

悬索和吊桥及薄壁杆件理论

吴恒立 编著

重 庆 大 学 出 版 社

前 言

本书系统、简明地阐述了悬索和吊桥以及薄壁杆件的计算理论。

第一章和第二章讲述悬索内力分析及其在吊装上的应用，它既是后面内容的基础，又可直接用于工程吊装的设计计算，经多次实际工程使用，效果良好。这部份内容，反映了作者的研究成果。

第三章、第四章和第五章讲述吊桥理论，包括线性、非线性、振动、空气动力稳定性等内容，是吊桥设计计算的理论基础。

吊桥的加劲梁常采用薄壁杆件，第六章和第七章讲述开口和闭口薄壁杆件的实用计算理论，包括箱形梁的剪力滞后效应以及考虑畸变的计算等内容。这部份内容既与吊桥的设计计算有关，又可以独立成篇。

本书力求做到力学概念和工程实用并重，说理清楚，深入浅出，推导详尽。由于篇幅限制，某些未及详细讨论的内容，则以阐述力学和数学概念为主，并推荐了必要的参考资料。书中各部份内容既互相呼应，又具有独立性，能适应较多方面的需要。

本书可作为道路、桥梁、水利、建筑等土建类专业，高年级本科生和研究生的教材或教学参考书，也适合有关科研和工程单位的技术人员参考。全书承我院桥梁教研室瞿光义审阅，特致谢忱。

吴恒立

1991年11月

于重庆交通学院

内 容 提 要

本书系统而简明地阐述了悬索和吊桥的计算理论, 以及薄壁杆件的计算理论。第一、二两章讲述悬索内力分析及其在吊装上的应用, 它既是后面内容的基础, 又可直接用于工程吊装的设计计算, 反映了作者的研究成果。第三至五章讲述吊桥理论, 包括线性、非线性、振动、空气动力稳定性等内容, 是吊桥设计计算的理论基础。第六、七两章讲述开口和闭口薄壁杆件的实用计算理论, 包括剪力滞后效应以及考虑畸变的计算等新内容, 它既与吊桥加劲梁的设计计算有关, 也可以独立成篇。

本书可作为道路、桥梁、建筑、水利等专业高年级本科生和研究生的教材或教学参考书, 也适合有关科研和工程单位的技术人员参考。

悬索和吊桥及薄壁杆件理论

吴恒立 编 著

责任编辑 蒋怒安

•

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆大学出版社印刷厂印刷

•

开本: 787×1092 1/32 印张: 5.5 字数: 123 千

1992年10月 第1版 1992年10月 第1次印刷

印数: 1—3000

标准书号: ISBN 7-5624-0514-X 定价: 3.20元
TU·17

目 录

第一章 悬索静力分析	(1)
§1-1 基本概念.....	(1)
§1-2 计算悬索内力的近似法.....	(2)
§1-3 计算悬索内力的精确法.....	(11)
§1-4 支座位移及温度变化的影响.....	(14)
§1-5 用能量法计算悬索内力.....	(16)
第二章 悬索在吊装上的应用	(20)
§2-1 吊装用单跨悬索的计算.....	(20)
§2-2 吊装用多跨悬索的计算.....	(21)
§2-3 算例.....	(26)
§2-4 钢缆强度验算.....	(34)
习题.....	(37)
第三章 吊桥理论	(39)
§3-1 未加劲式吊桥的计算.....	(39)
§3-2 加劲式吊桥的偏度理论.....	(39)
§3-3 用富氏级数处理的偏度理论.....	(47)
§3-4 线性偏度理论.....	(56)
第四章 加劲式吊桥的铅垂振动	(64)
§4-1 加劲式吊桥的铅垂固有振动.....	(64)
§4-2 加劲式吊桥的铅垂强迫振动.....	(72)
§4-3 作为有限自由度体系的加劲式吊桥上部结构 的振动分析.....	(80)
第五章 吊桥的空气动力稳定性	(88)

§5-1 基本概念..... (88)

§5-2 吊桥空气动力稳定性的计算..... (92)

§5-3 提高吊桥空气动力稳定性的措施..... (95)

第六章 开口薄壁杆件..... (96)

§6-1 开口薄壁杆件的约束扭转..... (96)

§6-2 开口薄壁杆件的弯扭屈曲 (120)

§6-3 梁的侧倾 (129)

第七章 闭口薄壁杆件 (133)

§7-1 闭口薄壁杆件的自由扭转 (133)

