结构力学

姜炳光 刘国春 编

飞机结构力学 飞
飞机结构力学
飞
飞

国防工业出版社

内容简介

本书对结构力学的基本原理与计算方法作了比较系统的阐述。全书共分六章：第一章结构的几何不变性；第二章静定结构的内力；第三章能量原理与静定结构变形计算；第四章力法；第五章工程梁理论；第六章直接刚度法。

本书是按照高等航空院校结构力学课程的教学大纲编写的统编教材。供飞机、导弹结构强度和构造设计专业教学使用，也可供船舶结构、水中兵器和其它有关专业师生以及从事构造设计与结构分析的工程技术人员参考。

结构力学

娄炳光　刘国春　编

*

国防工业出版社　出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$787 \times 1092\ ^{1}/_{16}$　印张 $17^{1}/_{8}$　397千字

1980年12月第一版　1980年12月第一次印刷　印数：0,001—6,500册

统一书号：15034·2030　　定价：1.80元

前　言

本书是按照高等航空院校结构力学课程的教学大纲编写的统编教材。全书共分六章：前三章介绍结构分析中的基础部分，后三章介绍结构分析中两种常用的计算方法——力法与直接刚度法。

作为一门专业基础课程，结构力学既要系统地阐述结构分析的基本原理，又要结合计算技术的现代发展，适当地介绍结构计算的先进方法。因此在编写本书时，力求做到深入浅出，原理阐述清晰，公式推导详尽，例题步骤具体，并注意到培养学生分析问题与解决问题的能力。同时在内容安排上也突出反映了近代分析方法进展的梗概。

本书供飞机、导弹结构强度专业和构造设计专业教学使用，也可供船舶结构、水中兵器和其它有关专业师生以及从事构造设计与结构分析的工程技术人员参考。书中有“*”号的节、段属于选修内容，可根据各专业教学的具体安排选择使用。

为教学方便，另行单册出版与本书配套的习题集，编排顺序与本书一致。其中附有典型题解及答案，可供选择使用。

限于编者水平及时间紧迫，在内容安排方面可能有欠妥之处，缺点错误也在所难免，恳请使用本书的师生和读者批评指正。

本书由西北工业大学姜炳光同志主编，刘国春同志编写了部分章节，葛守廉同志对初稿提出了一些改进意见。本书承北京航空学院王德荣、胡训传、乌国华等同志审阅，并提出了许多宝贵意见。在编写期间得到两院校有关教研室许多同志的鼓励与帮助，在此一并致谢。

编　者

目　录

绪　论

任何一架性能先进的飞行器不仅要求它具有优良的空气动力外形、高效率的发动机和先进的仪表自动器设备，而且要求它具有重量比较轻及结实可靠的飞行器结构，以保证其正常使用。为了使飞行器能够承受各种情况的外载荷，在飞行器构造中，必须有一个连接很好的受力系统，这种受力系统称为"结构"。显然，结构的主要任务就是承受和传递载荷。因此，它必须有足够的"强度"和"刚度"。强度是指结构承受载荷的能力；刚度是指在外载荷作用下，结构抵抗变形的能力。所谓足够的强度和刚度并不意味着要过分地加强承力构件，而是要在总体设计所限定的空间内，设计出满足强度和刚度要求而且重量较轻的结构。为此目的，必须掌握有效的结构计算方法与先进的计算工具，以便在各个设计阶段对飞行器结构的内力与变形进行比较可靠的工程计算。

《飞行器结构力学》是研究结构的组成及其内力与变形计算方法的一门课程。本书所涉及的范围是在静载荷作用下，讨论结构内力及变形计算的基本原理与方法，为飞行器结构分析提供必要的理论基础知识。

一、飞行器结构的计算模型

飞行器结构是由飞行器构造中那些主要的受力构件所组成的"受力系统"。因为飞行器结构是十分复杂的，要想考虑所有的因素来计算其内力与变形，这几乎是不可能的，同时也是不必要的。为了适应实际计算，我们可以把真实结构加以简化。为此，应该把所有与计算有关的因素（载荷、几何形状、连接关系、材料等）加以分析，保留起主要作用的因素，略去次要因素，用理想化的受力系统来代替实际结构，以得到所需要的计算模型。

计算模型的简化大致可分为以下四个方面：

（1）外载荷的简化　一方面略去那些对强度和刚度影响不大的外载荷，着重考虑起主要作用的外载荷。例如，在机翼弯曲变形时，可以只考虑那些与机翼平面相垂直的分力所引起的效应，而忽略掉那些与机翼平面平行的分力所引起的效应。另一方面，将作用到飞行器表面的实际分布载荷（如空气动力载荷及质量力载荷等）等效地简化为作用于结构各节点上的集中载荷。

（2）几何形状的简化　飞行器的外形是由曲线或曲面所组成。为了计算方便，可以用折线或若干平面来代替实际外形。例如，图1（a）所示的机身圆形框可以简化为由若干段直梁所组成；图1（b）所示的机翼，在略去受力不大的后缘后，可以简化为由若干个盒式结构组成的受力模型。

（3）受力系统的简化　根据需要和现实计算的可能，一方面可以略去结构中一些不受力或受力不大的元件；另一方面，可以对元件的受力规律或受力类型作某些假设，抽象为理想化的元件。例如，在薄壁结构中，可以假设杆件只承受正应力；杆与钣相连处只传递剪应力。又如，对承受弯曲的平面梁（见图2），可以简化为双缘条薄壁梁。设原梁的高度为h，惯性矩为J，梁断面上的应力分布如图2（a）所示。图2（a）梁断面的最大应力

