

数学分析选论

孙巨江 主编

山东大学出版社

数学分析选论

主 编	孙巨江	
副主编	朱 治	徐 淮
编 委	王爱云	任尧民
	邱仲坊	陈家铭
	张启泉	

山东大学出版社

鲁新登字 09 号

数学分析选论

主编 孙巨江

★
山东大学出版社出版发行
山东省安丘县商标印刷厂印刷

★
787×1092 毫米 32 开本 14.125 印张 317 千字

1993 年 8 月第 1 版 1993 年 8 月第 1 次印刷

印 数 1 - 4200

ISBN7—5607—1100—6/O·75

定 价：7.00 元

内 容 简 介

本书是为数学专业大专起点的本科生而编写的.它的主要内容有:极限与连续性理论、微分学与积分学理论、函数项级数、含参变量积分、隐函数理论以及场论初步等.

本书的编写,注重内容的选取;注重对有关定义、定理、例题的思想、方法、技巧、作用等方面的分析和总结;注重写好各章后面的本章小结和学习指导;注重有关初级科研成果的引入;注重便于自学.

本书可作为数学专业大专起点的在校生、函授生和音像教育生的教材.也可作为普遍高校数学专业和其它理工科专业学生的参考书.

前 言

本教材是为数学专业大专起点的本科生而编写的,但它的内容适合数学专业和其它理工科专业师生参考.

《数学分析》这门课,虽在专科阶段已经学过,但按本科部颁大纲的要求尚有一定差距;又因《数学分析》的内容极为丰富,它是学习后继课程的重要桥梁;《数学分析》的思想、方法和技巧对提高分析问题和解决问题的能力非常有益;因此,在本科阶段再开设《数学分析选论》,这对学习后继课程和为打下牢固的数学基础,都是十分必要的.

编写本教材的指导思想是,对《数学分析》的主要理论部分,按本科部颁大纲的要求,力求把它的主要内容讲明,把它的主要思想、方法和技巧讲透,努力提高所编教材的科学性、先进性,使学员学习了本教材后能感到,在继续深造方面或在教学、科研工作方面,手中掌握了重要的基础知识和思考方法.为此,本教材对《数学分析》的重要工具——极限方法,进行了深入的讨论;对《数学分析》的重要基础——实数系连续性理论,进行了详细的讲解;对《数学分析》的主要研究对象——函数(包括构造函数),进行了更全面、更深入的认识;对《数学分析》的重要概念——一致连续、一致收敛,进行了重点分析;对《数学分析》的主要内容——微积分,进行了有重点的

分析、概括、总结、加深,等等。

教材中还总结了数学分析的思想、方法、技巧几十条,它们分散在有关定义、定理、例题及其注中,若学员能更好地理解它们,这对提高分析问题、解决问题的能力会有更大帮助。教材中有许多注、小结和学习指导,它们是对有关定义、定理、例题的进一步说明,为的是对学员的学习起到启发、引导、深入思考的作用;也为了使学员对所学知识能深刻理解,牢固掌握,灵活应用,从而提高观察能力、分析能力、想像能力、判断能力、推理能力、应用能力。这些能力对一位数学工作者来说是十分可贵的。因此,学员见到有关注、小结和学习指导时,多加思考,并且学会自己提出问题,自己解决问题,自己总结、提高、加注。读书就要这样由厚到薄,再由薄到厚,消化、吸取、长进。附录Ⅰ是为灵活运用所学知识、思想、方法、技巧再举例,这些例子大部分属初级科研成果,使本教材更具师范性、启发性、适用性。

本教材配备了一定数量的典型例题和难易适度的习题。这些习题都附有较详细的参考答案,以方便函授和音像教育方面的学员学习,但务必请学员先作题后看答案,否则将使学习效果减色。

由于水平所限,错误与不足之处一定不少,恳切希望专家、读者提出宝贵意见。

本教材副主编和编委的名次是以姓氏笔划为序。

编 者

1993年1月

目 录

511/229/20

第一章 关于极限与连续性理论

§ 1.1 实数、绝对值、不等式	1
一、实数的基本性质	1
二、绝对值的基本性质	2
三、几个重要不等式	3
四、例	7
习题 1.1	10
§ 1.2 数列极限的定义、性质和定理	10
一、数列极限的定义	10
✓ 二、收敛数列的性质和定理	11
三、例	13
✓ 四、几个重要数列极限	24
习题 1.2	25
§ 1.3 函数极限的定义、性质和定理	27
一、函数极限的定义	27
二、函数极限的性质	28
三、无穷小、无穷大、记号 o 、 $\sim$ 、 $\bigcirc$	29
四、例	31
✓ 五、几个重要函数极限	35
习题 1.3	36
§ 1.4 关于实数系的基本定理	37
✓ 一、单调有界定理	37
✓ 二、闭区间套定理	38

