

V 241.5/17

动力调谐陀螺仪

林士谔 等 编著

533334



国防工业出版社

动力调谐陀螺仪

林士谔 等 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书较全面地阐述了动力调谐陀螺仪原理、结构特点和组成，误差分析和补偿，元部件和总体的设计与测试等。

全书共分十一章。前五章介绍调谐陀螺仪力学原理、运动方程、误差及补偿理论，第六章至第九章介绍总体与元部件设计和计算。第十章及第十一章介绍调谐陀螺仪测试技术。

本书可作为陀螺仪与惯导专业高年级学生和研究生的教学参考书，也可供从事陀螺仪及惯性导航方面的工程技术人员参考。

动力调谐陀螺仪

林士溥 等 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

◆

850×1168¹/₃₂ 印张10³/₄ 274千字

1983年11月第一版 1983年11月第一次印刷 印数：0,001—1,200册

统一书号：15034·2628 定价：1.35元

前 言

动力调谐陀螺仪是目前已获得广泛应用的惯导级陀螺仪之一。其精度可与液浮陀螺仪相当，而它的体积较小、成本较低、平均故障时间较长。自六十年代中期以来，调谐陀螺仪已广泛应用于战术和战略导弹、航空与航天飞行器以及舰船上。国内外虽不断发表有关动力调谐陀螺仪的科技文献，但讲述这类陀螺仪的专著至今尚未见到。

本书是在参考国内外文献的基础上，以“动力调谐式挠性陀螺仪”（1976年，北京航空学院讲义）为基础，并结合北京航空学院的科研实践编写而成的。书中包括动力调谐陀螺仪的力矩方程、误差分析与补偿，陀螺仪测试，陀螺仪总体与元部件的设计等方面内容。在编写过程中注意了全书内容的系统性和完整性。

参加本书编写工作的有：林士谔（序、第一、二、四、五章）、酆吉臣（第二、三、九章）、范跃祖（第六、十、十一章）、陈哲（第六、七章）、张清涛（第八章）、张本琳（第一章§1.1）、罗先和（第六、十一章动、静平衡部分）。

参加本书有关章节校核的除前述同志外，尚有李淑信同志。各章的编排和符号统一由范跃祖同志完成。全书最后由陈哲同志统一修改、定稿。

孙奎兰同志承担了本书的制图工作。在本书的编写过程中还得到了校内外不少同志的支持与帮助，在此一并致谢。

本书各章内容可能不同程度地存在缺点和错误，望读者批评指正。

目 录

序	I
第一章 陀螺系统动力学基础	7
§ 1.1 角动量与动量矩定理	7
§ 1.2 转子式陀螺仪的力学方程	11
§ 1.3 精密陀螺的力学方程与传递函数方块图	14
§ 1.4 陀螺稳定平台稳定性与性能简述	21
第二章 动力调谐陀螺开环工作原理	27
§ 2.1 细颈式挠性陀螺的工作原理	27
§ 2.2 动力调谐陀螺的原理结构与坐标系	33
§ 2.3 平衡环的扭摆运动与坐标转换关系式	40
§ 2.4 平衡环补偿力矩与二次谐波力矩	44
§ 2.5 动力调谐陀螺的运动方程	56
§ 2.6 动力调谐陀螺的特性分析	60
第三章 动力调谐陀螺的误差分析	78
§ 3.1 “理想”动力调谐陀螺的特性	78
§ 3.2 弹性约束项引起的漂移误差	80
§ 3.3 驱动轴具有两倍旋转频率的角振动引起的漂移误差	85
§ 3.4 线加速度引起的漂移误差	89
§ 3.5 线振动引起的漂移误差	96
§ 3.6 不等弹性引起的漂移误差	100
§ 3.7 应用双平衡环结构消除 $2N$ 角振动误差的简化原理	105
第四章 动力调谐陀螺闭环传递函数与补偿线路	109
§ 4.1 双自由度调谐陀螺的闭环力矩方程与稳定性	109
§ 4.2 调谐陀螺复数传递函数与典型补偿线路	113
§ 4.3 闭环放大系数 K 值算法与频率响应曲线	119
§ 4.4 捷联调谐陀螺闭环补偿线路方块图	124
§ 4.5 调谐陀螺再平衡回路设计原理	131

