

结构力学简明手册

陈载赋 编著

四川科学技术出版社

一九八六·成都

结构力学简明手册

陈载赋 编著

四川科学技术出版社

一九八六·成都

内 容 提 要

本手册为一新型的力学工具书，书中包括了现有结构力学手册和大专院校结构力学教材的基本内容，能充分满足学习和工作的需要。全书有主要公式三百余个，著者对各主要公式的应用作了详尽的解释，对公式符号作了明确、系统的规定，各章并附有计算要点和许多典型算例。手册内容极易掌握应用，能帮助读者较易较快地解算复杂的结构力学问题。本手册用途广泛，可以供读者自修之用，可以作学生省时省事的复习用书，可以为教师总结归纳提供资料，可以作工程技术人员的技术工具书。

目 录

第一章 结构力学简述	
1.1 结构力学的重要内容	1
1.2 结构的计算简图	1
1.2.1 计算简图	1
1.2.2 确定计算简图的原则	1
1.3 结构分类	1
1.3.1 根据几何尺寸分类	1
1.3.2 根据支座反力分类	2
1.3.3 其他的分类	2
1.4 支座	2
1.4.1 可动铰支座	2
1.4.2 固定铰支座	2
1.4.3 定向支座	2
1.4.4 固定支座	2
1.4.5 弹性支座	2
1.5 结点	3
1.5.1 铰结点	3
1.5.2 刚结点	3
1.6 荷载	3
1.6.1 名称	3
1.6.2 分类	3

第二章 结构的几何构造分析	
2.1 概述	4
2.1.1 自由度	4
2.1.2 约束	4
2.2 组成规律	4
2.2.1 点A与刚片Ⅰ的组合	4
2.2.2 两个刚片Ⅰ及Ⅱ的组合	4
2.2.3 三个刚片Ⅰ、Ⅱ及Ⅲ的组合	4
2.2.4 瞬变结构	5
2.3 自由度的计算	5

2.3.1 刚片结构	5
2.3.2 链杆结构	5
2.4 例	5

第三章 静定平面结构	
3.1 杆件的受力分析	7
3.1.1 计算支座反力	7
3.1.2 截面法	7
3.1.3 直接法	8
3.1.4 荷载与内力的微分关系	8
3.2 静定多跨梁	9
3.2.1 组成	9
3.2.2 内力计算	9
3.2.3 例	9
3.3 静定平面刚架	12
3.3.1 构造	12
3.3.2 内力计算	12
3.3.3 内力图的绘制	12
3.3.4 例	13
3.4 三铰拱	16
3.4.1 概述	16
3.4.2 复杂情况的内力	16
3.4.3 常见情况的内力	17
3.4.4 合理拱轴	18
3.4.5 例	18
3.5 静定平面桁架	21
3.5.1 结点法	21
3.5.2 截面法	23
3.5.3 通路法	26
3.5.4 代替法	27
3.5.5 组合法	30
3.5.6 图解法	32
3.5.7 组合结构的计算	35
3.6 静定结构的一般性质	37

