李群和李代数简介

曹雨芳　刘辽编

北京师范大学出版社

李群和李代数简介

曹雨芳 刘辽 编

北京师范大学出版社

李群和李代数简介

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京师范大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：4.75 字数：97千
1987年2月第1版 1988年4月第2次印刷
印数：3 301—4 300

ISBN7-303-00106-9/O·29
定价：0.78元

内容简介

本书内容曾作为物理系理论物理研究生的教材，其特点是用最少的篇幅先介绍群论的一般性理论，然后立即进入李群和李代数，以使学习场论和粒子物理的学生能用较少的时间获得这方面必要的数学知识；在表述上，虽力求正确，但并不追求论证的严格性，这种处理对于学习理论物理的学生来说可能是比较合适的。本书可作理论物理研究生的教材，也可供大学教师及科研人员参考。

前　　言

本书内容曾作为物理系理论物理研究生的教材，于1977年和1979年使用过二次。本书企图用最少的篇幅先介绍群论的一般性理论，然后立即进入李群和李代数，以使学习场论和粒子物理的学生能用较少的时间获得这方面必要的数学知识。本书虽力求表述的正确性，但并不追求论证的严格性，我们认为，这种处理对于学习理论物理的学生来说可能是比较合适的。

在本教材使用过程中，不少同志提出过许多改进意见，特别是朱培豫同志仔细地校订了原稿，我们谨对他们致以深切的谢意。由于水平所限，内容仍难免有不妥甚至错误之处，欢迎读者提出宝贵意见。

刘　辽　（北京师范大学　物理系）
曹雨芳　（华东师范大学　物理系）

目　录

第一章　有限群基本理论

§1　群的概念

符合某种特定条件的一些元素$\{g_1, g_2, \cdots, g_k, \cdots, g_n\}$等构成一集合$G$，若对其中任二元素$g_i$、$g_k$定义一个《运算》($g_i \cdot g_k$)且满足下列四个条件，则称为一个群。

1．若g_i、$g_k \in G$　则$g_i \cdot g_k \in G$.

2．元素间的运算满足结合律　$g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k$。

3．在G内可定义单位元素g_0（或e），使G中每一个g_i都有　$g_i \cdot g_0 = g_0 \cdot g_i = g_i$　　$(g_i \cdot e = e \cdot g_i = g_i)$.

4．对于每个g_i，在G中都存在一个元素g_i^{-1}，使

$$g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = g_0 \text{（或}e\text{）}$$

应注意到同一集合对于某种运算构成群，但对另一种运算可以不构成群。一般说来，群的元素间的运算未必满足对易律。假使一个群，它的元素间运算满足对易律：

$$g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$$

就叫阿贝尔群。

例　(1) 一个单位元素$\{g_0(\text{或}e)\}$的集合，元素间的《运算》是通常的乘法构成一个群。

(2) 所有实数的集合，《运算》是通常的加法构成群，单位元素是0，此群是阿贝尔群。

(3) 原点O固定的实三维空间的旋转构成一个非阿贝尔群，它以旋转群$\boldsymbol{R}_3$或$SO(3, R)$来表示。

(4) 绕固定轴的旋转构成一阿贝尔群，它可用 O_2 或 $SO(2,R)$ 表示。

(5) 实四维矢量空间中使二次型

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_0{}^2$$

保持不变，且不使过去和将来发生交换的非奇异变换构成洛仑兹群。

(6)特殊线性群 $SL(n,R)$ 和 $SL(n,c)$ 是所有行列式为1而矩阵元为实数或复数的线性变换所构成的群。

(7) 特殊酉群 $SU(n)$ 是 n 维矢量空间中行列式为1的么正变换集合所构成的群。

(8)线性群 $GL(n,R)$ 是由实数组成的非奇异线性变换所构成的群。

下面给出在矢量空间中使所有保持矢量长度不变的线性变换构成么正群(U群)的证明。

设：复矢量空间中任一矢量 $\boldsymbol{x}$，线性变换 u 使所有的矢量长度保持不变：

$$\boldsymbol{x}'=u\boldsymbol{x} \quad 或 \quad x'_\mu=u_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.1.1}$$