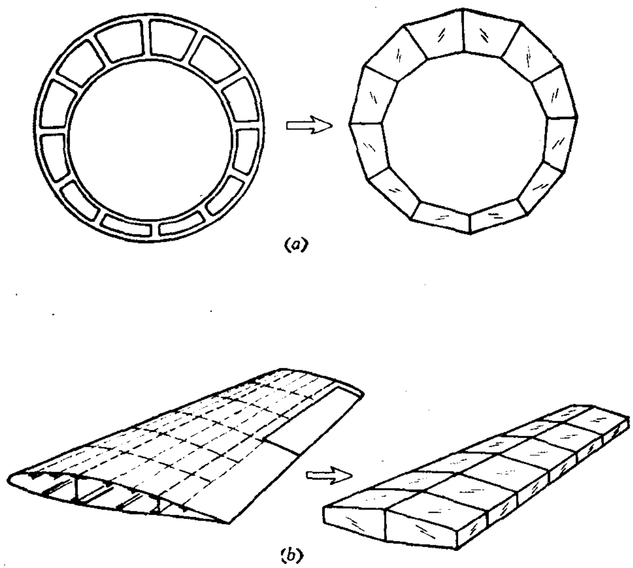


图 1

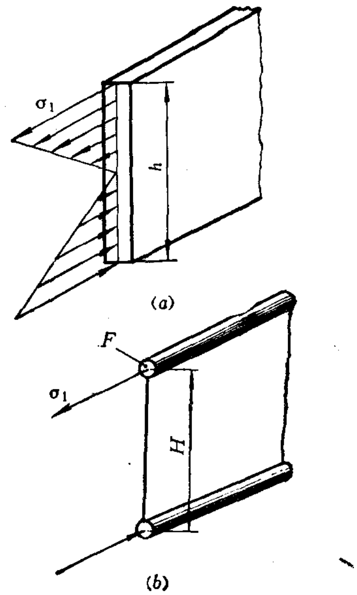


图 2

σ_1 可按下式计算

$$\sigma_1 = \frac{Mh}{2J} \tag{A}$$

将图 2（a）简化为图 2（b）所示的薄壁梁。设薄壁梁的高度为H，缘条的集中面积为F，在假设壁不受正应力的情形下，正应力 σ_1 可以由下式计算

$$\sigma_1 = \frac{M}{HF} \tag{B}$$

因为（A）式等于（B）式，故得

$$F = \frac{2J}{Hh} \tag{C}$$

当J、H及h为已知时，则计算模型的截面积F便可以由（C）式算得。

（4）连接关系的简化　将实际结构中所采用的铆接、螺接或焊接等连接方式，按照其受力及构造特点，可以简化为没有摩擦的铰接、滑铰或完全刚性的刚接等。

飞行器结构大致可分为杆系结构（如起落架、机身框、操纵系统等）、薄壁结构及整体结构。具体可分成以下几种：

桁架　它是由直杆组成的受力系统。各杆之间均以无摩擦的铰链相连接，桁架只承受节点载荷。

刚架　各杆件之间是刚性连接。所谓刚性连接是指在变形过程中各杆件之间的夹角保持不变。一般机身框架往往采用这种计算模型。

薄壁结构　它是飞行器结构中应用得最多的一种受力型式。薄壁结构是由加强构件（梁缘条、桁梁、桁条、肋、隔框）及蒙皮所构成。

整体结构　因为现代飞行器一些翼面的翼型太薄，而且对强度与刚度的要求又比较高，所以常采用整体结构。整体结构一般是由机械铣切或化学腐蚀加工而成。整体结构往往可

以简化为具有特定边界条件的变厚度钣的计算模型。

混合结构　结构本身是由上述各种受力型式混合组成的。

二、基本假设

飞行器结构是弹性变形体，它在外载荷作用下发生变形，并产生相应的内力。结构在受力时的客观规律是：所有作用于结构上的力——外载荷、质量力及支反力等，必定是平衡的，而且结构的每个元件上，受力也是平衡的。结构发生变形时，其各个部分之间一定是谐调的，即不允许发生断裂或重叠现象。结构元件的应力和应变之间，存在着反映材料物理性质的关系。上述情况归纳起来就是我们通常所说的平衡关系、谐调关系和物理关系。结构力学的基本原理和计算公式都是基于上述三种关系建立起来的。即针对各种具体结构把这些关系用数学形式表达出来，以便进行结构内力与变形的计算。

考虑到飞行器结构绝大多数在小变形条件下使用，并且它们所用的材料多为弹性材料的实际情况，为了简化工程计算，在结构力学中还采用两个基本假设。

（1）小变形假设　结构在载荷作用下变形很小，可以假设它不影响结构的外形几何尺寸。这样，就可以根据结构变形前的几何形状建立平衡方程式，问题的这种简化处理并不会引起太大的误差。

（2）线性弹性假设　认为结构为线性弹性系统。所谓弹性是指在载荷作用下，结构便产生内力与变形；当载荷去掉后，内力与变形也随之消失，结构仍回到原始状态，而无残余变形。线性是指结构的外载荷与变形以及元件的内力与变形之间符合虎克定律，即为直线关系。

当然，以上假设在某些情况下是不能成立的。例如在研究结构的弹性稳定性问题或其它非线性问题时，再采用这些假设就得不出正确结果。由于本书不讨论这些问题，以上两个基本假设对书中各章都是适用的。