§7-2 闭口薄壁杆件的约束扭转 (138)

§7-3 箱形梁的剪力滞后效应 (155)

§7-4 考虑畸变箱形梁的约束扭转 (162)

参考文献 (169)

第一章 悬索静力分析

§1-1 基本概念

悬索具有柔性，是变化体系。即悬索的形状和尺寸将随荷载的大小、位置和分布规律等的不同而改变。我们知道，变化体系不遵守力的叠加原理，其荷载与变形间的关系是非线性的。因此悬索的计算较遵守叠加原理的线性变形体系复杂，例如影响线对于悬索就不能随便应用。

换言之，悬索的计算是几何非线性问题。因为，尽管悬索材料的应力-应变关系（本构关系）是线性弹性的，但应变与位移间的关系却是非线性的，而且平衡方程式要列在已变形的物体上。

计算悬索内力，常用两个基本假设：

(1) 悬索是绝对柔性的，即悬索的任一截面均不能承受弯矩。但在验算悬索的强度时，有时要考虑其刚度的影响。

(2) 悬索的材料服从虎克定律。

计算悬索内力有两种方法：一为假定荷载沿跨长分布的近似法，当荷载沿跨长均匀分布时亦称为抛物线法；另一为按实际情况考虑——即荷载沿索的弧长分布的精确法，当荷载沿索的弧长均匀分布时即为悬链线法

下面分别介绍这两种方法。

§1-2 计算悬索内力的近似法

此法假定荷载沿跨长 l 分布。

图1-1a表示两支座不在同一水平位置，具有高差 c ，并受沿跨长 l 分布的任意垂直向下的荷载作用的悬索 AB 。

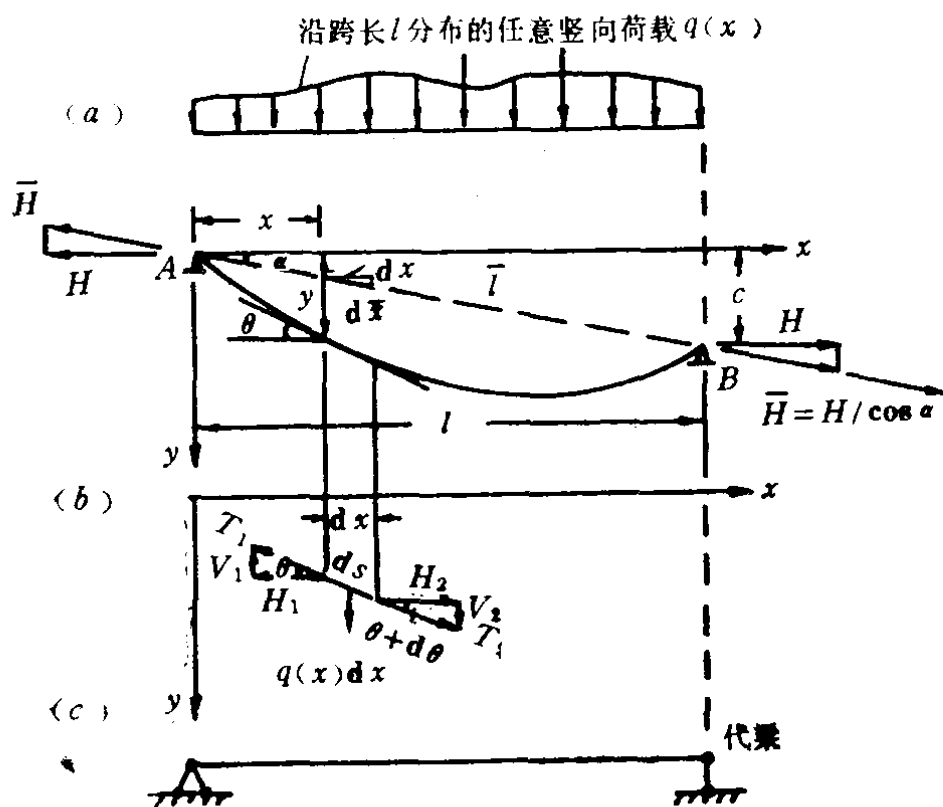


图1-1

今研究任一小段悬索元素 ds 的平衡(图1-1b)。因悬索不能承受弯矩，故元素 ds 上只有三个力作用，悬索的轴向内力 T_1 、 T_2 和竖向荷载 $q(x)dx$ 。由平衡条件 $\sum x=0$ 得

$$T_1 \cos \theta = T_2 \cos (\theta + d\theta)$$

即 $H_1 = H_2 = H$

此式表明悬索在任一截面上的横拉力 H (轴向内力 T 的水平投影)为常数。

由平衡条件 $\Sigma y = 0$ 得

$$-V_1 + V_2 + q(x)dx = 0$$

因为 $V_1 = H \tan \theta = H \frac{dy}{dx}$

$$V_2 = V_1 + dV = H \frac{dy}{dx} + d \left(H \frac{dy}{dx} \right)$$

$$= H \left[\frac{dy}{dx} + d \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]$$