3.6.1 温度、支座和制造问题	37	5.1.9 注意事项	63
3.6.2 平衡力系问题	37	5.2 力法方程的简化	63
3.6.3 基本部分和附属部分的荷载 问题	37	5.2.1 基本结构的选择	64
3.6.4 等效荷载问题	37	5.2.2 刚性悬臂法	64
3.6.5 几何不变部分的形式问题	37	5.2.3 未知力分组	66
		5.2.4 荷载分组	68
		5.2.5 取半个结构计算	69
		5.2.6 单位弯矩图 $\overline{M}_i$ 竖距的选择	70
		5.3 例	70
第四章 结构位移的计算			
4.1 解析法	38	第六章 位移法计算超静定结构	
4.1.1 公式	38	6.1 转角位移方程	88
4.1.2 应用公式(4-1)~(4-4)的几点 说明	39	6.1.1 前提	88
4.1.3 计算步骤	39	6.1.2 两端均为固定支座	88
4.1.4 例	40	6.1.3, A端为固定支座 B端为铰支座	88
4.2 位能微分法	48	6.1.4 A端为固定支座 B端为定向 支座	88
4.2.1 公式	48	6.1.5 常用的杆端内力表	88
4.2.2 公式的说明	48	6.2 杆端内力法	92
4.2.3 应用步骤	48	6.2.1 无侧移结构	92
4.2.4 例	49	6.2.2 有侧移结构	94
4.3 图乘法	51	6.3 基本结构法	98
4.3.1 应用条件	51	6.3.1 计算方法	98
4.3.2 计算公式	51	6.3.2 例	99
4.3.3 常见图形的面积和重心	51	6.4 对称结构的简化计算	102
4.3.4 图乘法的一些计算技术	51	6.4.1 一般的计算方法	102
4.3.5 运算步骤	51	6.4.2 例	103
4.3.6 例	55	6.5 支座位移和温度变化的影响	105
4.4 互等定理	57	6.5.1 支座位移时的计算要点	105
4.4.1 功的互等定理	57	6.5.2 温度变化时的计算要点	105
4.4.2 位移互等定理	58	6.5.3 例	106
4.4.3 反力互等定理	58	6.6 斜杆刚架的计算	111
4.4.4 反力位移互等定理	59	6.6.1 计算要点	111
		6.6.2 例	112
第五章 应用力法计算超静定结构		6.7 联合法与混合法	115
5.1 计算步骤	60	6.7.1 联合法	115
5.1.1 计算超静定次数	60	6.7.2 混合法	115
5.1.2 选择基本结构	60	6.8 变截面杆件的计算	117
5.1.3 力法方程	61	6.8.1 直线加腋杆件	117
5.1.4 计算主、副位移及自由项	62	6.8.2 刚域结构的计算	122
5.1.5 解力法方程	63		
5.1.6 求反力和内力	63		
5.1.7 内力图的绘制	63		
5.1.8 校核	63		

第七章 渐近法计算超静定结构

7.1 力矩分配法计算无侧移结构	125
7.1.1 一般的计算方法	125
7.1.2 例	126
7.2 力矩分配法计算有侧移结构	130
7.2.1 计算要点	130
7.2.2 例	131
7.3 无剪力分配法	134
7.3.1 应用条件	134
7.3.2 计算要点	134
7.3.3 例	134
7.4 迭代法	137
7.4.1 计算方法之(一)	137
7.4.2 计算方法之(二)	148
7.5 多层多跨刚架的近似计算	167
7.5.1 分层算法	167
7.5.2 反弯点法	169
7.5.3 D值法	172

第八章 超静定结构的矩阵分析

8.1 矩阵力法	183
8.1.1 预备知识	183
8.1.2 计算步骤	187
8.1.3 例	190
8.2 矩阵位移法	198
8.2.1 预备知识	198
8.2.2 计算步骤	199
8.2.3 例	203

第九章 影响线

9.1 概述	221
9.1.1 定义	221
9.1.2 有关规定	221
9.1.3 影响线的用途	221
9.2 梁的影响线	221
9.2.1 静力法绘制影响线	221
9.2.2 机动法绘制影响线	223
9.2.3 用影响线求内力	223
9.2.4 最不利的荷载位置	224
9.2.5 例	227

9.3 平面桁架的影响线	236
9.3.1 绘制影响线的方法	236
9.3.2 例	237
9.4 三铰拱的影响线	246
9.4.1 静力法	246
9.4.2 零点法	246
9.4.3 结点荷载作用下的影响线	247
9.4.4 例	247

第十章 能量原理

10.1 变形能	250
10.1.1 平面杆系在线弹性范围内变形能 U的一般表达式	250
10.1.2 等截面直杆受轴力作用的 变形能	250
10.1.3 等直圆杆受扭转作用的 变形能	250
10.1.4 等截面梁受弯曲作用的 变形能	250
10.2 余能	250
10.2.1 余能密度	250
10.2.2 余能的表达式	250
10.3 最小总势能原理	251
10.3.1 总势能 Π	251
10.3.2 最小总势能原理	251
10.3.3 原理的应用	251
10.4 卡氏第一定理	252
10.4.1 定理及公式	252
10.4.2 例	252
10.5 瑞利——李滋法	252
10.5.1 运算方法	252
10.5.2 例	253
10.6 最小总余能原理	256
10.6.1 运算方法	256
10.6.2 例	256