第五章	动力调谐陀螺误差模型与补偿原理	139
§ 5.1	应用矩阵法推导误差力矩方程	139
§ 5.2	闭环传递函数方块图与矩阵方程	142
§ 5.3	动态误差模型	150
§ 5.4	其他误差力矩	155
§ 5.5	陀螺误差的补偿	160
附录一		173
第六章	动力调谐陀螺的总体设计	176
§ 6.1	调谐陀螺的两种工作状态与设计原则	176
§ 6.2	调谐陀螺的总体布局	178
§ 6.3	调谐陀螺的温控、密封、屏蔽等问题	184
§ 6.4	调谐陀螺总体设计实例	190
第七章	动力调谐陀螺的角度信号传感器	198
§ 7.1	调谐陀螺对传感器的要求	198
§ 7.2	传感器感受的间隙变化量与转子转角间的关系	200
§ 7.3	两种常用的传感器	202
§ 7.4	调谐陀螺的零位	210
§ 7.5	传感器的误差分析	211
§ 7.6	电感传感器的设计	219
§ 7.7	传感器的试验	225
第八章	动力调谐陀螺的力矩器	229
§ 8.1	调谐陀螺对力矩器的要求	229
§ 8.2	调谐陀螺力矩器的类型与选择	231
§ 8.3	永磁式力矩器的设计	236
§ 8.4	大力矩永磁式力矩器	247
§ 8.5	永磁式力矩器的测试	249
§ 8.6	永磁式力矩器的误差及补偿	250
第九章	动力调谐陀螺的挠性支承	255
§ 9.1	挠性接头的要求与组合式接头	255
§ 9.2	整体式挠性接头	260
§ 9.3	接头挠性杆角位移刚度与承载能力	269
§ 9.4	挠性接头材料	277

第十章	动力调谐陀螺的调整与参数测定	280
§ 10.1	调谐陀螺测试前的对准与动、静平衡	280
§ 10.2	调谐频率的测定及精动平衡	290
§ 10.3	调谐陀螺性能参数测定	298
第十一章	动力调谐陀螺误差模型及其测定	307
§ 11.1	调谐陀螺漂移误差模型	307
§ 11.2	静态误差模型系数的测定方法	311
§ 11.3	八位置试验	314
§ 11.4	多位置试验	318
§ 11.5	多位置试验的优化设计	328
参考文献		338

序

本书主要介绍干式动力调谐陀螺 (Dynamically Tuned Gyro 或 Dry Tuned Gyro 缩写为 DTG, 以后简称为调谐陀螺) 的应用理论、仪表总体及元部件的设计和测试方法。自从六十年代中期, 动力调谐陀螺开始获得了广泛应用。国外虽先后发表了许多有关这种陀螺的专利和论文, 但迄今为止尚未出版过关于调谐陀螺的著作或比较完整的教学参考书。调谐陀螺是继液浮和气浮陀螺之后, 获得广泛应用和批量生产的新型精密陀螺仪。它已普遍地应用于民用和军用飞机, 各种战术导弹以及中远程战略导弹内 (其中包括分导式重返大气层多弹头导弹在内)。不少国外文献都得出这样的结论: 如果把液浮陀螺看作是五十年代制成的用于惯性导航和制导系统中的第二代惯性级精密陀螺仪, 那么, 动力调谐陀螺应当看作是六十年代中期具有突破性的第三代惯性级精密陀螺仪。

表 1 平台式惯导系统性能比较

系统型号	平台类型	惯导系统元部件			惯导系统主要指标				使用机种
		陀螺	加速度计	计算机	精度 (公里/时)	可靠性 (小时)	重量 (公斤)	反应时间 (分)	
LN-15	四环	双自由度液浮陀螺	力平衡式	数字微分分析器	小于 1.85	1500	21.4	约 5	B-52 及 B-1
SKN-2400	四环	双轴调谐陀螺	力平衡式	SKC-300 通用计算机	小于 1.85	300	8.6	2	B-52
AN/ASN-101	四环	双自由度静电陀螺	液浮摆式 DDG-177 型	AD-601 型计算机	地面 0.146 空中校准后 0.278	400	70.8		B-52 或 B-1 (计划中)