故 $-H \frac{dy}{dx} + H \frac{dy}{dx} + H d \left(\frac{dy}{dx} \right) + q(x)dx = 0$

即 $H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q(x)$

此即荷载沿跨长 l 分布时, 悬索的平衡微分方程式。积分得

$$Hy = - \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx + D_1 x + D_2$$

此即荷载沿跨长 l 分布时, 悬索的平衡方程式, 式中积分常数 D_1 和 D_2 由悬索的边界条件确定。

容易发现, 这种悬索与跨长和荷载都和悬索相同的简支梁 (以后简称代梁, 图 1-1c) 有某种内在联系: 如将悬索上的集中荷载也视为分布在很短距离上的分布荷载, 则

$$- \int_0^x q(x) dx = \text{代梁在 } x \text{ 截面的剪力 } Q$$

注意到悬索不可能受集中力偶作用, 故

$$- \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx = \int_0^x Q dx = \text{代梁在 } x \text{ 截面的弯矩 } M$$

根据图 1-1a 所示悬索的边界条件, 可确定其积分常数 D_1 和 D_2 如下:

由 $x=0$ 时 $y=0$ 和代梁对应截面弯矩 $M_{x=0}=0$ 得

$$D_2=0$$

由 $x=l$ 时 $y=c$ 和代梁对应截面弯矩 $M_{x=l}=0$ 得

$$D_1 = H \frac{c}{l}$$

因此, 图1-1a所示悬索, 从 x 轴算起的悬索竖标 y 为

$$y = \frac{M}{H} + c \frac{x}{l} \quad (1-1)$$

式中, c 为支坐高差, M 为代梁在 x 截面的弯矩.

式(1-1)对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} + \frac{c}{l} \quad (1-2)$$

式中, $Q = \frac{dM}{dx}$ 是代梁在 x 截面的剪力.

因 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, 故索长 L 为

$$L = \int_0^L ds = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

将 $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$ 展成级数

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!} \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} \\ &\times \left(\frac{dy}{dx}\right)^6 + \dots = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \\ &+ \frac{1}{16} \left(\frac{dy}{dx}\right)^6 + \dots \end{aligned}$$

当支座高差 c 远小于跨长 l ，代梁剪力 Q 远小于横拉力 H 时， dy/dx 的值很小，略去高阶微量得

$$\begin{aligned} L &\approx \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \\ &= l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{Q}{H} + \frac{c}{l} \right)^2 dx \\ &= l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{c}{Hl} \int_0^l Q dx + \frac{c^2}{2l^2} \int_0^l dx \end{aligned}$$

注意到 $\frac{c}{l} = \operatorname{tg} \alpha$ (图 1-1a)， $\int_0^l dx = l$ ， $\int_0^l Q dx$ 是代梁剪力图的面积，而在任意竖向荷载作用下代梁剪力图的面积为零，故

$$L \approx l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{l}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (1-3)$$

当 $\alpha < 20^\circ$ ，用此式术索长 L 能得到可靠的结果。当支座在同一水平位置时($c=0$)，只需将 $\operatorname{tg} \alpha = 0$ 代入式(1-3)即可。还要指出，推导式(1-3)时略去的高阶微量是负值，故由式(1-3)求出的索长值偏大。

如 α 较大，由式(1-3)计算的索长数值，误差很大，此时，能得到可靠结果的近似算法是将两支坐联线 AB 的长度 $\overline{l}$ 作为跨长，再按支坐高差 $c=0$ 的悬索计算索长，即

$$L \approx \overline{l} + \frac{1}{2\overline{H}^2} \int_0^{\overline{l}} \overline{Q}^2 d\overline{x} \quad (1-3a)$$