三、有限覆盖定理	39
四、确界定理	41
五、聚点定理	43
六、收敛子列定理	44
七、上、下极限定理	45
八、柯西收敛准则	46
习题 1.4	49
§ 1.5 连续函数	50
一、函数连续性概念和几个基本定理	50
二、闭区间上连续函数的基本性质	56
习题 1.5	60
§ 1.6* 多元函数的极限与连续(复习)	61
本章小结与学习指导	69

第二章 关于微分学与积分学理论

§ 2.1 导数的定义与性质	77
一、导数的定义	77
二、导数的性质	79
三、例	80
§ 2.2 微分中值定理和台劳公式	84
一、微分中值定理和台劳公式	84
二、例	88
习题 2.2	99
§ 2.3 定积分的定义和可积性	100
一、定积分的有关定义	100
二、可积条件与定积分的性质	103
三、例	115
习题 2.3	119
§ 2.4 积分中值定理	120

一、积分第一中值定理.....	120
二、积分第二中值定理.....	122
习题 2.4	128
§ 2.5* 多元函数微分法与重积分(复习)	128
本章小结与学习指导	135

第三章 函数项级数

林 1

§ 3.1 常数项级数的概念和定理.....	141
§ 3.2 函数项级数的敛散性与一致收敛.....	146
一、函数项级数的敛散性.....	146
二、函数项级数的一致收敛性.....	149
三、函数项级数一致收敛判别法.....	153
四、函数列的收敛性与一致收敛性.....	159
习题 3.2	160
§ 3.3 和函数的分析性质.....	161
一、和函数的分析性质.....	161
二、极限函数的分析性质.....	169
习题 3.3	169
§ 3.4 富里埃级数.....	170
一、富里埃级数.....	170
二、收敛定理.....	172
三、富里埃级数若干性质.....	185
习题 3.4	186
本章小结与学习指导	186

第四章 含参变量积分

§ 4.1 广义积分的某些结果.....	192
一、无穷积分.....	192
二、瑕积分(略).....	195

§ 4.2 含参变量常义积分	195
习题 4.2	204
§ 4.3 含参变量广义积分	205
一、一致性收敛的定义	206
二、一致收敛的判别法	209
三、含参变量无穷积分的性质	215
习题 4.3	222
§ 4.4 Γ 函数与 B 函数	223
一、 Γ 函数及其性质	224
二、 B 函数及其性质	228
三、 Γ 函数与 B 函数的关系	229
习题 4.4	233
本章小结与学习指导	233

第五章 隐 函 数

§ 5.1 一个方程确定的隐函数	237
一、隐函数的概念	237
二、隐函数存在定理	239
习题 5.1	245
§ 5.2 由方程组确定的隐函数组	246
一、隐函数组存在定理	247
二、反函数组与坐标变换	253
习题 5.2	257
§ 5.3 函数行列式	258
习题 5.3	261
§ 5.4 隐函数(组)理论的应用	262
习题 5.4	268
本章小结与学习指导	269

第六章 场论初步

§ 6.1 曲线积分与曲面积分	272
一、曲线积分	272
二、曲面积分	275
习题 6.1	284
§ 6.2 场论初步	285
一、场的概念	285
二、梯度	286
三、散度	291
四、旋度	296
五、几种特殊的向量场	301
六、微分算子	304
习题 6.2	307
本章小结与学习指导	308

习题解答

习题 1.1	313
习题 1.2	316
习题 1.3	326
习题 1.4	330
习题 1.5	333
习题 2.2	336
习题 2.3	342
习题 2.4	346
习题 3.2	347
习题 3.3	352
习题 3.4	354
习题 4.2	358

习题 4.3	361
习题 4.4	365
习题 5.1	368
习题 5.2	371
习题 5.3	375
习题 5.4	376
习题 6.1	380
习题 6.2	384
附录 I 有关定理的证明	389
附录 II 灵活运用所学知识、思想、方法、技巧举例	406

第一章 关于极限与连续性理论

极限方法及其理论是整个数学分析的基础. 因此, 要学好数学分析课, 必须对极限理论能牢固掌握, 深刻理解, 灵活运用; 对于极限理论及其应用中的某些思想、方法和技巧要善于总结、归纳, 这样才能提高解决问题的能力. 为此, 本章将对实数性质、绝对值、不等式、数列极限与函数极限的概念与性质作一简单回顾, 然后给出一些实数基本定理的严格证明, 并通过一定数量的例题, 进一步介绍如何证明不等式, 如何应用极限的定义、性质、定理来解决有关极限等问题.

函数是数学分析的主要研究对象, 本章对函数连续性的概念作一简单回顾后, 对闭区间上连续函数的某些性质给出了详细证明.