第十一章 稳定计算

11.1 压杆的稳定计算	258
11.1.1 一般的计算方法	258
11.1.2 例	258
11.2 压杆稳定计算的常用公式	261
11.2.1 简单压杆	261

11.2.2 组合压杆	266
11.3 拱的稳定计算	268
11.3.1 承受均布径向荷载的圆弧拱	268
11.3.2 等截面平方抛物线拱的临界荷载	272
11.4 梁的稳定计算	272
11.4.1 窄条梁	272
11.4.2 工字钢梁	273
11.5 刚架的稳定计算	275
11.5.1 计算方法	275
11.5.2 例	277

第十二章 结构的动力计算

12.1 自由度的确定	287
12.2 单自由度体系	287
12.2.1 自由振动	287
12.2.2 强迫振动	288
12.2.3 阻尼对振动的影响	290
12.2.4 内力与变形计算的一般步骤	291
12.2.5 例	291
12.3 二自由度体系	297

12.3.1 自由振动	297
12.3.2 强迫振动	299
12.4 多自由度体系	300
12.4.1 自由振动	300
12.4.2 简谐荷载的强迫振动	303
12.4.3 一般荷载的强迫振动	304
12.4.4 内力和变形的计算	305
12.5 对称性的利用	305
12.5.1 基本条件	305
12.5.2 取半边结构计算	303
12.5.3 计算步骤	307
12.6 多自由度体系的算例	307
12.6.1 简谐荷载	307
12.6.2 一般荷载	327
12.7 按无限自由度体系 计算梁的振 动	330
12.7.1 自由振动	330
12.7.2 均布简谐荷载作用下的 强迫振动	332
12.7.3 同时具有各种简谐荷载的 强迫振动	336

第一章 结构力学简述

1.1 结构力学的重要内容

结构力学是研究结构的组成规律，结构在各种外界因素作用下的强度、刚度和稳定的计算以及结构的力学性能的改进。计算强度和稳定的目的是使结构满足经济与安全的双重要求。计算刚度的目的是保证结构不致发生在使用上不能容许的变形。

结构力学研究的对象主要是由杆件组成的体系，如桁架、刚架等等。

1.2 结构的计算简图

1.2.1 计算简图 进行结构的内力计算时，常用一种简化图形来代替实际结构，例如图1-1。此简化图形称为结构计算简图。

1.2.2 确定计算简图的原则 (1)在忽略了一些次要因素以后，它应该尽可能接近结构实际的工作情况；(2)它应该尽可能简化计算过程。

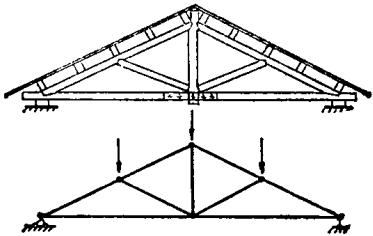


图 1-1

1.3 结构分类

1.3.1 根据几何尺寸分类

1. 杆件结构

(1) 梁

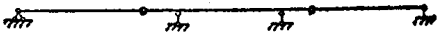


图 1-2

(2) 拱



图 1-3

(3) 桁架

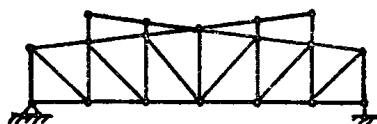


图 1-4

(4) 如图1-5(a)所示称为刚架。如图1-5(b)所示，则称之为排架。

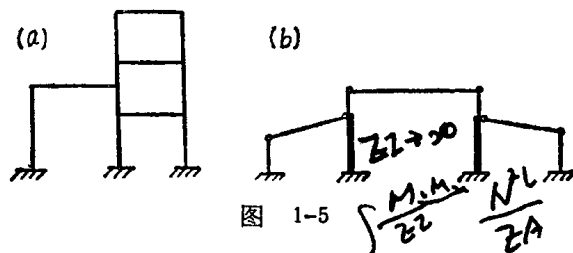


图 1-5

(5) 组合结构



图 1-6

2. 板壳结构

3. 实体结构

1.3.2 根据支座反力分类 (1)无推挽力结构：如图1-4。(2)有推挽力结构：如图1-3

1.3.3 其他的分类 此外，还可分为静定结构和超静定结构、平面结构和空间结构。

1.4 支 座

1.4.1 可动铰支座 可以转动和沿某一方向移动，但在另一方向则不能移动。仅有一个支座反力。如图1-7(a)