相对液浮陀螺而言, 调谐陀螺具有下列特点: 元部件少、体积小、重量轻、起动时间短、消耗功率小、寿命长、可靠性高等

优点。表 1 示出美国七十年代战略轰炸机上使用的三种精密陀螺制成的惯导系统性能指标比较。

从上表可以看出，在相同定位精度条件下，调谐陀螺制成的惯导系统比液浮陀螺惯导系统故障间隔时间长一倍，而重量只有液浮陀螺惯导系统的三分之一。此外，系统的起动时间较短、耗电功率少、造价较低。静电陀螺惯导系统虽有定位精度高的特点，但体积大、故障间隔时间短、可靠性差，以致限制了应用的范围。

一、陀螺仪的类型与发展过程

我国的杂技表演中，很早就利用了类似陀螺仪作高速旋转的物体，如空竹、转碟和水流星等。陀螺仪英文为 Gyroscope，字音上和陀螺有类似之处，早期使用回转仪的译名已由陀螺仪取代。最近出现的激光陀螺和振动陀螺都没有高速回转体，使用回转仪这个译名更显得不够恰当了。

早期使用的陀螺指示器，称为框架式常规陀螺仪。常规陀螺造价低，而用途却相当广泛，如地平仪、方向仪、转弯指示仪以及全姿态陀螺等。随着电子技术不断发展，常规陀螺指示器上，装置了测量和输出微角度信号的传感器和放大器，把飞机或导弹的偏角转化为电信号并加以放大输入至控制飞机的航向或姿态角的舵机内，使飞机或导弹按预定航线或轨道飞行，例如第二次世界大战末期出现的 V-1 飞航式导弹和 V-2 型弹道式导弹等。最近几十年，由陀螺传感器制成的稳定装置，广泛应用在飞机、坦克及军舰上，用以稳定瞄准具、雷达、照像机或火炮，以提高射击命中率。由陀螺传感器制成的自动驾驶仪也可驾驶飞机或军舰，提高控制精度和减轻驾驶员的繁重负担。

为了提高常规陀螺仪的测量精度和抗震能力，第二次世界大战后，出现了气浮和液浮陀螺。由于在这种陀螺中采用了悬浮液体（或气体），悬浮体的质心与支承点（或浮心）接近重合，从而使轴承所承受的压力接近于零。可以用轴尖和宝石轴承将其支承在外框架及仪表壳体上，漂移误差可以下降几个数量级，抗震能

力也大大提高。此外，在陀螺仪的电子线路中，通过传感器、放大器、补偿线路和力矩器产生的闭环反馈测量的参数（例如力矩器反馈电流）可以将测量精度也提高几个数量级。这种陀螺仪不但大量使用在各种战术导弹，中、远程运载火箭和洲际导弹中，作为制导系统的元部件，也用作飞机、潜艇和水面舰艇内的惯性导航系统中，气浮和液浮陀螺被称为第二代惯性级精密陀螺仪。六十年代中期，又成功地研制出没有内外框架、将转子悬挂在与驱动电机隔开的弹性支承上的挠性陀螺。它利用动力调谐或其他补偿方法抵消弹性支承的正弹性，使转子所受到的弹性约束近似为零。其测量精度可与液浮陀螺相匹敌，而体积重量、耗电功率和造价却大大下降，成为批量生产的第三代精密陀螺仪。目前，除了尚处在研制阶段的激光陀螺外，挠性陀螺正受着国内外科研和生产工厂的重视，并且达到批量生产的成熟阶段。

二、国外研制和应用调谐陀螺的概况

1. 美国卡尔福公司 1958 年研制了磁补偿和机械惯性补偿式细颈挠性陀螺。陀螺的最小漂移误差达到 0.015 度/时。细颈式挠性陀螺尚未投入批生产，就被动力调谐挠性陀螺所代替。目前，中等精度的细颈式挠性陀螺仍在应用中。卡尔福公司生产的 KF-70 型（后改称 SKN-2400）系列陀螺，1969 年前后，广泛应用于表 2 内各种飞机中。该公司于 1972 年，将 KF-70 型导航平台改进为 SKN-2600 型，惯导系统重量从 24.9 公斤减至 10.58 公斤，体积从 $25.7 \times 19.4 \times 55.6$ 厘米³ 缩小为 $19.5 \times 19.73 \times 31.91$ 厘米³。SKN-2600 型惯导平台，已为轻型战斗机 P-530、法国的幻影 F-1 歼击机及瑞典的 JA-37 截击机所采用。SKN-2600 的民用型 GAMMA-1 导航装置已应用于小型海湾式喷气民航机上。到 1973 年底，卡尔福公司已先后生产了二千套以上由调谐陀螺制成的惯导系统。

