

高等学校教学参考书

# 数学物理方法

郭敦仁 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书



# 数学物理方法

郭敦仁 编

人民教育出版社

本书内容分两部分:第一部分是复变函数论及其应用,侧重于应用方面;第二部分是数理方程,着重介绍了几种常用的解法。书中各章配有相应的练习题。

本书可作为综合大学物理系各专业教学物理方法课程的教材。

## 数学物理方法

---

郭 敦 仁 编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

---

统一书号 13012·055 开本 850×1168 1/32 印张 14 14/16

字数 357,000 印数 194,701—294,700 定价(5)¥ 1.40

1965年12月第1版 1979年2月北京第5次印刷

# 序

本书是以北京大学物理系数学物理方法课程的讲义为基础编写的，有些地方，为了便于读者参考，作了补充。内容分为两个部分：第一部分是复变函数论的基本知识和它的一些应用；第二部分是数理方程。后一部分是按照解法编写的，故把关于方程的分类放到较后的第二十一章。积分方程没有包括进去。

讲授本书大约需要 110 学时。对于讲授 90 学时的课程，可略去其中第十九、二十、二十二、二十三各章以及所有带 \* 号的各节。

在本书初稿完成后，复变函数论部分和数理方程部分曾分别得到王竹溪先生和萧树铁先生的许多宝贵意见，谨在此致谢。

由于编者的水平所限，书中一定有错误和不妥的地方，希望使用本书的教师和同学在发现后提出批评和意见，以便在有机会再版时改正。

编者

1965 年 2 月

## 重 版 序

重版时改正了本书的一些错误，谨向指出这些错误的各地读者和教师致谢。

编者

1977 年 10 月

# 目 录

序.....(vii)

## 第一部分 复变函数论及其应用

**第一章 复数的基本概念**.....(1)

1.1 复数及其运算规则(1) 1.2 复数的几何表示(2) 1.3 复数序列·极限的概念(5) 1.4 无穷远点(7)

**第二章 解析函数**.....(9)

2.1 复变函数·区域的概念·连续和一致连续(9) 2.2 导数(11) 2.3 解析函数·科希-里曼(Cauchy-Riemann)条件(12) 2.4 解析函数与调和函数的关系(15)

**第三章 初等函数**.....(17)

3.1 幂函数(17) 3.2 指数函数(17) 3.3 三角函数和双曲函数(18) 3.4 多值函数·根式 $\sqrt{z-a}$  (19) 3.5 对数函数(26) 3.6\* 多值函数 $w = \arcsin z$  (28) 3.7 函数 $z^s$ ( $s$ 为任意复数)(30)

**第四章 复数积分·科希定理和科希积分公式**.....(32)

4.1 复数积分(32) 4.2 复数积分的几个重要性质(33) 4.3 科希(Cauchy)定理(34) 4.4 不定积分·原函数(38) 4.5 科希积分公式(41) 4.6 科希积分公式的几个重要推论(45) 4.7\* 解析函数的实部和虚部的关系(47) 4.8 科希型积分(50)

**第五章 无穷级数**.....(52)

5.1 复数级数(52) 5.2 函数级数·外氏(Weierstrass)定理(56) 5.3 幂级数·阿貝耳(Abel)第一定理(61) 5.4 幂级数所代表的函数的解析性(65) 5.5\* 阿貝耳第二定理(67)

**第六章 泰勒展开和洛浪展开**.....(71)

6.1 解析函数的泰勒(Taylor)展开(71) 6.2 多值函数的泰勒展开(76) 6.3 在无穷远点邻域内的泰勒展开(78) 6.4 洛浪(Laurent)展开(79) 6.5 洛浪展开的例子(83)

**第七章 单值函数的孤立奇点**.....(87)

7.1 孤立奇点的分类(87) 7.2 可去奇点(88) 7.3 极点(89) 7.4 本性奇点(91) 7.5 无穷远点(92)