针对各种不同的结构，为了得到适当的计算模型，尚需进一步引入一些相关的工程假设，具体内容将在以后各章有关部分中进行详细说明。

第一章　结构的几何不变性

§1-1　几何不变性的意义

飞行器结构是指飞行器的受力系统。为了承受载荷，受力结构各元件之间不应发生相对的刚体移动，以保持结构原来的几何形状。**结构在载荷作用下保持其几何形状不可改变的特性，称为结构的几何不变性。**因为组成结构的元件不是绝对刚性的，在载荷作用下各个元件都将发生微小的弹性变形。所以，要求结构的几何形状绝对不变是不可能的，也是不必要的。因此，几何不变性是指：当不考虑弹性变形时，结构保持其几何形状不变的特性。一个系统在载荷作用下，按照其几何形状的可变性分为以下三种类型：

一、几何可变系统

系统受载后，在元件不产生弹性变形的情况下，其几何形状就发生了显著的改变。这种系统称为几何可变系统，也称为"机构"，显然，它不能作为结构来利用。例如图 1-1 所示就是一种几何可变系统。它是由三根杆子铰接组成的，杆子 1-2 及 3-4 的一端又铰接在基础上。当有微小的外载 P 作用时，该系统的几何形状将发生巨大的变化，变化的趋势如图中虚线所示。这时的变形并不引起杆子的弹性变形。因而，杆子也不会产生与外载 P 平衡的内力。在这种情况下，只要没有其它阻碍，系统的形状就将继续地变化下去，直到倒伏在基础上为止。显然，**几何可变系统在不产生弹性变形的情况下，其元件之间就能发生相对的刚体位移。因而，它是不能受力的系统。**在构造设计时，必须避免这种情况。

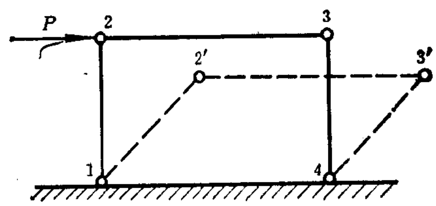


图 1-1

二、几何不变系统

这种系统在受载后，由于各元件之间互相牵连，将引起有关元件的弹性变形，其几何形状将只产生微小的变化。从而，产生一定的内力与外载荷相平衡，阻止了系统的几何形状继续改变。由于系统变形是微小的，在工程中就称其为几何不变系统。这种系统能够承受任意方向与不同形式的外载荷，是结构力学的研究对象。这种受力系统称为结构。例如图 1-2 就是一个几何不变系统，它是在图 1-1 的系统上，用一根杆子把节点 1 和 3 连接而成。当外力 P 作用在系统上时，由于杆子 1-3 的作用，系统不能任意改变其几何形状。这时，系统在 P 力作用下，变成图 1-2 中虚线所示的形状，系统中的杆子 1-3，2-3 和 3-4 都有弹性变形，因而，引起内力与外载荷 P 相平衡。这时的系统也发生变形，但这种变形由于受到元件刚性的限制，通常是微小的，不影响系统的正常使

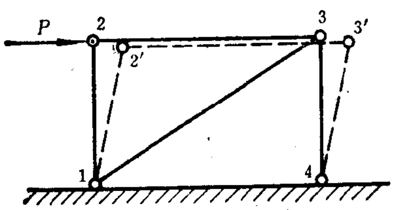


图 1-2

用。如果所有元件都是绝对刚硬的，系统就不会有任何形状的改变。显然，**几何不变系统受力时，在不考虑弹性变形的情况下，其各元件之间并不会发生相对的刚体位移。因而，能保持原有的几何形状**。这种系统是一种能够受力的系统。

三、瞬时几何可变系统

这种系统介于以上两种系统之间，在受载后，先是发生比较明显的几何变形，而后由于变形引起了系统内部各元件的相互限制，使形状不能继续变下去。所以它在开始受力的“瞬时”是几何可变的。这种系统往往是由于元件安排得不合理而造成的。例如图 1-3 就是一种典型的瞬时可变系统（简称为瞬变系统）。它是在图 1-1 的系统上加一杆 2-5 所形成的。当有外载 P 作用时，由于 1-2、2-5 杆均与力 P 相垂直，故其不能阻碍节点沿水平线 2-3 方向的移动。所以在开始加力的瞬间，系统是几何可变的。但当系统有显著的变形以后（如虚线），就使杆 1-2 和杆 2-5 明显的伸长，因此也就产生了阻止其继续变形的能力，使它不能象图 1-1 那样继续变下去。所以，瞬变系统的几何形状也是不能任意改变的，在这一点上它与几何可变系统不同。另一方面，在受载的瞬时，由于元件微小的弹性变形，可以引起系统几何形状的显著变化，这又与几何不变系统不同。**从结构设计角度来看，是不允许采用瞬变系统来作为结构的**。因为瞬变系统开始受载瞬时，不仅它的几何形状发生显著的变化，而且内力也是巨大的。所以在结构布置时，应避免出现瞬变系统，就是有些比较接近于瞬变系统，也认为是不合理的。

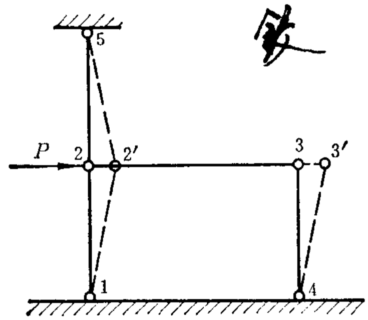


图 1-3

铰

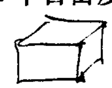
综上所述，几何可变系统与瞬时可变系统都不能作为受力系统，只有几何不变系统才能作为受力系统。所以，系统的几何不变性就是受力结构的必要条件。