2. 美国利登公司在大量生产使用双自由度液浮陀螺为元部件的惯导装置（如 LN-3、LN-9、LN-12、LTN-51、LTN-58、LTN-101、LTN-104、LTN-113 等）后，也在 1971 年生产了

表 2 调谐陀螺导航平台型号

军用飞机及导弹		民用飞机	
飞机型号	导航平台型号	飞机型号	导航平台型号
P-3-C	AN/ASN-84	DC-10	INS-61B
A7D/E	AN/ASN-90	L-1011	INS-60
F-105D	AN/ASN-100	DC-8	INS-60
战术导弹SRAM	AGM-69A	波音707	INS-60

表 3 LTN-51与LTN-72对比

	平台重量 (公斤)	体积 (厘米 ³)	造价 (万)(美元)
LTN-51型	6.81	25.4 × 20.3 × 18.5	12~15
LTN-72型	3.86	19.3 × 17 × 13.2	6.5

以调谐陀螺G-1200、G-2、G-4型和挠性加速度计A-100、A-4为元部件的惯导系统。1970年生产的LN-30和1971年生产的LN-33型以调谐陀螺为部件的惯导装置，共重21.9公斤，耗电400瓦。1972年利登公司生产的调谐陀螺制成的惯导平台LTN-72型和该公司用双自由度液浮陀螺制成的LTN-51型的造价和体积如表3所示。可以看出，由调谐陀螺制成的惯导系统不但体积小、重量轻，而且造价也低一半左右。更为突出的是调谐陀螺的耗电量比液浮陀螺低得多。利登公司生产的多功能调谐陀螺的重量只有80.8克，外形尺寸为 $\phi 2.54 \times 3.8$ 厘米，耗电量仅1.25瓦。计算机耗电25瓦，精度可达10度/时至0.1度/时。美国台利旦公司制造的捷联调谐陀螺精度达0.001度/时，外形尺寸为 $\phi 7.62 \times 7$ 厘米，重约0.9公斤。捷联惯导系统重13.6公斤。表4和表5示出使用调谐陀螺制成的惯导系统的某些性能数据。

3. 苏联在“火箭技术问题”杂志上对美国 and 西欧研制和生产的调谐陀螺和惯导系统作了全面的调查，列出了美国三家主要生产和研制调谐陀螺的有关技术数据，如表4所示。参加生产调谐陀螺的美国公司还有斯派里，杭尼威尔等十几家公司。美国在

表 4 美国三家公司生产的调谐陀螺的技术数据

公司名称	利	登	公	司	卡	福	台
导航系统或陀螺型号	LN-30	LN-33	LTN-72	LTN-74 (LN-40)	SKN-2400	SKN-2600	SDG-1
生产年代	1970	1971	1972	1974	1969	1972	1972
系统定位精度 (公里/时)	1.85	1.85	1.85	1.85	3.7	1.85	1.85
系统重量 (公斤)	5.5	21.9	27.2		24.9	10.58	13.6
系统耗电量 (瓦)	50	400	420				
故障间隔 (时)	1500	1568			1200~2000		
加速度计型号	A-1000	A-1000	A-2	A-4			
陀螺仪型号	G-1200	G-1200	G-2	G-4			SDG-1
平台型号	P-1	P-1	P-2	P-4	KF-70		
计算机型号及容量	数字微分式 4000~8000字	LC-4516 通用式	C-4000 65536字		SKC-3000 7168字	SKC-3000 7168字	8000字
系统体积 (厘米 ³)		2.8 × 10 ⁴			2.57 × 1.94 × 5.56	1.83 × 1.94 × 3.3	3.05 × 2.03 × 2.16

表 5 LN-33型惯导装置特性数据

特 性 名 称	数 据
定位精度 (圆周概率误差)	(公里/时) 1.85
速度误差 ($1\sigma = 68.3\%$)	(米/秒) 0.91
航向误差 (1σ)	(角分) 3
俯仰及横滚误差	(角分) 2
对准时间 (-17.8°C)	(分) 10
快速对准 (-28.9°C)	(分) 3
重量 (包括安装架)	(公斤) 21.9
体积	(米 ³) 0.0283
耗电功率 (工作)	(瓦) 400
耗电功率 (起动)	(瓦) 900
冷却空气	(公斤/分) 0.907
平均故障间隔时间	(时) 1568
工作环境 (最大角速度)	
侧滚	(度/秒) 400
偏航	(度/秒) 200
俯仰	(度/秒) 60~120

