k+1)+3k^2=\dfrac{1}{2}k(4k^2+3k+1)$，则$B(k)$