§1-2　几何不变性的判断

为了便于研究几何不变性，可以引用“自由度”与“约束”的概念。将结构中的某些“元件”或“点”看作为具有自由度的自由体，而将某些“元件”、“支座”或“点”看作为约束装置。如果没有足够的约束去消除自由度，系统就无法保持其原形。于是可以从“自由度”与“约束”之间的关系中，引出判断结构几何不变性的准则。

自由度的定义：**决定一物体在某一坐标系中的位置所需要的独立变量的数目，称为物体的自由度**。

例如，在理论力学中，已学过一个质点在平面坐标系中具有 2 个自由度，在空间坐标系中具有 3 个自由度。一个刚体在空间坐标系中具有 6 个自由度。



约束的定义：**减少自由度的装置，称为约束**。

在结构力学中，常常把节点看作为自由体；把杆子看作为约束，一根杆子就是一个约束。例如图 1-4 所示平面上任一点 A，本来有两个自由度 x_A、y_A，如果用一根杆子把它铰接在坐标系的原点上，点 A 就不能在平面内任意移动了，而只能在杆端所画的圆周上移动了。这时只要一个独立变量 x_A（或 y_A 或 α）就可以确定它的位置了。所以平面内一根两端具有铰链的杆是一个约束。同理，一个空间节点本来有三个自由度（x_A、y_A、z_A），如果

用一根杆子把它铰接于空间坐标系原点上（图 1-5），这时点A也只能在以杆子为半径的球面上移动了，也就是只要用两个独立变量经度角θ和纬度角α就可确定其位置了。可见空间系统中一根两端带铰的杆子也是一个约束。

为了研究问题方便，有时也可以把杆子看作为自由体，把节点看作为约束。在这里所提到的杆子是以其轴线来表示的。对于平面系统（如图 1-6），一根杆子具有三个自由度x_A、y_A、α。若把它与坐标系铰接，则只剩下一个自由度α了。可见一个平面铰起两个约束的作用。同理可知，对于空间系统（图 1-7），一根杆子有五个自由度x_A、y_A、z_A、α、θ，若用球形铰把杆子固定在坐标系中，它就剩下两个自由度（α、θ）了。可见一个空间球形铰起三个约束的作用。

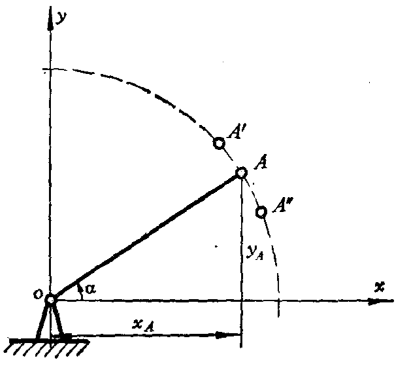


图 1-4

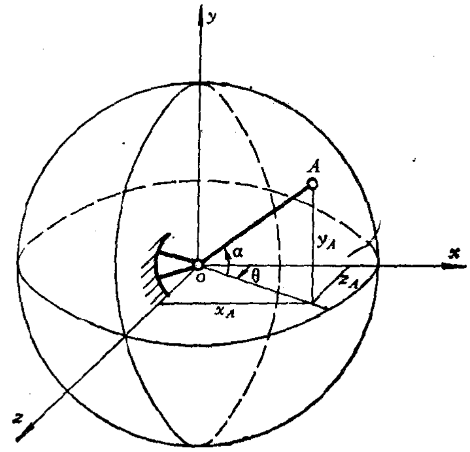


图 1-5

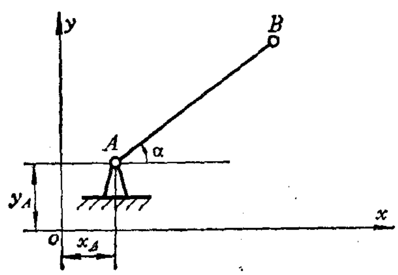


图 1-6

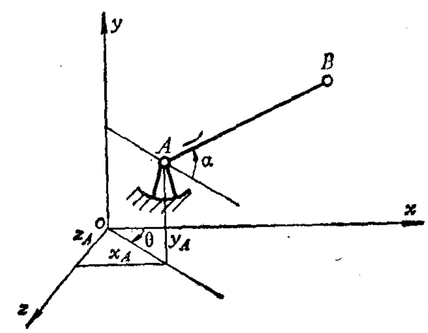


图 1-7

有了自由度与约束的概念，就可以用来研究系统的几何不变性。至于把哪些元件看作为自由体，哪些元件看作为约束装置，没有硬性规定，需要根据具体情况灵活运用。例如图 1-1 我们可以把杆 1-2、杆 2-3、杆 3-4 看作为自由体，它们的自由度为$3\times3=9$。而把节点 1、2、3、4 看作为平面铰，它们的约束为$2\times4=8$。系统的自由度则为$9-8=1$，因而系统是几何可变的。如果我们把各杆看作为约束，它们的约束数为 3 。这时看作为自由体的节点只有点 2 和点 3（点 1、4 连在基础上，不是自由节点），它们的自由度为$2\times2=4$。系统的自由度则为$4-3=1$，和上面的结果一样，系统仍是几何可变的。