**第八章 残数理论及其应用**.....(94)

8.1 残数定理(94)	8.2 计算残数的公式(96)	8.3 应用残数理论计算定积分(98)	8.4 无穷积分(100)	8.5 含三角函数的无穷积分·约当(Jordan)引理(102)	8.6 实轴上有奇点的情形·积分主值(106)	8.7* 多值函数的积分(108)	8.8* 其他例子(111)	8.9* 关于零点和极点的个数的定理(118)	
<b>第九章 含参数的积分·<math>\Gamma</math>函数和B函数</b> .....(120)									
9.1 解析开拓的一个例子(120)	9.2 解析开拓(121)	9.3 含参数的定积分所表示的函数的解析性(122)	9.4 $\Gamma$ 函数(第二类欧勒积分)(125)	9.5* $\Gamma$ 函数的围道积分表示(132)	9.6* $\Gamma$ 函数的渐近表示·斯特令(Stirling)公式(134)	9.7* B函数(第一类欧勒积分)(136)			
<b>第十章 拉普拉斯变换</b> .....(139)									
10.1 拉氏变换(139)	10.2 拉氏变换的基本性质(141)	10.3 拉氏换式的运算性质及其在解线性常微分方程初值问题中的应用(142)	10.4* 像函数的导数和积分的反演(146)	10.5 折积定理(149)	10.6* 傅里叶(Fourier)积分(151)	10.7* 拉氏变换的普遍反演公式(155)	10.8* 应用残数理论求反演(156)	10.9* $\delta$ 函数(160)	10.10* $\delta$ 函数的傅氏换式和拉氏换式(163)
<b>第十一章 线性常微分方程的级数解法和积分解法</b> .....(166)									
11.1 二阶线性常微分方程的奇点(166)	11.2 方程常点邻域内的解(166)	11.3 方程奇点邻域内的解·正则解和正则奇点(169)	11.4 求正则解的例子·贝塞耳(Bessel)方程(176)	11.5* 非正则奇点邻域内的正则解(184)	11.6* 常规解和次常规解(186)	11.7* 积分解法·拉普拉斯(Laplace)型方程(190)	11.8* 勒让德方程的积分解·欧勒变换(194)		
<b>第二部分 数学物理方程</b>									
<b>第十二章 方程的导出和定解问题</b> .....(198)									
12.1 方程的来源(198)	12.2 杆的纵振动和弦的横振动(199)	12.3 热传导方程(202)	12.4* 电报方程(传输线方程)(205)	12.5 边界条件和初值条件(207)	12.6 定解问题(212)				
<b>第十三章 分离变数法</b> .....(213)									
13.1 弦的自由振动(213)	13.2 解的诠释(218)	13.3 两端固定的弦的强迫振动(221)	13.4* 非齐次边界条件·第一边值问题(223)						
<b>第十四章 正交曲面坐标系中方程的变数分离</b> .....(226)									
14.1 坐标系的选择(226)	14.2* 正交曲面坐标系中的梯度、散度、旋度和拉氏算符(226)	14.3 球坐标系和柱坐标系中方程 $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ 的变数分离(232)	14.4 圆内的狄里希累(Dirichlet)问题(235)						

**第十五章 常微分方程的本征值問題**.....(240)

15.1 二阶线性常微分方程的本征值問題(240) 15.2 斯特姆-刘維  
(Sturm-Liouville)型方程的本征值問題(246) 15.3\* 用正交函数組展  
开(250)