1.4.2 固定铰支座 可以转动，不能移动。有两个支座反力。如图1-7(b)

1.4.3 定向支座 不能转动，可以沿某一方向移动，但在另一方向不能移动。有两个支座反力。如图1-7(c)

1.4.4 固定支座 不能转动、不能移动。有三个支座反力。如图1-7(d)

1.4.5 弹性支座 一般可以沿弹簧轴线移动，有一个支座反力。如图1-7(e)

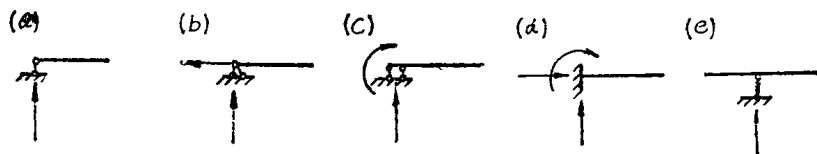


图 1-7

1.5 结 点

1.5.1 铰结点 各杆的夹角可以改变。铰截面的弯矩一般等于零。如图1-8(a)

1.5.2 刚结点 各杆的夹角不能变。一般都有弯矩、剪力和轴力存在，如图1-8(b)

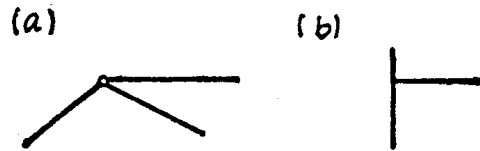


图 1-8

1.6 荷 载

1.6.1 名称 自重、风、雪、水、土、设备、人群、以及温度、支座沉陷、材料收缩等等。

1.6.2 分类 (1)恒载与活载；(2)固定荷载与移动荷载；(3)静荷载与动荷载。

↑

第二章 结构的几何构造分析

2.1 概 述

2.1.1 自由度

1. 点：具有 2 个自由度
2. 刚片——几何不变的平面结构：它具有 3 个自由度。

2.1.2 约束

1. 链杆：如图 2-1，可以减少一个自由度。



图 2-1

2. 铰：可以减少 2 个自由度。
3. 刚结点：可以减少 3 个自由度。
4. 虚铰：同时连接两个刚片的两个链杆的作用，相当于一个虚铰，它的位置在此两链杆的交点。

2.2 组 成 规 律

2.2.1 点A与刚片 I 的组合 用 2 个不共线的链杆联结，组成几何不变结构，而且没有多余约束，如图2-2

2.2.2 两个刚片 I 及 II 的组合 采用图2-3所示方式之一，即可组成几何不变结构，而且没有多余约束。

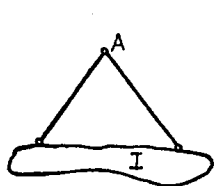


图 2-2

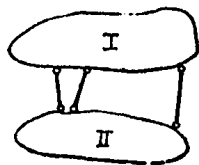
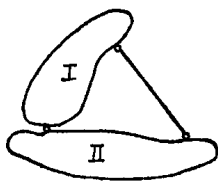


图 2-3

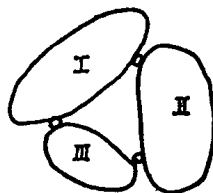


图 2-4

1. 用一个铰和一根不通过铰的链杆联结。
2. 用三根彼此不平行或不相交于一点的链杆联结。

2.2.3 三个刚片 I、II 及 III 的组合 用三个铰两两相联，三铰不在同一直线，或三铰不重合于一点，即组成几何不变结构，而且没有多余约束。如图2-4。

2.2.4 瞬变结构 如图2-5所示之组合情况, 称为瞬变结构, 均不能采用。

1. 三链杆彼此平行, 且它们之长 $h_1 \neq h_2 \neq h_3$ 如图2-5(a)
2. 三链杆的延长线相交于一点(虚线)如图2-5(b)
3. 三刚片由共一直线的三铰联结如图2-5(c)