要保证系统的几何不变性，就要求系统内自由体的自由度数（N）小于或等于系统内

约束装置的约束数（C）。即，**$C-N\geqslant 0$ 是保证系统几何不变性的必要条件**。所谓必要条件是指：凡是几何不变系统都满足此条件，而满足此条件的并不一定都是几何不变系统。例如图 1-2 是几何不变系统，它满足：$C-N=2\times 2-1\times 4=0$，而图 1-3 是瞬变系统，它也满足$C-N=0$。因此，要判定系统的几何不变性，不仅要首先满足判别式$C-N\geqslant 0$，而且要进一步检查其约束的安排是否合理。例如图 1-3，它虽然满足$C-N=0$，但是，由于杆 2-5 安排得不合理，并不能保证系统的几何不变性。因为任何一个两端带铰的杆不能限制与杆轴线方向垂直的运动，而系统的 1-2-3-4 部分是几何可变的，恰好要产生垂直于杆 2-5 的移动。再如图 1-8（a）的系统，它有 4 个节点和 9 根杆子，$C-N=9-2\times 4>0$ 满足了几何不变的必要条件，但是约束安排得不合理，它仍是一个瞬变系统。因为其中 2-3-4-5-6 这块几何不变部分可以看作为刚盘（图 1-8（b））它可以绕铰链 4 转动，2 点可以产生垂直于杆 2-3 的移动，而杆 1-2 又与杆 2-3 共线，不能阻止 2 点的这种移动。

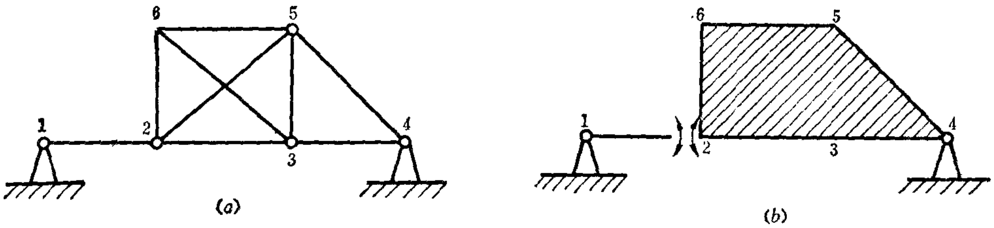


图 1-8

综上所述，要判定系统的几何不变性就必须：

（1）检查系统是否满足$C-N\geqslant 0$，若不满足此条件，则系统肯定是几何可变的。在满足此条件时，再进行以下分析。

（2）检查系统各元件布置得是否合理，即系统中不允许有几何可变部分或瞬变部分的出现。具体地作法可以把系统中很明显的几何不变部分视为刚体或刚盘，再逐次地研究。

§1-3 瞬变系统的分析

在判断系统的几何不变性时，系统或其一部分的几何可变性是比较容易识别的。只要对系统和其各部分运用判别式$C-N\geqslant 0$就可得出结论。当其中有一部分不满足此式时，就可以肯定其为几何可变系统。然而，要识别瞬变系统，就必须进一步研究系统的组成情况。

从图 1-3 和图 1-8 两个瞬变系统的分析中，可以发现系统的瞬变性是由节点 2 的位置决定的。当节点 2 与两端支座的铰链成一直线时，它两侧的杆子（或刚体）均不能限制其垂直于该直线的位移，而当 2 点开始移位以后，它两侧的杆子会伸长，从而限制了继续移动，这就形成了系统的瞬变性。由此可见，瞬变系统的最简单情况如图 1-9 所示。如果用

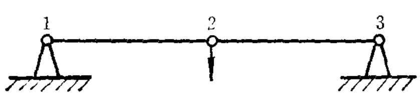


图 1-9

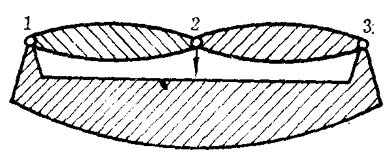


图 1-10

两个刚盘代替两杆再把基础也看作是一个刚盘（图 1-10）就可得出下列结论：

〔**结论 1**〕 如果三个刚盘互相用三个铰相连接，若三铰共线，则系统是瞬变系统。此处刚盘可代表平面内几何不变的结构。在检查系统的瞬变性时，要善于运用这一规律。如果三个刚盘不用铰直接连接，而是分别用二根杆子互相连接（图 1-11（a））。显然，连接二刚盘的两根杆子就相当于一个铰链，称其为虚铰，其铰心位于二杆延长线的交点上。所以
? 虚铰是指，实际上并不存在的铰链，而只是它们的约束作用与一个铰链相当。由图1-11（a）可见，若假定刚盘A为不动的基础，刚盘B相对于A就有三个自由度，而它们之间只有两杆相连，所以B和A是可以相对运动的。我们知道两端带铰的杆子只能约束沿其轴线方向的运动，而对垂直于杆轴方向的运动却没有约束作用。因此当刚盘A不动时，若刚盘B绕二杆延线的交点m（这点称为瞬时转动中心）转动时，在开始的瞬时二杆对刚盘B均无约束作用，因为此时节点 1′、2′ 的运动方向都是垂直于各对应杆的轴线。显然，刚盘B相对于A的运动，就如同把A和B在m点用一个铰接起来一样。所以在开始运动的最初瞬间，虚铰与实铰的作用是相当的。同理，可以得出以下结论。