要满足

$$x'^*_\mu x'_\mu=x^*_\mu x_\mu \tag{1.1.2}$$

(1.1.1)式代入(1.1.2)式，

$$u^*_{\mu\lambda}x^*_\lambda u_{\mu\rho}x_\rho=u^*_{\mu\lambda}u_{\mu\rho}x^*_\lambda x_\rho=\delta_{\lambda\rho}x^*_\lambda x_\rho$$

$$(u^*_{\mu\lambda}u_{\mu\rho}-\delta_{\lambda\rho})x^*_\lambda x_\rho=0$$

由 $x^*_\lambda x_\rho$ 的任意性，得：

$$u^*_{\mu\lambda}u_{\mu\rho}=\delta_{\lambda\rho} \qquad \tilde{u}^*_{\lambda\mu}u_{\mu\rho}=\delta_{\lambda\rho} 或 \tilde{u}^*u=1 或 u^+u=1$$

或 $$u^+=u^{-1} \tag{1.1.3}$$

条件(1.1.3)是么正变换 u 的充要条件。

(a)如果有二个么正变换 u、v，则由于

$$(uv)^{-1}(uv)=v^+u^+uv=1$$

所以乘积(uv)也是么正变换。

(b)如果么正变换u，则由于

$$(u^{-1})^+(u^{-1})=(u^+)^{-1}(u^{-1})=(uu^+)^{-1}=1$$

所以么正变换的逆变换u^{-1}也是么正变换。

(c)显然，单位矩阵1是一么正矩阵。即$1^+\cdot 1=1\cdot 1^+=1$。因此，在矢量空间中，所有保持矢量长度不变的线性变换构成一群，称作么正群$u(n)$。

(9)一组n个对象的所有不同置换构成一个群，称为"对称群S_n"。

用下列符号表示一种置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots\alpha_n \end{pmatrix}$$

自然数$1,2,3,\cdots,n$标志n个对象，$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\cdots\cdots\alpha_n$是这个自然数的一种排列。上式表示的置换过程是：将1换为α_1，2换为α_2，3换为α_3 … n换为α_n。接连进行二个置换的结果称为这二个置换的乘积。以三个对象的置换为例，设P_1和P_2表示下列二个置换：

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

那末它们的乘积

$$P_1P_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

就是先进行置换P_2再进行置换P_1的结果。群中的单位元素是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

显然，每一个置换都有一个逆置换，它们相乘就得到单位元素。不难证明，置换的乘法满足结合律。

由有限个元素构成的群称为有限群，不同元素的个数叫作有限群的阶。反之，称作无限群。

上面例子中，(1)、(9)是有限群，其它均为无限群。

习题

(1)试证、 $(g_i \cdot g_k)^{-1}=g_k^{-1} \cdot g_i^{-1}$.

(2)证明：每一元素仅有一个逆元素。

(3)若$a,b\in G$，$h\in G$ 且$a\neq b$ 则 $ah\neq bh$.

§2 子群、共轭元素和类

定义：若群G中的一个子集g，按群G中所采用的运算也构成一个群，则g叫作群G的子群。

例 §1中例(4)是例(3)的子群，么正么模群 $SU(n)$ 是么正群$U(n)$的子群，三维空间转动群是洛仑兹群的子群，绕某个轴的转动群是旋转群的子群，特殊线性群$SL(n)$是线性群$GL(n)$的子群。

设a和b是群中某二个元素，元素$c=bab^{-1}$称作a的共轭元素。显然，若c和a共轭，那末a也和c共轭，而且c^{-1}和a^{-1}也相互共轭。若c和a共轭，a和d共轭，那末c和d也共轭。