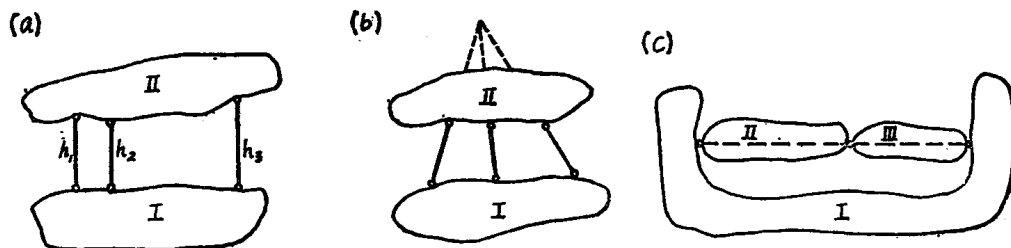


图 2-5

2.3 自由度的计算

2.3.1 刚片结构

$$1. \quad W = 3m - (3g + 2h + b) = 3m - (2h + r) \quad (2-1)$$

式中: W ——结构的自由度数; m ——组成结构的刚片数(不包括地基基础);
 g ——简单刚结点个数; h ——简单铰结点个数; b ——链杆数(包括支座链杆如为固定铰支座可换成2根链杆计数)

2. 一个结点如联结 n 个刚片, 则它等于 $n-1$ 个简单结点。

2.3.2 链杆结构(桁架)

$$W = 2j - b = 2j - (b + r) \quad (2-2)$$

式中 j ——结构的铰结点数。(不要把链杆与地基基础联结的铰计入)

2.4 例

1. 图2-6所示结构, 计算它的自由度, 并分析它的几何构造。

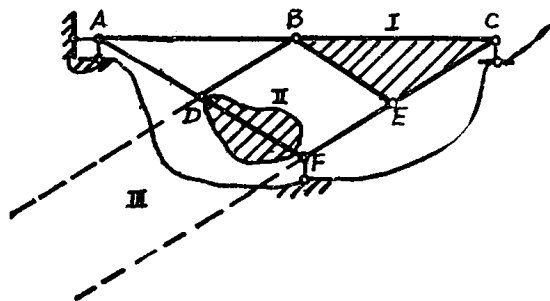


图 2-6

解: (a) $j=6$, $b=12$, 由(2-2)式, 自由度 $W = 2 \times 6 - 12 = 0$

(b) 如图2—6: BC 、 CE 、 BE 三杆用不在一直线的三铰 B 、 C 、 E 联结组成不变体系, 而且也无多余约束, 并称之为刚片Ⅰ, DF 杆称之为刚片Ⅱ, 地基视为刚片Ⅲ. Ⅰ和Ⅱ刚片用链杆 DB 与 FE 联结相当于无穷远处的铰 O , Ⅰ和Ⅲ刚片用链杆 CH 与 AB 联结相当于铰 C , Ⅱ和Ⅲ刚片用链杆 AD 和 FG 联结, 相当于铰 F . 刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ用三铰 O 、 C 、 F 两两相联. 但铰 O 可视为在 C 、 F 的延长线上, 三铰共线, 故为一瞬变结构.

2. 按图2-7所示结构, 计算其自由度, 并分析它的几何构造.

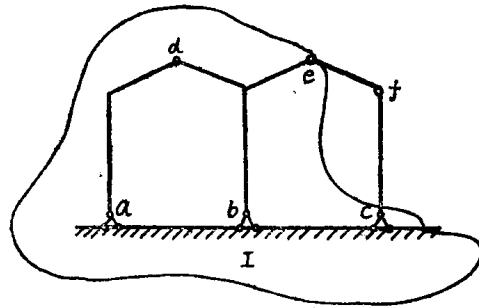


图 2-7

解: (a) 视 ad 、 dbe 及 cf 为刚片; ef 为链杆; d 为单铰

(b) 于是 $m=3$, $h=1$, $b=7$, 由(2-1)式 $W=3 \times 3 - 2 \times 1 - 7 = 0$

(c) 将 a 、 b 视为虚铰, 刚片 ad 、 dbe 和地基, 由不共线的 a 、 b 、 d 三铰联结组成不变结构Ⅰ, 而且无多余约束.

刚片Ⅰ与 fc 由铰 c 和链杆 ef 联结, ef 未通过铰 c 故组成不变结构. 且无多余约束.