由图1-1a知：式中 $\overline{l} = l/\cos \alpha$ ，悬索轴向内力 T 在 AB 方向的投影 $\overline{H} = H/\cos \alpha$ ，沿 $\overline{x}$ 轴（即 AB 联线）的微段长度 $d\overline{x} = dx/\cos \alpha$ 。再注意到 $\overline{Q}$ 是代梁剪力 Q 在垂直于 $\overline{x}$ 轴方向的投影，即 $\overline{Q} = Q \cos \alpha$ 。代入上式，即得 $\alpha > 20^\circ$ 时索长公式的更便于使

用的形式

$$L \approx \frac{l}{\cos \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx \quad (1-3b)$$

式中, l 、 H 、 Q 仍是悬索的水平跨长、横拉力和代梁剪力。

横拉力 H 是悬索任意截面轴向内力 T 的水平分力

$$H = T \cos \theta$$

即
$$T = \frac{H}{\cos \theta} = H \sec \theta = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \quad (1-4)$$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$, 由式(1-2)得

$$T = \sqrt{H^2 + \left(Q + H \frac{c}{l} \right)^2} \quad (1-4a)$$

由于悬索的代梁剪力 Q 总在某支座截面处最大, 故悬索的最大轴向内力 $T_{\max}$ 发生在该支座截面处。

应用以上各式的前提条件是假定荷载沿跨长 l 分布。需要指出, 它们尚未最后解决悬索的计算问题。因各式中均包含横拉力 H , 而 H 又是与悬索所取的位置有关系的。例如图 1-2a 所示支座位于不同高度上的悬索, 已知跨中垂度为 f (悬索跨中截面与两支座联线间的竖向距离), 当悬索受沿跨长 l 均布的荷载 q 作用时, 由式(1-1)知

$$H = -\frac{M}{y - c \frac{x}{l}}$$

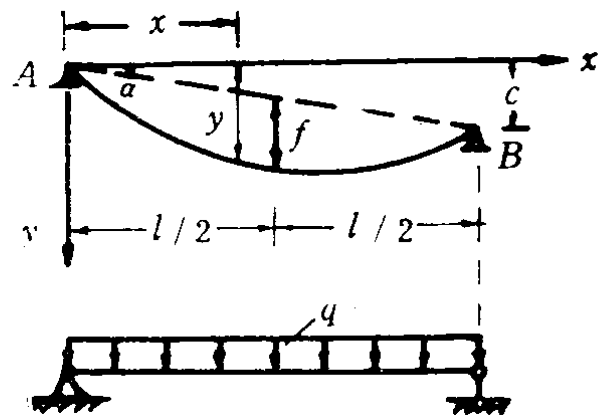
以代梁中点弯矩 $M = \frac{ql^2}{8}$ 及悬索跨中坐标 $x = \frac{l}{2}$, $y = f + \frac{c}{2}$ 代入得

$$H = \frac{ql^2}{8f}$$

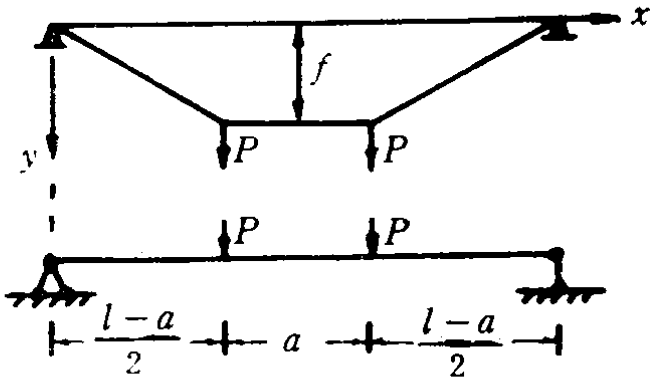
当 f 取的值不同时, H 也就不同。

又如图 1-2b 所示悬索, 受间距为 a 的两个集中力 P 作用时 (悬索两支座高差 $c=0$)

$$H = \frac{\text{代梁跨中截面弯矩 } M}{\text{垂度 } f} = \frac{P}{2f}(l-a)$$



(a)



(b)

图1-2

当 f 取不同的值时, H 亦将不同。

悬索通常在给定的初始状态的基础上进行计算, 初始状态的荷载已知, 索的位置已知 (例如垂度 f_0 已知), 从而初始状态的横拉力 H_0 以及与 H_0 有关的一切量均为已知, 需要求悬索在初始状态的基础上, 受一附加荷载时所产生的内力, 以及此时悬索所取的形状和位置。