西德的利登分公司和西德的博登则公司以及法国的通用机电公司都在批量生产调谐陀螺。据统计美国和西欧自 1967 年以来, 在十四个重要的带有惯导系统的火箭、导弹以及民航机的装备合同中, 只有三起用的是液浮陀螺, 其余十一起全是调谐陀螺。1972 年以后, 则全部由调谐陀螺所代替。西德的科技工作者认为调谐挠性陀螺将是占统治地位的新一代精密陀螺。据统计, 法国在 1974 年以前, 就已生产了 5000 个以上的调谐陀螺, 分别应用于军用, 民航和宇宙飞行器内。六十年代后期至七十年代, 调谐陀螺普遍应用于航空, 航海, 战术及战略导弹中 (其中包括分导式重返大气层多弹头导弹在内)。由于调谐陀螺运转时间可以设计得长达 35000 小时, 耗电量特别少, 八十年代使用的航天飞机和探索空间的宇宙飞船都采用调谐陀螺作为元部件的捷联惯导系统。

第一章 陀螺系统动力学基础

包括滚珠轴承常规陀螺、液浮陀螺和调谐陀螺在内的转子式陀螺仪的力学方程有许多共同点，本章通过框架转子式陀螺仪论述了转子式陀螺仪的力学方程与传递函数方块图。

§ 1.1 角动量与动量矩定理

一、角动量

绕定点转动的刚体（见图 1-1），其各质点的动量对固定点 O 之矩的总和称为该刚体对 O 点的动量矩，或称角动量，其定义式为

$$\bar{H} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \quad (1-1)$$

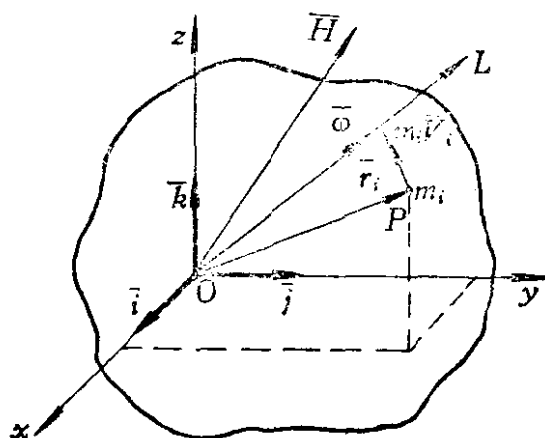


图1-1 刚体的角动量

角动量的单位为克·厘米²/秒（厘米·克·秒制）或克·厘米·秒（实用单位制）。

设刚体绕固定点 O 转动（见图 1-1）， $Oxyz$ 为固连于刚体的动坐标系，刚体的瞬时角速度 $\bar{\omega}$ 可沿动坐标系 $Oxyz$ 分解为

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad (1-2)$$

设刚体内任意点 P 的质量为 m_i ，其向径 \bar{r}_i 可沿动坐标系分

解为

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k} \quad (1-3)$$

设刚体的瞬时角速度为 $\bar{\omega}$, P 点的线速度可写为

$$\begin{aligned} \bar{V}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \bar{i} \\ &+ (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \bar{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \bar{k} \end{aligned} \quad (1-4)$$

将式 (1-3) 及式 (1-4) 代入式 (1-1) 则有

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i \\ &= \sum m_i \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \omega_y z_i - \omega_z y_i & \omega_z x_i - \omega_x z_i & \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{vmatrix} \\ &= [\sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - \sum m_i x_i y_i \omega_y - \sum m_i z_i x_i \omega_z] \bar{i} \\ &+ [\sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \omega_y - \sum m_i y_i z_i \omega_z - \sum m_i x_i y_i \omega_x] \bar{j} \\ &+ [\sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_z - \sum m_i z_i x_i \omega_x - \sum m_i y_i z_i \omega_y] \bar{k} \end{aligned} \quad (1-5)$$