第三章 静定平面结构

3.1 杆件的受力分析

3.1.1 计算支座反力（悬臂杆一般可以不先计算）

1. 撤消支座，用相应的支座反力代替其作用，支座反力的指向可任意假定，如图 3-1

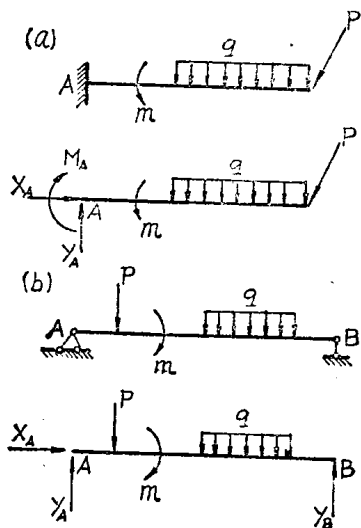


图 3-1

2. 由 (3-1) 式列出平衡方程，解之可求出支座反力。正值表示假定之指向正确，负值则表示真实的指向与假定的指向相反。

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

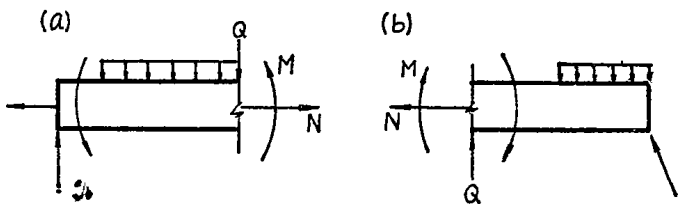


图 3-2

式中：

- $\sum X$ ——所有已知荷载及支座反力沿 X 轴（一般为杆轴或水平轴）投影的代数和；
- $\sum Y$ ——所有已知荷载及支座反力沿 Y 轴（一般为竖轴或垂直于杆轴的轴）投影的代数和；
- $\sum M$ ——所有已知荷载及支座反力对任一点（一般为支座反力与杆轴的交点）力矩的代数和。

3. 将支座反力正确的大小及指向，注于计算简图中以求内力。

3.1.2 截面法

1. 欲求某截面的内力，即将杆沿此截面截开，取截面一边力系较简单的一部分为隔离体。截面的弯矩 M 、剪力 Q 与轴力 N 均假定为正值方向，如图 3-2。如为竖杆或倾斜杆，可将杆转平后分析。

2. 按 (3-2) 式写平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \sum X_o &= 0 \\ \sum Y_o &= 0 \\ \sum M_o &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

式中：
 $\sum X_o$ ——作用在隔离体上所有的荷载、支座反力和内力沿截面法线投影的代数和；
 $\sum Y_o$ ——作用在隔离体上所有的荷载、支座反力和内力沿截面方向投影的代数和；
 $\sum M_o$ ——作用在隔离体上所有的荷载、支座反力和内力对截面形心的力矩代数和。
 3. 解(3-2)式即求出截面内力。对 $Q(N)$ 来说，正值为正剪力（拉力）；负值为负剪力（压力）。对 M 来说，正值表示所设 M 的方向正确；负值表示 M 的真实方向与所设的方向相反。

3.1.3 直接法

1. 轴力 N =截面一边所有力沿截面法线投影的代数和 $\sum X_i$ 。和截面的外向法线同向为负值（压力）；反向为正值（拉力）。见图3-3(a)
 2. 剪力 Q =截面一边所有力沿截面方向投影的代数和 $\sum Y_i$ 。如用截面以左之力计算，则向上为正，向下为负。如用截面以右之力计算，则向下为正，向上为负。计算结果正值为正剪力，负值为负剪力。见图3-3(b)
 3. 弯矩 M =截面一边所有力对截面形心的力矩代数和 $\sum M_i$ 。如将杆转平，当用截面以左之力计算时：顺钟转之力矩使下缘受拉；反钟转之力矩使上缘受拉。当用截面以右之力计算时：反钟转之力矩使截面下缘受拉；顺钟转之力矩，使截面上缘受拉。见图3-3(c)