§ 1.1 实数、绝对值、不等式

由于数学分析是在实数集内研究函数, 所以在数学分析中经常利用实数的某些性质, 绝对值的某些性质及其它某些不等式, 现回顾如下:

一、实数的基本性质

1° 关于四则运算的封闭性 对实数集中的任意两个

实数进行加、减、乘、除(除数不为零)运算的结果仍是实数.

2° 有序性 任意两个实数 a 和 b , 一定满足下面三种关系:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

中的一种关系, 且只能满足一种关系, 这叫三岐性.

实数 a, b, c 若有 $a < b, b < c$, 则 $a < c$, 这叫传递性.

3° 实数集 R 具有阿基米德性质, 即对任何两个正实数 a, b , 必存在自然数 n , 使得 $na > b$.

4° 连续性 我们知道, 自然数集 N 是有间隔的. 有理数集 Q 却是稠密的, 即任何两个有理数之间, 必有无限多个有理数. 而实数集 R 是连续的数集, 或者说是完备数集, 即实数集 R 可以和一条连续不断的数轴上的点建立一一对应关系, 这就是通常所说实数集 R 不但是稠密的, 而且没有空隙.

二、绝对值的基本性质

实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

关于实数的绝对值有下列性质:

1° $|a| = |-a| \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时, 才有 $|a| = 0$;

2° $-|a| \leq a \leq |a|$;

3° 若 $h > 0$, 则 $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$, 同样,

(等价)

若 $h > 0$, 则 $|a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h$;

4° $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ (三角不等式),

常用 $|a| - |b| \leq |a - b|$ 或 $|a| \leq |a - b| + |b|$;

5° $|ab| = |a| \cdot |b|, |a^n| = |a|^n$ (n 为自然数);

$$6^{\circ} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

三、几个重要不等式

以下不等式,若无特别声明, n 为任意自然数.

1° 若 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 皆为正数,且 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ 则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n,$$

并且,式中的等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时成立.

$$2^{\circ} \quad \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

(调和平均) (几何平均) (算术平均)

其中 $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

3° 贝努里(Bernoulli) 不等式

$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

4° 若 $x > -1$, 则 $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

5° $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n > 1$.

6° $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

7° $2!4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n, n > 1$.

8° $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

9° $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$.

$$10^\circ \quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

$$11^\circ \quad \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

下面仅证 $1^\circ, 2^\circ, 6^\circ, 11^\circ$

1° 的证明 用数学归纳法证明.

$n = 1$ 时, 命题显然成立.

$n = 2$ 时, 因 $x_1 x_2 = 1$, 所以 $x_2 = \frac{1}{x_1}$, 从而得

$$x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2 + 1}{x_1} = \frac{(x_1 - 1)^2 + 2x_1}{x_1} \geq 2. \text{ 当且}$$

仅当 $x_1 = x_2 = 1$ 时, 上式等号成立.

今假设命题当 $n = k \geq 2$ 时成立, 下证当 $n = k + 1$ 时亦成立.

设 $x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} = 1$, 且不妨认为诸 x_i 不全相同, 于是必有大于 1 者, 又有小于 1 者, 不妨设 $x_1 > 1, x_{k+1} < 1$, 记 $x_1 x_{k+1} = y_1$, 则由 $y_1 x_2 x_3 \cdots x_k = 1$ 和归纳法假设, 可得

$$y_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k,$$

因此 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}$

$$= (y_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_1 + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} \quad (1.1.1)$$

$$\geq k + 1 + x_1 + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} - 1 \quad (1.1.2)$$

$$= k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_{k+1}) \geq k + 1.$$

显然, 当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ 时, 上式等号成立. 由数学归纳法得 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, 等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时成立.

注: 证明中的关键处是设 $x_1 > 1, x_{k+1} < 1, y_1 = x_1 x_{k+1}$, 及 (1.1.1), (1.1.2) 两式中的配项, 配项法是数学分析中经常使用的技巧.

2° 的证明

$$\text{令 } g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \quad h = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$\text{显然有 } \left(\frac{x_1}{g}\right)\left(\frac{x_2}{g}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{g}\right) = 1$$

由不等式 1° 得

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \cdots + \frac{x_n}{g} \geq n,$$

$$\text{即 } h = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \quad (1.1.3)$$

同理, 若令 $g_1 = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}}$, 利用不等式 1° 可得

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \quad (1.1.4)$$

由式(1.1.3), (1.1.4) 得不等式 2°.

注: 2° 的证明技巧是引进符号 g , 归结为 1°, 这是归结法, 归结法是数学分析中常用的方法之一. 2° 的左、右两个不等式是等价不等式, 留给学员自己证明.

6° 的证明

$$\text{设 } A = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \\ &< \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}} = \frac{1}{A(2n+1)}, \end{aligned}$$

即

$$A^2 < \frac{1}{2n+1},$$