所有和某一元素共轭的元素的集合，称作为群的一个类。若二个类中有一个元素是相同的，那末这二个类完全相同。若二个类不同，那末它们所有的元素都不同。因此可以将群的元素分成不同的类，每一个元素只属于其中的一个类。

§3 陪集、不变子群

设g是群G的一个子群，g群的元素是$1, b_1, b_2, \cdots, b_l$。设a是群G中的任一元素，那末元素

$$a\cdot 1,\ a\cdot b_1,\ a\cdot b_2,\ \cdots,\ a\cdot b_l$$

称作由元素a生成的子群g的“左陪集”。并以符号ag表示。若a是子群g的元素，那末生成的左陪集就是子群g本身。若a不属于g，那末它所生成的左陪集不构成子群，因为在这一左陪集中不包含单位元素。若二个左陪集中有一个元素是相同的，则这二个左陪集完全相同。若二个左陪集不同，则它们所有的元素都不同。因此可以将群所有元素分成不同的左陪集，每一个元素只属于一个左陪集。

用类似的方法，可以定义右陪集(ga)，并讨论右陪集的性质。

定义：若对任一$a_i \in G$，满足

$$a_i g = g a_i \qquad 或 \qquad a_i g a_i^{-1} = g$$

则子群g叫作群G的不变子群（正规子群）。

可以看出：(1)任一群G有二个平庸的不变子群，即

$$g = \{1\} \qquad 和 \qquad g = \{G\}$$

(2)阿贝尔群的任一子群都是不变子群；

(3) $a_i g = g a_i$ 并不意味着 $a_i b_i = b_i a_i$ $(b_i \in g)$，而是表明不变子群的左陪集与右陪集相同。

定义：如果一个群，除单位元素外，没有不变子群，则此群叫单群。

如果一个群，除单位元素外，没有不变阿贝尔子群，则此群叫半单群。

显然，单群一定是半单的[注]。反之，不成立。以后将证明，洛仑兹群，四维和三维转动群是半单群，二维么模么正群是单群。因此，单群和半单群是物理学上有重要的意义的群。

定理1.3.1 设g是群G的不变子群，则所有g的陪集所组成的集合 $H=\{h_i\}=\{a_ig\}$ 构成一个群。

证明：(1)设有两个不同陪集h_i、h_j，则由于

$$h_ih_j=(a_ig)(a_jg)=a_i(ga_j)g=a_i(a_jg)g=a_kg$$

故乘积h_ih_j仍是子群g的陪集。

(2)因 $g(a_ig)=(ga_i)g=(a_ig)g=a_ig$

所以g是群H的单位元素。

(3)若有一个陪集 $h_i=a_ig$，则由于

$$(a_ig)^{-1}(a_ig)=(g^{-1}a_i^{-1})(a_ig)=g^{-1}a_i^{-1}a_ig=g^{-1}g=g\cdot g=g$$

故陪集的逆总是存在的。

(4)显然，陪集间乘法满足结合律。即证。

显然，若子群g不是群G的不变子群，H一般不构成群。

定义：上述群H叫作群G相对于不变子群g的商群。写为 $H=G/g$

§4 同构和同态

设有二个群，分别是G和$\overline{G}$。假定群G中的每一个元素a对应于群$\overline{G}$中的一个确定的元素$\bar{a}$，G中二个元素a和b乘积$a\cdot b$对应于群$\overline{G}$中相对应的元素$\bar{a}$和$\bar{b}$的乘积$\bar{a}\cdot\bar{b}$，而且群$\overline{G}$中的每一个元素至少对应于群G中的一个元素，那末就叫$\overline{G}$是群G

〔注〕 唯一的例外是单参数单群。

的“同态映象”。或者说，群G同态于群$\overline{G}$。

假使群G和群$\overline{G}$的元素是一一对应的，并且元素的乘积也一一对应。那末就称群G和群$\overline{G}$相互同构。相互同构的两个群只是表示元素的符号不同，而群的结构是完全相同的。