〔**结论 2**〕 如果三个刚盘都分别用二杆连接，并且六根杆子所形成的三个虚铰共线，则系统是瞬变系统。

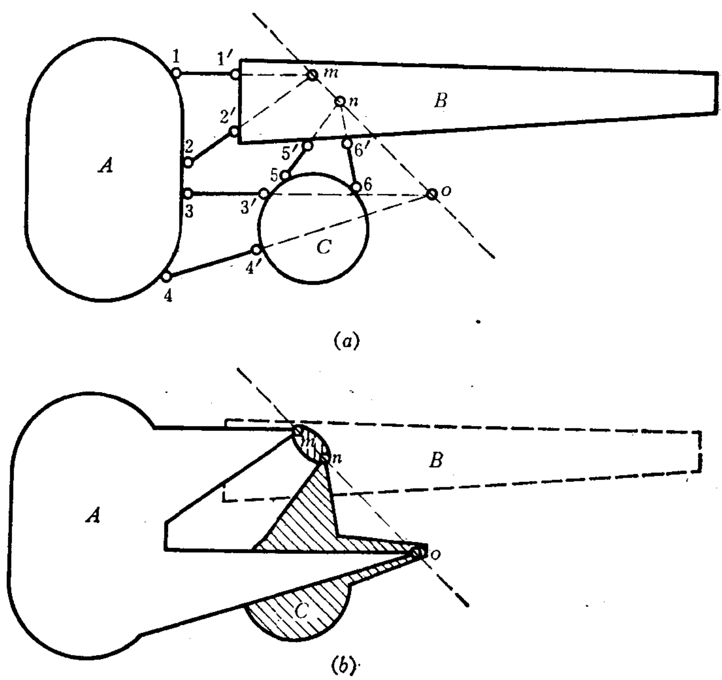


图 1-11

根据上述规律，很容易判断出图 1-11（a）就是一个瞬变系统。由于虚铰在转动的最初瞬间与实铰的作用相当，因此在判断瞬时可变性时，认为图 1-11（a）是与图 1-11（b）相当的。而图 1-11（b）实质上相当图 1-10 所示的状态，它显然是瞬变系统。所以，图1-11（a）也一定是瞬变系统。同理，可以得出以下结论。

〔**结论 3**〕 如果一个系统可以看作是由三个铰（包括实铰和虚铰）连接三个刚盘而成，只要这三个铰共线（无论在有限远处，如图 1-12（a），或在无穷远处，如图 1-12（b）），则该系统就是瞬变系统。

在运用上述规律时，特别要注意虚铰的概念。不是任何两根杆子的延线交点都是虚铰，而必须是连接同样两个~~物体之间的两根杆子才能构成虚铰~~（即一刚盘相对另一刚盘的瞬时转动中心）。例如图 1-12（b）中，杆 1-2 与杆 8-9 就不能构成虚铰，而杆 1-2 与杆 4-5 以及杆 8-9 与杆 6-7 才能分别构成虚铰，尽管前一个虚铰铰心是在无穷远处。

对于空间系统也有类似于上述的规律。

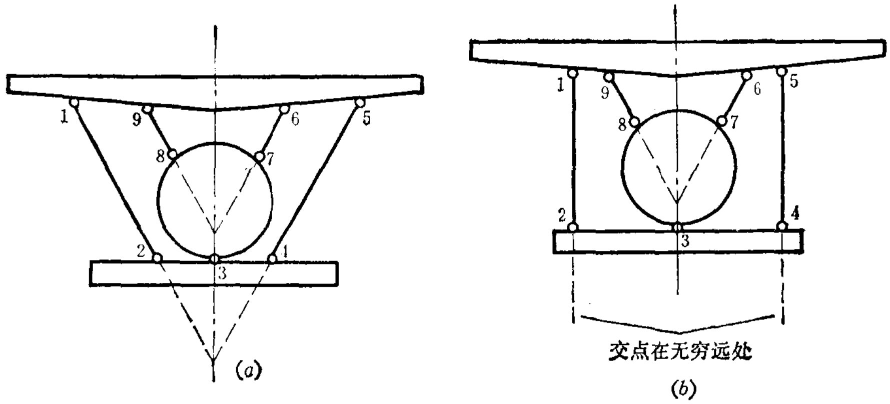


图 1-12

〔**结论 4**〕 用六根杆子（六个约束）把一个刚体（刚体有六个自由度）连在基础上，如果这六根杆子的延线相交于同一轴（无论该轴在有限远或在无限远处），则刚体与基础组成瞬变系统或几何可变系统。例如图 1-13 所示，固定机翼的六根杆子相交于同一轴 $A-A$（杆 6 与 $A-A$ 轴交于无穷远处）上，当外力不通过此轴时，机翼在受力瞬间就会发生绕 $A-A$ 轴的转动，所以是瞬变系统。轴 $A-A$ 称为瞬时转动轴。如果将杆 5 安排在坐标的 z 轴方向（如图虚线所示），则机翼的固定就是几何不变的了。

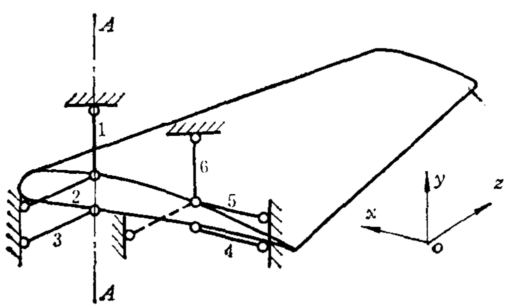


图 1-13

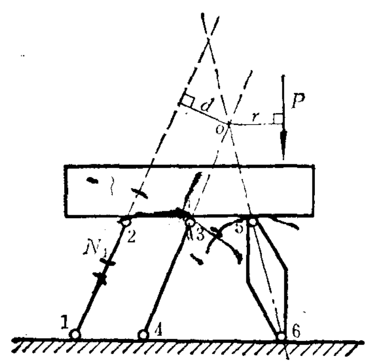


图 1-14

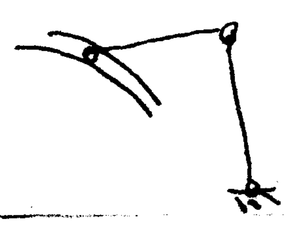
瞬变系统在外载作用下，不仅产生显著的位移，而且也产生相当大的内力。通过下面的简例加以说明。研究图 1-14 所示的平面系统。若把基础也看作是一个刚盘，那么这个系统就是三个刚盘互相用三个铰相连（三个铰是：实铰 5、6 及杆 1-2 与杆 4-3 所构成的虚铰）组成的。由于三铰不共线，故系统是几何不变的；但如果改变杆 1-2 的方向使距离 d 接近于零，那么系统就趋向于瞬变的了。不妨来计算杆 1-2 的内力 N_1，利用对 o 点的力矩平衡方程式，杆 3-4 及刚体 5-6 的内力通过 o 点，其矩为零，因此得