此问题的困难在于悬索受附加荷载后的几何形状与初始状态的几何形状不同, 因此, 必须在每一附加荷载的情况下确定索的新的几何形状, 才能进行计算。由式 (1-1) 知

$$\begin{aligned} \text{受附加荷载后索的形状} &= \text{受附加荷载后代梁的弯矩 } M_1 \\ \text{(由 } x \text{ 轴算起的竖标)} & y_1 = \frac{\text{受附加荷载后索的横拉力 } H_1}{\text{受附加荷载后代梁的弯矩 } M_1} \end{aligned}$$

$$+ c \frac{x}{l}$$

代梁弯矩 M_1 不难确定, 但新的横拉力 H_1 未知, 故不能确定新的形状 y_1 。此外, 由悬索的平衡条件, 也不能确定 H_1 , 因悬索任一点的竖标 y_1 均为未知之故。

为了解决上述问题, 必须引用悬索的变形条件, 以下分两种情况进行讨论。

(一) 不考虑悬索伸长影响的近似法

比较计算表明, 只要悬索的垂跨比 $\frac{f}{l} < \frac{1}{10}$, 就可假定荷载沿跨长 l 分布。对于 $\frac{1}{20} < \frac{f}{l} < \frac{1}{10}$ 的悬索, 又可以认为悬索的长度 L 不变, 即可以不考虑悬索弹性伸长的影响。这样, 利用悬索在初始状态的长度 L_0 应该等于受附加荷载后的长度 L_1 的条件, 即可解出受附加荷载后的横拉力 H_1 , 从而完成悬索受附加荷载作用的计算问题。

以下按此条件推导悬索受附加荷载后的横拉力 H_1 的计算公式。

设悬索在初始状态的已知横拉力为 H_0 , 初始荷载是沿跨长 l 分布的任意已知竖向荷载, 则悬索在初始状态的长度 L_0 由式 (1-3) 为

$$L_0 = l + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx + \frac{l}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

式中, Q_0 为初始状态的代梁剪力。

受附加荷载后 索长 L_1 为

$$L_1 = l + \frac{1}{2H_1^2} \int_0^l Q_1^2 dx + \frac{l}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

式中 H_1 和 Q_1 是悬索受附加荷载后的横拉力和代梁剪力。

因假设悬索不能伸长，即 $L_0=L_1$ ，故

$$\frac{1}{2H_1^2} \int_0^l Q_1^2 dx = \frac{1}{2H_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx$$

解得
$$H_1 = H_0 \sqrt{\frac{\int_0^l Q_1^2 dx}{\int_0^l Q_0^2 dx}} \quad (1-5)$$

有时采用的初始状态是悬索受沿跨长 l 均布的荷载 q 作用，初始状态的跨中垂度 f_0 预先给出。这时，初始横拉力 $H_0 = \frac{gl^2}{8f_0}$ ，代梁剪力 $Q_0 = \frac{ql}{2} - qx$ 及 $\int_0^l Q_0^2 dx = \frac{1}{12} q^2 l^3$ ，代入式(1-5)得

$$H_1 = \frac{\sqrt{3}l}{4f_0} \sqrt{\int_0^l Q_1^2 dx} \quad (1-5a)$$

(二) 考虑悬索伸长影响的近似法

$\frac{f}{l} < \frac{1}{20}$ 的小垂度悬索，假设荷载沿跨长 l 分布是正确的。但比较计算表明，此情况尚须考虑悬索的弹性变形，即需考虑悬索受力后伸长的影响。

因悬索轴向拉力 $T = \frac{\text{横拉力 } H}{\cos \theta}$ 及 $ds = \frac{dx}{\cos \theta}$ ，且悬索材料服从虎克定律，故悬索的弹性伸长 ΔL 为

$$\Delta L = \int_0^{\text{索长 } L} \frac{T ds}{EA} = \int_0^{\text{跨长 } l} \frac{H dx}{EA \cos^2 \theta}$$

又
$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(\frac{Q_0}{H} + \frac{c}{l} \right)^2$$

故

$$\Delta L = \frac{H}{EA} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{Q}{H} + \frac{c}{l} \right)^2 \right] dx \quad (1-6)$$