先举一个同态的例子。不难看出，若元素间的乘积定义为数的乘积，则整数1和 -1 构成一个2阶群。若令1对应于所有的偶置换，-1对应于所有的奇置换，则这个群是对称群S_n的同态映象。

不难看出，这个群与由

$$x \to x$$

$$x \to -x$$

二个变换构成的群是同构的。

可见，若群G同态于群H，H也同态于群G，则G、H二个群是同构的。同构一定同态，同态不一定同构。

可以证明：若任二同阶有限群是同态的，则必是同构的。反之，同构的有限群必是同阶的。

若群G和群$\overline{G}$并不同构，但是，$\overline{G}$是群G的同态映象。可以证明，群G中所有和群$\overline{G}$的单位元素对应的元素的集合构成群G中的一个不变子群g，它叫群G的同态核。

证：设G中的子集$g=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是同态核。即$f$将$G$中元素映射为$\overline{G}$中元素，且有

$$f(a_i)=\overline{1} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

即(Ⅰ)$f(a_ia_j)=f(a_i)f(a_j)=\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$

所以$a_i.a_j\in g \qquad (i, j=1, \cdots, n,)$

g对乘法封闭；

(II)由于$1\cdot b=b \qquad (1, b\in G)$

对应有$f(1)\cdot f(b)=f(1)\cdot b=b$

所以$f(1)=1$ $\qquad 1\in g$

(III)又由于$a_i a_i^{-1}=1$

对应有 $f(a_i)f(a_i^{-1})=\overline{1}\cdot f(a_i^{-1})=1$

所以$f(a_i^{-1})=1$ $\qquad a_i^{-1}\in g$

由此可见g构成G的一个子群；

(IV) 由于在$\overline{G}$中有 $b\cdot 1=1\cdot b$。

对应于G中有 $b\cdot a_i=a_i\cdot b$ $\qquad a_i\in g$

所以g是G中的不变子群。

可以看出，与群$\overline{G}$中某一个确定的元素相对应的群G中的所有元素的集合构成不变子群g的陪集。因此，$\overline{G}$中的元素和不变子群g的陪集一一对应。这就是说，群$\overline{G}$和商群G/g同构。这样我们就证明了如下的定理。

定理1.4.1 设群$\overline{G}$是群G的同态映象，那末群$\overline{G}$就同构于商群G/g，且G中的同态核g是不变子群。

例1 由偶置换形成的群$\bar{S}_n$是对称群S_n的不变子群，其相应的商群$\frac{S_n}{\bar{S}_n}$与由1和−1构成的二阶群同构。

例2 三维实正交群O_3同态于数群$\{1,-1\}$，同态核g是旋转群。商群O_3/g为$\{g,\ sg\}$与数群$\{1,-1\}$同构。其中s是空间反射变换。

§5 群的表示

同态概念一个重要特殊情况是：群G是由矢量空间R中的非奇异线性变换所形成的群。这就是说，群G中的每一个元素a和矢量空间R中的一个非奇异线性变换A相对应，而且元素的积ab和相应的非奇异线性变换的积AB相对应，我们

称这一组非奇异线性变换（或矩阵）是群G的"表示"。矢量空间的维数n称为表示的"维数"。假使这个非奇异线性变换群和群G的元素一一对应，那末表示就称为是一一的。假使表示不是一一的，那末这个非奇异线性变换一定是一个商群G/g的一一表示。其中g是群G的同态核。

由上可见，群的表示维数随着所取矢量空间的维数之不同而不同，且对某一抽象群的研究可以通过对该群的表示的研究来进行。

例 设标量场$\psi(\boldsymbol{x})$满足下述本征方程（三维标量场）。

$$H(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})-\varepsilon\psi(\boldsymbol{x})=0 \tag{1.5.1}$$

式中$H(\boldsymbol{x})$是线性厄米微分算符。

假使$H(\boldsymbol{x})$在三维正交变换群G下保持不变，即

$$H(a\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{x}) \qquad a\in G \tag{1.5.2}$$