根据刚体绕 x 、 y 、 z 轴的转动惯量和惯性积的定义, 可将绕定点转动的刚体对 O 点的角动量写为

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{zx} \omega_z) \bar{i} \\ &+ (J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z - J_{xy} \omega_x) \bar{j} \\ &+ (J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{yz} \omega_y) \bar{k} \end{aligned} \quad (1-6)$$

绕定点转动的刚体角动量在动坐标轴上的投影可从上式得出, 即

$$\begin{aligned} H_x &= A \omega_x - F \omega_y - E \omega_z \\ H_y &= B \omega_y - D \omega_z - F \omega_x \\ H_z &= C \omega_z - E \omega_x - D \omega_y \end{aligned} \quad (1-7)$$

上式又可采用矩阵形式, 即

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

式中由转动惯量和惯性积组成的矩阵，叫做刚体对动坐标系 $Oxyz$ 的惯性张量。

对于绕对称轴旋转的陀螺转子，转动坐标轴将与刚体的惯性主轴相重合，使惯性积 $D = E = F = 0$ ，因此角动量表达式可简化为

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

二、动量矩定理

刚体对某定点的角动量 \bar{H} 对时间的向量导数可写成

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \Sigma(\bar{M}_O) = \bar{T} \quad (1-10)$$

上式可推导如下。根据角动量的定义 $\bar{H} = \Sigma \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$ ，将其对时间求一次导数，得

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d}{dt} [\Sigma \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i] = \Sigma \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i + \Sigma \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \quad (1-11)$$

但

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{v}_i \quad \text{且} \quad \bar{v}_i \times \bar{v}_i = 0$$

根据牛顿第二定律有

$$m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = (\bar{F}_i)_{\text{外}} + (\bar{F}_i)_{\text{内}}$$

所以可得

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \Sigma \bar{r}_i \times [(\bar{F}_i)_{\text{外}} + (\bar{F}_i)_{\text{内}}] = \Sigma (\bar{M}_O)_{\text{外}} + \Sigma (\bar{M}_O)_{\text{内}} \quad (1-12)$$

其中 $(\bar{F}_i)_{\text{外}}$ 、 $(\bar{F}_i)_{\text{内}}$ 为作用在刚体任意质点 m_i 上的外力和内力。 $(\bar{M}_O)_{\text{外}}$ 、 $(\bar{M}_O)_{\text{内}}$ 为作用在刚体任意质点 m_i 上的外力和内力对定点 O 之矩。但内力总是成对地存在，且大小相等而方向相反。故内力对 O 点之矩的总和 $\Sigma (\bar{M}_O)_{\text{内}}$ 等于零。因而得到

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \Sigma(\bar{M}_O)_{\text{外}} = \bar{T} \quad (1-13)$$

三、欧拉动力学方程

刚体定点转动的动力学方程式又叫做欧拉动力学方程。它实际上就是利用变向量的绝对导数与相对导数定理，把角动量定理写成另一种形式。这种形式对于研究刚体定点转动的动力学问题是较为方便的。

由向量导数定理可知

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d'\bar{H}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{H} \quad (1-14)$$

上式说明，向量的绝对导数等于相对导数与动坐标系角速度同该向量之叉积的向量和。

将等式 (1-13) 代入等式 (1-14) 中可得

$$\frac{d'\bar{H}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{H} = \bar{T} \quad (1-15)$$

这就是以向量形式表示的刚体定点转动的动力学方程。

将式 (1-14) 中的各向量写成在动坐标系中的投影形式，得

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad (1-16)$$

$$\bar{H} = H_x \bar{i} + H_y \bar{j} + H_z \bar{k} \quad (1-17)$$

$$\frac{d'\bar{H}}{dt} = \frac{dH_x}{dt} \bar{i} + \frac{dH_y}{dt} \bar{j} + \frac{dH_z}{dt} \bar{k} \quad (1-18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{H} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = (\omega_y H_z - \omega_x H_y) \bar{i} \\ &\quad + (\omega_z H_x - \omega_x H_z) \bar{j} + (\omega_x H_y - \omega_y H_x) \bar{k} \end{aligned} \quad (1-19)$$

设外力对定点 O 之矩在动坐标系中的投影形式为

$$\bar{T} = T_x \bar{i} + T_y \bar{j} + T_z \bar{k} \quad (1-20)$$

将公式 (1-18)、(1-19)、(1-20) 代入式 (1-15) 后，使对应的单位向量的系数相等，可得