在 $\frac{f}{l} < \frac{1}{20}$ 的小垂度而且是小高差情况，虽需考虑伸长影

影，但因 θ 很小，可近似地认为 $\cos\theta = 1$ ，此外又假设悬索刚度 EA 为常数且在受力过程中保持不变，则

$$\Delta L = \frac{H}{EA} \int_0^l dx = \frac{Hl}{EA} \quad (1-6a)$$

根据悬索没有荷载作用时的长度为定值，有关系

$$\begin{aligned} l + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx + \frac{l}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{H_0 l}{AE} \\ = l + \frac{1}{2H_1^2} \int_0^l Q_1^2 dx + \frac{l}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{H_1 l}{EA} \end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned} H_1^2 - \left(H_0 - \frac{EA}{2lH_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx \right) H_1^2 \\ - \frac{EA}{2l} \int_0^l Q_1^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (1-7)$$

式中除 H_1 外均为已知，故由此可解得 H_1 。

积分 $\int_0^l Q^2 dx$ ，可以利用图形相乘法计算。设悬索受几种荷载作用，则对应于每种荷载均可画出代梁的剪力图，设为 Q_1 、 Q_2 、…等等，则代梁总的剪力为

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots$$

这时

$$\int_0^l Q^2 dx = \int_0^l Q_1^2 dx + \int_0^l Q_2^2 dx + 2 \int_0^l Q_1 Q_2 dx + \dots$$

只要右方各积分中，有一个 Q_i 是直线图形，则该积分就可以用图形相乘法算出。

§1-3 计算悬索内力的精确法

大垂度的悬索，必须按精确法计算，即承认荷载是沿索

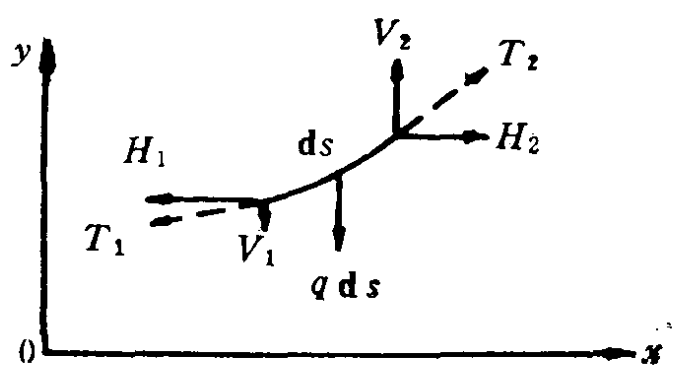


图1-3

长分布的。今以沿索长受均布荷载 q 作用的悬索为例，说明精确法公式的来源和应用。

从悬索中取一无限小段 ds ，研究其平

衡（图1-3）。

由 $\sum x = 0$ 得

$$H_1 = H_2 = H$$

由 $\sum y = 0$ 得

$$V_2 - V_1 - q ds = 0$$

即 $dV = V_2 - V_1 = q ds$

又 $\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx}$ ，故

$$\frac{dV}{dx} = H \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q ds}{dx}$$

以 $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ 代入得

$$Hy'' = q\sqrt{1+y'^2}$$

悬索的平衡微分方程式为

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{q}{H} dx$$

积分得 $\text{sh}^{-1}y' = \frac{q}{H}(x+D_1)$

即 $\frac{dy}{dx} = \text{sh} \frac{q}{H}(x+D_1)$ (1-8)

再积分得悬索的平衡方程式

$$y = \frac{H}{q} \text{ch} \frac{q}{H}(x+D_1) + D_2$$
 (1-9)

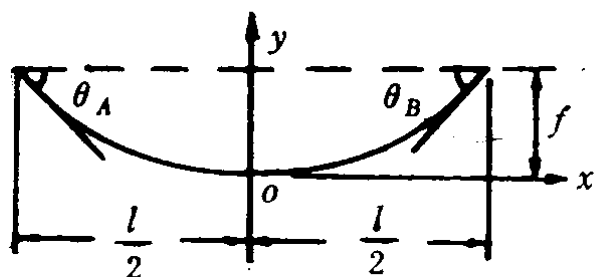


图1-4

式中 D_1 、 D_2 均为积分常数，与坐标系的选择有关。

设悬索两支点在同一水平位置，将坐标原点设在悬索的最低点，并使 x

轴和悬索相切，如图1-4所示。

当 $x=0$ 时 $\frac{dy}{dx}=0$ ，由式(1-8)得

$$\text{sh} \frac{q}{H}(0+D_1)=0, D_1=0$$

当 $x=0$ 时 $y=0$ ，由式(1-9)得

$$D_2 = -\frac{H}{q}$$

因此 $\frac{dy}{dx} = \text{sh} \frac{qx}{H}$ (1-8a)