$$\Sigma M_0 = Pr - N_1 d = 0$$

式中 d 与 r 分别为矩心 o 点至 N_1 及 P 作用线的垂直距离。

解平衡方程可得

$$N_1 = \frac{r}{d} P$$



显然，当d接近于零时，N_1接近于∞。可见瞬变系统承载时，其内力极不合理。

由以上分析可见，用瞬变系统组成结构是不允许的。在设计结构时，不仅要避免瞬变系统，而且还要避免与其接近的系统。因为，那样的系统在承载时，内力将会达到很大的数值，使得结构重量大为增加。

总结本章所述，判断结构的几何不变性时，可按下列步骤进行：

（1）将结构看成是由许多元件组成的。其中，某些元件是具有自由度的自由体；其余元件看作为起约束作用的装置，按判别式$C-N\geqslant 0$检查其约束是否足够。如果系统不满足此式，它就是几何可变的。如果系统满足此式，且$C=N$，则称此系统是具有最少必需约束数的系统；而当$C>N$，则称此系统是具有多余约束的系统。对于$C\geqslant N$的情况必须进一步分析系统的组成情况，才能判断其几何不变性。

（2）在分析结构的组成时，我们必须设想一个组成的过程，从基础开始逐步进行检查。对于无基础相连的自由结构，我们可以把其中的任何一个元件看作为基础，而把其余的元件看成是此基础上的结构。如果没有布置不合理的约束，则系统是几何不变的。在研究时，对于系统几何不变性很明显的部分，可分别用刚盘或刚体来代替，再运用§1-3中的已知规律，就能判断其几何不变性。

例1-1 判断图 1-15 所示平面系统的几何不变性。

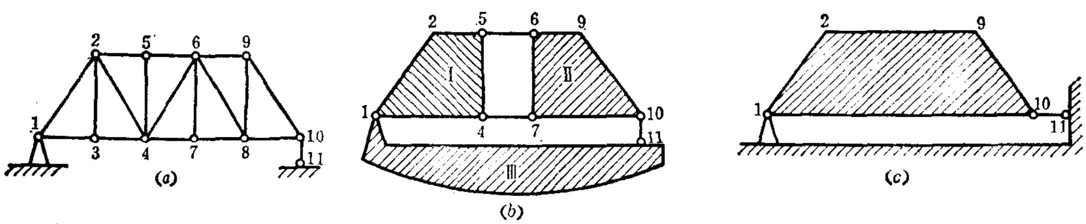


图 1-15

〔**解**〕 首先把节点看作为自由体，而把杆子看作为约束，检查系统是否有足够的约束。

因为自由节点数为九个（从点 2 到点 10），所以自由度$N=2\times 9=18$，而杆的约束数$C=1\times 18=18$，故$C-N=0$系统具有最少必需约束数。

其次，再检查约束安排是否合理。可以把杆 1-2 看作基础，逐次增加节点 3、4、5……10。可见每增加一个节点，都是增加两根不共线的杆子连成的，这样组成的结构1-2-9-10 是一个本身几何不变的自由结构，它相对于基础还有三个自由度，而铰 1 和杆 10-11 就提供了三个约束把它与基础固连起来，因此系统是几何不变的。

〔**讨论**〕 如果杆 10-11 是水平的如图 1-15(c)，则系统就是瞬变的。因为这时可以把杆 10-11 和基础分别看成为刚盘，三个刚盘分别用三个铰（1、10、11）互相连接，若杆 10-11 改成水平状态，则三铰共线，因而成了瞬变系统。

如果把杆 4-6 移到 7、9 节点之间，这时系统仍满足$C-N=0$，但是当把明显的几何不变部分看成是刚盘(图 1-15(b))，则系统显然成为几何可变的。因为刚盘Ⅰ与Ⅱ共有自由度$N=3\times 2=6$，而把它们与基础Ⅲ相连的约束仅有 5 个（铰 1 有两个约束，另外三杆有三个约束），所以系统还有一个自由度，它是几何可变的。

如果把图 1-15(b) 的杆 10-11 去掉，使铰 10 直接与基础Ⅲ相连。这时由于杆 5-6 与

杆 4-7 平行，它们构成的虚铰在水平方向的无限远处，可以认为虚铰与铰 1 和铰 10 是共线的，因此它是瞬变系统。

例1-2 如图 1-16 所示，用六根杆子固定一个机翼，试判断其几何不变性。

〔**解**〕 把机翼看作是刚体，它具有六个自由度，用六根杆子来固定就等于用了最少必需约束（即$C-N=0$）。

为了判断其几何不变性，还要检查约束布置得是否合理。由图 1-16 可见，杆 1 、 2 、 3 共面，杆 4 、 6 也共面，此两平面有一交线A-A。而另一杆子 5 的延长线与A-A轴平行，相当于在无限远处相交。不难看出，当机翼绕A-A轴转动时，各杆均不能起约束作用，整个机翼有一绕A-A轴的转动自由度，故此系统为几何可变系统。

