数学分析选论

孙巨江　主编

山东大学出版社

数学分析选论

主　编　孙巨江
副主编　朱　治　徐　淮
编　委　王爱云　任尧民
邱仲坊　陈家铭
张启泉

山东大学出版社

鲁新登字 09 号

数学分析选论

主编　孙巨江

*

山东大学出版社出版发行
山东省安丘县商标印刷厂印刷

*

787×1092 毫米　32 开本　14.125 印张 317 千字
1993 年 8 月第 1 版　1993 年 8 月第 1 次印刷
印　数　1－4200
ISBN7—5607—1100—6/O・75

定　价：7.00 元

内容简介

本书是为数学专业大专起点的本科生而编写的.它的主要内容有:极限与连续性理论、微分学与积分学理论、函数项级数、含参变量积分、隐函数理论以及场论初步等.

本书的编写,注重内容的选取;注重对有关定义、定理、例题的思想、方法、技巧、作用等方面的分析和总结;注重写好各章后面的本章小结和学习指导;注重有关初级科研成果的引入;注重便于自学.

本书可作为数学专业大专起点的在校生、函授生和音像教育生的教材.也可作为普遍高校数学专业和其它理工科专业学生的参考书.

前　　言

本教材是为数学专业大专起点的本科生而编写的，但它的内容适合数学专业和其它理工科专业师生参考.

《数学分析》这门课，虽在专科阶段已经学过，但按本科部颁大纲的要求尚有一定差距；又因《数学分析》的内容极为丰富，它是学习后继课程的重要桥梁；《数学分析》的思想、方法和技巧对提高分析问题和解决问题的能力非常有益；因此，在本科阶段再开设《数学分析选论》，这对学习后继课程和为打下牢固的数学基础，都是十分必要的.

编写本教材的指导思想是，对《数学分析》的主要理论部分，按本科部颁大纲的要求，力求把它的主要内容讲明，把它的主要思想、方法和技巧讲透，努力提高所编教材的科学性、先进性，使学员学习了本教材后能感到，在继续深造方面或在教学、科研工作方面，手中掌握了重要的基础知识和思考方法. 为此，本教材对《数学分析》的重要工具——极限方法，进了深入的讨论；对《数学分析》的重要基础——实数系连续性理论，进行了详细的讲解；对《数学分析》的主要研究对象——函数（包括构造函数），进行了更全面、更深入的认识；对《数学分析》的重要概念——一致连续、一致收敛，进行了重点分析；对《数学分析》的主要内容——微积分，进行了有重点的

分析、概括、总结、加深，等等.

教材中还总结了数学分析的思想、方法、技巧几十条，它们分散在有关定义、定理、例题及其注中，若学员能更好地理解它们，这对提高分析问题、解决问题的能力会有更大帮助.教材中有许多注、小结和学习指导，它们是对有关定义、定理、例题的进一步说明，为的是对学员的学习起到启发、引导、深入思考的作用；也为了使学员对所学知识能深刻理解，牢固掌握，灵活应用，从而提高观察能力、分析能力、想像能力、判断能力、推理能力、应用能力.这些能力对一位数学工作者来说是十分可贵的.因此，学员见到有关注、小结和学习指导时，多加思考，并且学会自己提出问题，自己解决问题，自己总结、提高、加注.读书就要这样由厚到薄，再由薄到厚，消化、吸取、长进.附录Ⅰ是为灵活运用所学知识、思想、方法、技巧再举例，这些例子大部分属初级科研成果，使本教材更具师范性、启发性、适用性.

本教材配备了一定数量的典型例题和难易适度的习题.这些习题都附有较详细的参考答案，以方便函授和音像教育方面的学员学习，但务必请学员先作题后看答案，否则将使学习效果减色.

由于水平所限，错误与不足之处一定不少，恳切希望专家、读者提出宝贵意见.

本教材副主编和编委的名次是以姓氏笔划为序.

编　者

1993年1月

目　　录

TJ11/229/20

第一章　关于极限与连续性理论

第二章 关于微分学与积分学理论

第三章 函数项级数

林 1

第四章 含参变量积分

第五章 隐 函 数

第六章　场论初步

习题解答

第一章　关于极限与连续性理论

极限方法及其理论是整个数学分析的基础．因此，要学好数学分析课，必须对极限理论能牢固掌握，深刻理解，灵活运用；对于极限理论及其应用中的某些思想、方法和技巧要善于总结、归纳，这样才能提高解决问题的能力．为此，本章将对实数性质、绝对值、不等式、数列极限与函数极限的概念与性质作一简单回顾，然后给出一些实数基本定理的严格证明，并通过一定数量的例题，进一步介绍如何证明不等式，如何应用极限的定义、性质、定理来解决有关极限等问题．

函数是数学分析的主要研究对象，本章对函数连续性的概念作一简单回顾后，对闭区间上连续函数的某些性质给出了详细证明．

§1.1　实数、绝对值、不等式

由于数学分析是在实数集内研究函数，所以在数学分析中经常利用实数的某些性质，绝对值的某些性质及其它某些不等式，现回顾如下：

一、实数的基本性质

1°　关于四则运算的封闭性　对实数集中的任意两个

实数进行加、减、乘、除(除数不为零)运算的结果仍是实数.