现在来求群G的线性表示。

一般情况下，给定本征值ε，(1.5.1)方程有r个线性独立正交规一化的解。

$$\psi_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r) \quad r\text{是表示}r\text{重简并度} \tag{1.5.3}$$

$\psi_i(i=1,2,3,\cdots,r)$可作为r维线性函数空间中的基底。则满足(1.5.1)方程$\psi(\boldsymbol{x})$解可表为

$$\psi(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{r} b_i\psi_i(\boldsymbol{x}) \tag{1.5.4}$$

设有一正交变换： $a\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ (1.5.5)

$\psi(\boldsymbol{x})$满足$\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi(\boldsymbol{x})$。因(1.5.5)式，所以

$$\psi'(a\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x}) \tag{1.5.6}$$

另，$\psi\ (\boldsymbol{x}')-\psi(\boldsymbol{x})=\psi'(\boldsymbol{x}')-\psi'(\boldsymbol{x})+\psi'(\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x})=0$

$\psi'(\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x})=\psi'(\boldsymbol{x})-\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi'(a^{-1}\boldsymbol{x}')-\psi'(\boldsymbol{x}')$

$=\psi'(a^{-1}a\boldsymbol{x})-\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi'(aa^{-1}\boldsymbol{x})-\psi'(\boldsymbol{x}')$.由

(1.5.6)式，$\psi'(a(a^{-1}\boldsymbol{x}))-\psi'(\boldsymbol{x}')=\psi'(a(a^{-1}\boldsymbol{x}))-\psi'(a\boldsymbol{x})$

$$=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x})$$

最后可得 $$\psi'(\boldsymbol{x})=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x}) \tag{1.5.7}$$

令 $$L(a)\psi(\boldsymbol{x})\equiv\psi'(\boldsymbol{x})=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x}) \tag{1.5.8}$$

(1.5·8)式表明：对应任一正交变换$a\in G$，存在一个算符（线性变换）$L(a)$，它把变换后在$\boldsymbol{x}$点的标量函数值变为变换前标量函数在$a^{-1}\boldsymbol{x}$点上的值。

考虑 $$H(a^{-1}\boldsymbol{x})\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})-\varepsilon\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})$$
$$=H(\boldsymbol{x})\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})-\varepsilon\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{x})(L(a)\psi(\boldsymbol{x}))-$$
$$\varepsilon(L(a)\psi(\boldsymbol{x}))=0 \tag{1.5.9}$$

(1.5.9)式表明：$L(a)\psi(\boldsymbol{x})$是属于同一本征值ε的H的本征函数。

由(1.5.4)式 $$L(a)\psi(\boldsymbol{x})=\psi(a^{-1}\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{r}b_i\psi_i(a^{-1}\boldsymbol{x})$$

故对每一个正交变换$a\in G$一定对应于一个$L(a)$。不难证明，一组算符$L(a)$形成群G的一个表示。

设 $L(a_1)$、$L(a_2)$是二个算符，则

$$L(a_1)L(a_2)=L(a_1a_2)$$

因为 $$L(a_2)\psi(\boldsymbol{x})=\psi(a_2{}^{-1}\boldsymbol{x})={}^{(2)}\psi(\boldsymbol{x})$$
$$L(a_1)L(a_2)\psi(\boldsymbol{x})=L(a_1){}^{(2)}\psi(\boldsymbol{x})={}^{(2)}\psi(a_1{}^{-1}\boldsymbol{x})$$
$$=\psi(a_2{}^{-1}a_1{}^{-1}\boldsymbol{x})=\psi((a_1a_2)^{-1}\boldsymbol{x})=L(a_1a_2)\psi(\boldsymbol{x})$$

因此，群G与函数空间中的线性变换算符$L(a)$同态，$L(a)$也是群G的一个线性表示。

这个例子说明了，由力学系统在某个变换群下的对称性（或不变性），可自然地得到变换群的表示。