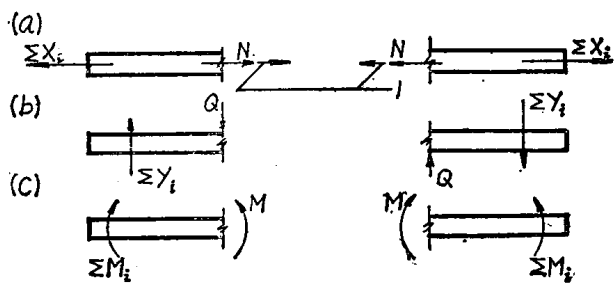


图 3-3
—外向法线

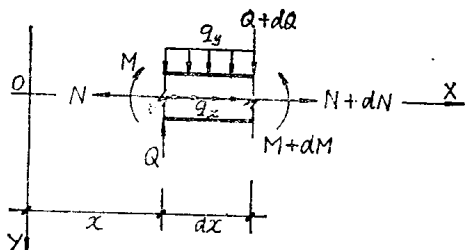
3.1.4 荷载与内力的微分关系

1. 曲杆

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= \frac{Q}{R} - q_s \\ \frac{dQ}{ds} &= -\frac{N}{R} - q_r \\ \frac{dM}{ds} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

式中： R ——杆的曲率半径； q_s ——沿杆轴切线方向的分布荷载，向变量 s 增加的方向为正； q_r ——沿杆轴法线方向的分布荷载，向曲率圆心为正； ds ——曲杆的微分长度。

2. 直杆 如图3-4，于(3-3)式中取 $R=\infty$ ， $ds=dx$ ， $q_s=q_x$ ， $q_r=q_y$ 得



$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -q_x \\ \frac{dQ}{dx} &= -q_y \\ \frac{dM}{dx} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

图 3-4

图中内力与荷载均为正值方向

3.2 静定多跨梁

用铰把几个单跨梁联在一起，组成一个静定的几何不变梁，称为静定多跨梁。

3.2.1 组成

1. 欲使多跨梁成为静定的几何不变结构，必须符合以下三个条件。

(1) 当整个静定多跨梁仅有一个固定支座，或者仅有一个固定铰支座时，铰与支座的关系

$$h = b_0 - 3 \quad (3-5)$$

式中： h ——铰的个数（不能为负）； b_0 ——支座链杆数

(2) 每一个铰，只能连接一根基本部分及一根附属部分。在垂直荷载作用下，截开一铰后仍然保持稳定的梁，谓之基本部分；而立即丧失稳定的梁，谓之附属部分。

(3) 自由度 $W=0$

2. 静定多跨梁的常用型式图3-5

3.2.2 内力计算

1. 区分附属部分与基本部分并绘出支承关系图。
2. 按静定单跨梁计算附属部分，根据它本身所受的荷载，计算其反力和内力。
3. 按静定单跨梁计算基本部分，根据它本身所受的荷载（包括作用在铰上的集中力）及其所支承的附属部分对它的作用（即附属部分的反力，但方向相反），计算反力和内力。

4. 将“2”、“3”两项所得各单跨梁的 Q 图与 M 图拼合在一起，就得出整个静定多跨梁的 Q 图与 M 图。在本节中规定：正剪力绘在基线以上，负剪力绘在基线以下；正弯矩绘在基线以下，负弯矩绘在基线以上。

3.2.3 例

1. 绘制图3—6(a)所示静定多跨梁的 Q 图与 M 图。图(a)中的长度单位为 m ，集中力的单位为 kN

解：(a)从图3-6(a)可看出，梁 h_1h_2 支承在梁 Ah_1 及 h_2h_3 之上。就梁 h_3h_4 与梁 h_4E 之关系， h_4E 为附属部分， h_3h_4 为基本部分。再就梁 h_2h_3 与梁 h_3h_4 之关系， h_3h_4 又为附属部分，