2° 有序性 任意两个实数a和b,一定满足下面三种关系:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

中的一种关系,且只能满足一种关系,这叫三歧性.

实数a、b、c若有$a < b$,$b < c$,则$a < c$,这叫传递性.

3° 实数集R具有阿基米德性质,即对任何两个正实数a,b,必存在自然数n,使得$na > b$.

4° 连续性 我们知道,自然数集N是有间隔的.有理数集Q却是稠密的,即任何两个有理数之间,必有无限多个有理数.而实数集R是连续的数集,或者说是完备数集,即实数集R可以和一条连续不断的数轴上的点建立一一对应关系,这就是通常所说实数集R不但是稠密的,而且没有空隙.

二、绝对值的基本性质

实数a的绝对值$|a|$定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geqslant 0 \text{ 时} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

关于实数的绝对值有下列性质:

1° $|a| = |-a| \geqslant 0$,当且仅当$a = 0$时,才有$|a| = 0$;

2° $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

3° 若$h > 0$,则$|a| < h \underset{(等价)}{\Leftrightarrow} -h < a < h$,同样,

若$h > 0$,则$|a| \leqslant h \Leftrightarrow -h \leqslant a \leqslant h$;

4° $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$(三角不等式),常用$|a| - |b| \leqslant |a - b|$或$|a| \leqslant |a - b| + |b|$;

5° $|ab| = |a| \cdot |b|$,$|a^n| = |a|^n$ (n为自然数);

6° $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$.

三、几个重要不等式

以下不等式，若无特别声明，n 为任意自然数.

1° 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 皆为正数，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n,$$

并且，式中的等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时成立.

2° $$\underset{\text{(调和平均)}}{\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}}\leqslant\underset{\text{(几何平均)}}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\leqslant\underset{\text{(算术平均)}}{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}},$$

其中 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

3° 贝努里(Bernoulli)不等式

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

4° 若 $x>-1$，则 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$.

5° $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n,\quad n>1$.

6° $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

7° $2!4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n,n>1$.

8° $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

9° $0<e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{3}{n}$.

10° $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

11° $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

下面仅证 1°、2°、6°、11°

1° 的证明 用数学归纳法证明.

$n = 1$ 时,命题显然成立.

$n = 2$ 时,因 $x_1x_2 = 1$,所以 $x_2 = \frac{1}{x_1}$,从而得

$x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2+1}{x_1} = \frac{(x_1-1)^2+2x_1}{x_1} \geqslant 2$. 当且仅当 $x_1 = x_2 = 1$ 时,上式等号成立.

今假设命题当 $n = k \geqslant 2$ 时成立,下证当 $n = k+1$ 时亦成立.

设 $x_1x_2\cdots x_kx_{k+1} = 1$,且不妨认为诸 x_i 不全相同,于是必有大于 1 者,又有小于 1 者,不妨设 $x_1 > 1, x_{k+1} < 1$,记 $x_1x_{k+1} = y_1$,则由 $y_1x_2x_3\cdots x_k = 1$ 和归纳法假设,可得

$$y_1 + x_2 + \cdots + x_k \geqslant k,$$

因此 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}$

$$= (y_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_1 + x_{k+1} - x_1x_{k+1} \qquad (1.1.1)$$

$$\geqslant k + 1 + x_1 + x_{k+1} - x_1x_{k+1} - 1 \qquad (1.1.2)$$

$$= k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_{k+1}) \geqslant k + 1.$$

显然,当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ 时,上式等号成立. 由数学归纳法得 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n$,等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时成立.

注:证明中的关键处是设 $x_1 > 1, x_{k+1} < 1, y_1 = x_1x_{k+1}$,及 (1.1.1),(1.1.2) 两式中的配项,配项法是数学分析中经常使用的技巧.

2° 的证明

令 $g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$, $h=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,

显然有 $\left(\dfrac{x_1}{g}\right)\left(\dfrac{x_2}{g}\right)\cdots\left(\dfrac{x_n}{g}\right)=1$

由不等式 1° 得

$$\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\cdots+\frac{x_n}{g}\geqslant n,$$

即 $$h=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}. \qquad (1.1.3)$$

同理,若令 $g_1=\sqrt[n]{\dfrac{1}{x_1}\dfrac{1}{x_2}\cdots\dfrac{1}{x_n}}$,利用不等式 1° 可得

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}. \qquad (1.1.4)$$

由式(1.1.3),(1.1.4) 得不等式 2°.

注:2° 的证明技巧是引进符号 g,归结为 1°,这是归结法,归结法是数学分析中常用的方法之一. 2° 的左、右两个不等式是等价不等式,留给学员自己证明.

6° 的证明

设 $$A=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\text{有}$$

$$A=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$
$$<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}}=\frac{1}{A(2n+1)},$$

即 $$A^2<\frac{1}{2n+1},$$