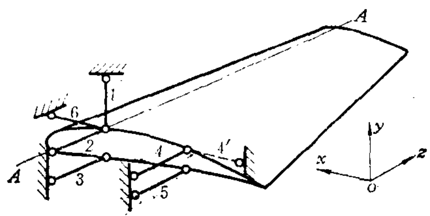


图 1-16

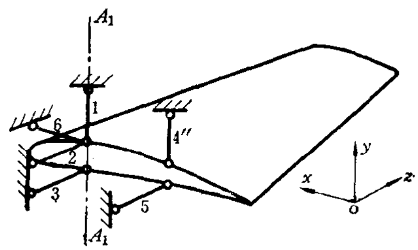


图 1-17

1·24

〔**讨论**〕 如果将图 1-16 中杆子 4 沿x轴方向布置(图 1-16 中虚线所示)，这时杆子4′、6 仍在同一平面上，A-A线仍是杆 1 、 2 、 3 组成的平面与此平面的交线，机翼仍可绕此轴而发生微小转动，开始时各杆仍不能起约束作用。当转动到一定限度时，杆 4′就会起约束作用了。所以该系统为瞬时可变系统。

如果将杆 4 沿y方向布置成 4″(图 1-17 所示)，这时杆 4″及杆 6 所在的平面与杆 1 、 2 、 3 所在的平面的交线就变成为A_1-A_1。而杆 5 轴线与A_1-A_1线既不平行也不相交，所以系统就成为几何不变系统了。

为了便于理解，上述问题也可以化为平面问题来分析。首先把侧肋看成一个平面刚盘，它在xoy平面内有三个自由度，为了消除此侧肋的自由度，最少应有三个约束。当只用杆子 1 及 6 固定此侧肋时，它仍有一个转动自由度。显然，系统是几何可变的。当我们把杆 4 搬到 4′时，对此侧肋来说，虽然它被三根杆子所固定，满足了平面几何不变的必要条件，但从三根杆子的安排来分析，因为 4′、 1 与 6 这三根杆子的延长线交于一点，故它是瞬时可变的。现在再来分析图 1-17 的系统。杆子 1 、 6 与 4″既不平行又不相交于一点，是几何不可变系统，其余三根杆子的安排均与侧肋垂直，对与侧肋平面的垂直方向起着约束作用，而又不限制侧肋在平面内的移动。由于侧肋是机翼的一部分，所以，上面的分析可以说明机翼的外部约束布置的合理性。

第二章　静定结构的内力

如第一章所述，飞行器结构必须是一个几何不变系统。因此，当把结构看成是由一些自由体和另一些起约束作用的元件组成时，由于其几何不变性，它的约束数C必须大于或等于自由度数N，即$C \geqslant N$。

当$C = N$时，表示结构具有最少必需的约束，称这种结构为没有多余约束的结构。

当$C > N$时，表示结构的约束数大于自由度数，称这种结构为具有多余约束的结构。

从求解内力的角度来看，没有多余约束（即具有最少必需约束）的结构是比较容易分析的，它是本章的研究对象。而具有多余约束的结构，相对复杂一些，将在本书后面几章中去研究。

§2-1　静定结构的概念

为了求解内力方便，同样把结构看成是由自由体和约束物所组成。整个结构在外载荷作用下，处于平衡状态。如果用未知的约束力代替约束物，那么，每个自由体在相应的外载荷和约束力的作用下，也将处于平衡状态。我们知道，一个自由体有多少自由度，就能列出多少静力平衡方程式。例如平面上一个点有两个自由度，欲使此点不动而处于平衡，就需要满足两个平衡条件

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0$$

而一个约束物有多少约束就能产生多少未知约束力。例如一根杆子能产生一个沿杆子轴线方向的约束力。这样，对于一个受载结构，我们所能列出的静力平衡方程式的数目，就等于其自由度数N，而方程式中所包含的未知约束力的数目，就等于约束数C。

显然，对于没有多余约束的结构，可列出的静力平衡方程式数目就等于方程组中包含的未知力数目（因为$N = C$）。由代数学可知，方程组中的未知数与方程式数相等时，如果未知数不是无限大，那么就可以由这些方程式联立解出未知数来。另一方面，由于结构必须满足几何不变性要求，使得它在任意外载荷作用下都能处于平衡状态。因此，结构内力（即方程组未知数）不会是无限大的。这就是说，对于没有多余约束的结构，其内力是有限值，而且仅用静力平衡方程便可求得。由于**仅用静力平衡方程就能求出内力的这一特点，我们就称没有多余约束的结构为静定结构。或者说，具有最少必需约束的几何不变系统称为静定结构**。而具有多余约束的结构，意味着方程式所含未知力数目大于可能列出静力平衡方程式的数目，因此，仅用静力平衡方程是不能确定其内力的，故称这种结构为静不定结构。多余的未知力数（即多余约束数）称为结构的静不定度，如用f表示，则可得$f = C - N$。

例2-1　图 2-1(a) 所示是一个没有多余约束的结构，即静定结构。它有三个节点（1、2、3）。把节点作为自由体，则$N = 2 \times 3 = 6$，对每个节点都可以列出两个平衡方程式，三个节点恰好可以列出 6 个平衡方程式。其约束物为四根杆子 1-2、2-3、3-1、3-4 及一个铰链 2，约束数$C = 4 + 2 = 6$，即约束数恰好与方程式数目相同。现在用未