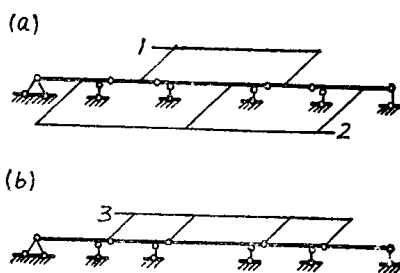


图 3-5

1—附属部分 2—基本部分 3—铰

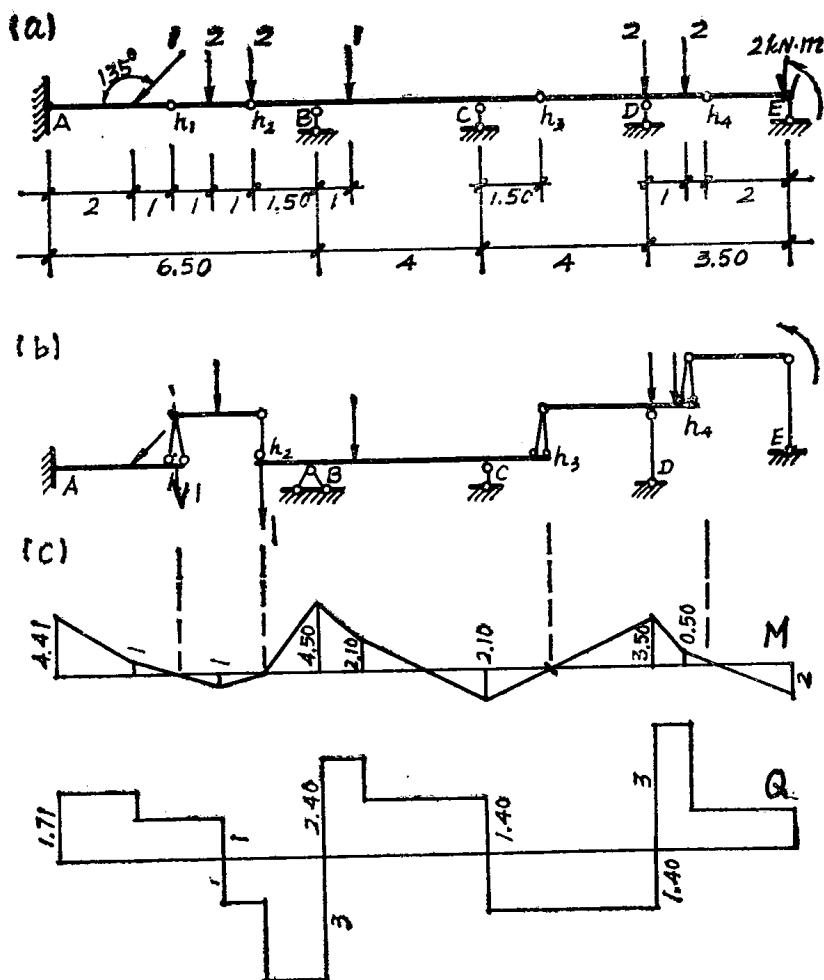


图 3-6

而 h_2h_3 为基本部分。它们的支承关系如图3-6(b)。

(b) 计算附属部分

a) h_4E 梁 由(3-1)式求得支座反力

$X_{h_4}=0$, $Y_{h_4}=1\text{kN}(\uparrow)$, $Y_E=1\text{kN}(\downarrow)$ 。于是Q图与M图如图3-7(a)

b) h_3h_4 梁 除原有荷载外, 在梁端 h_4 尚有梁 h_4E 之支座反力 Y_{h_4} 。由(3-1)式算得支座反力

$$X_{h_3}=0, Y_{h_3}=1.40\text{kN}(\downarrow), Y_D=6.40\text{kN}(\uparrow)。$$

Q图及M图如图3-7(b)所示;

c) h_1h_2 梁 作用在 h_2 之垂直力 2kN , 由 h_2h_3 梁承受, 于是支座反力及内力如图3-7(c)所示。

(c) 计算基本部分

a) h_2h_3 梁 作用在 h_2 处之力除原有之 2kN 外, 尚有梁 h_1h_2 之支座反力 $Y_{h_2}=1\text{kN}$ 向下作用。在 h_3 处有梁 h_3h_4 之支座反力 $Y_{h_3}=1.40\text{kN}$ 向上作用。由是算得支座反力 $X_B=0$, $Y_B=5.40\text{kN}(\uparrow)$, $Y_C=2.80\text{kN}(\downarrow)$ 。Q图及M图如图3-7(d)。

b) Ah_1 梁悬臂端有 h_1h_2 梁之支座反力 1kN 向下作用, 算得支座反力 $X_A=0.71\text{kN}(\rightarrow)$