**第十六章 特殊函数及其应用(一)·勒让德函数**.....(253)

16.1 勒让德方程的本征值問題·有界条件 勒让德多項式(253) 16.2  
勒让德多項式的微分表示——罗巨格(Rodrigues)公式(258) 16.3  $P_l(x)$   
的正交性和归一因子(258) 16.4\*  $P_l(x)$ 的完备性(262) 16.5\* 应  
用举例——均匀电场中的导体球(264) 16.6  $P_l(x)$ 的生成函数(268)  
16.7\* 应用举例(270) 16.8  $P_l(x)$ 的递推关系(276) 16.9 连带勒让  
德函数(278) 16.10  $P_l^m(x)$ 的正交归一关系(280) 16.11\*  $P_l^{-m}(x)$   
( $m>0$ )(281) 16.12\*  $P_l^m(x)$ 的递推关系(282) 16.13\* 加法公式  
(283) 16.14 公式表(285)

**第十七章 特殊函数及其应用(二)·貝塞耳函数**.....(289)

17.1 貝塞耳(Bessel)函数  $J_n(x)$ (289) 17.2  $J_n(x)$ 的振蕩特性· $J_n(x)$   
的零点(290) 17.3 貝塞耳函数的递推关系(293) 17.4  $J_n(x)$ 的生成函  
数和积分表达式(294) 17.5\* 加法公式(296) 17.6 貝塞耳方程的本征  
值問題(297) 17.7 应用举例——圆柱体的冷却(300) 17.8\* 第二类貝  
塞耳函数  $Y_\nu(x)$ (303) 17.9\* 应用举例——空心圆柱体的徑向振动(307)  
17.10\* 最陡下降法(308) 17.11\* 貝塞耳函数的渐近表达式(312) 17.12\*  
第三类貝塞耳函数  $H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)$ ·柱函数(313) 17.13\* 应用举例  
——电磁波在金属圆柱表面上的散射(315) 17.14 半奇数阶貝塞耳函数  
(317) 17.15\* 球貝塞耳函数  $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1)}(x), h_l^{(2)}(x)$ (318) 17.16\*  
 $e^{ikr\cos\theta}$ 用勒让德多項式展开(320) 17.17\* 变型(或虛宗量)貝塞耳函数  
(321) 17.18\* 应用举例——有限长圆柱体内的稳定温度場(324) 17.19  
可化为貝塞耳方程的微分方程(327) 17.20 含貝塞耳函数的积分(327)  
17.21 公式表(329)

**第十八章 格临函数**.....(336)

18.1 引言(336) 18.2 拉氏算符的格临函数(336) 18.3 格临函数的对  
称性(342) 18.4\* 广义格临函数(343) 18.5 无界区域的格临函数·基  
本解(347) 18.6\* 用正交函数組展开求格临函数(350) 18.7\* 用电像  
法求格临函数(355) 18.8\* 初值問題的格临函数·波动方程的推迟解·  
无初值問題(358)

**第十九章 积分变换的应用**.....(366)

19.1 应用拉氏变换于热传导問題(366) 19.2\* 应用积分变换解边值(初

值)問題的普遍原理(371) 19.3\* 汉克耳(Hankel)变换(373)

## 第二十章 保角变换原理及其应用.....(377)

20.1 拉氏算符的变换(377) 20.2 解析函数的几何性质(380) 20.3 几种最简单的保角变换·线性变换(382) 20.4 分式线性变换(384) 20.5 分式线性变换下圆的特性·反演点对(385) 20.6 应用举例(388) 20.7 变换  $\zeta = z^n$ (391) 20.8 变换  $\zeta = \ln z$ (393) 20.9\* 多边形的变换(席伐尔兹变换)(394) 20.10\* 特殊情形下求  $A$  和  $\zeta_0$  的公式(398) 20.11\* 应用举例——平行板边缘的电场(401) 20.12\* 把多边形外部变为上半平面的变换(404) 20.13\* 应用举例——儒可夫斯基变换(405)

## 第二十一章 二阶线性偏微分方程分类.....(408)

21.1 二阶线性偏微分方程分类·两个自变数的情形(408) 21.2\* 多个自变数的情形(412) 21.3 定解问题·一维波动方程的达朗伯解(415) 21.4\* 热传导方程和泊松方程的解的唯一性(418)

## 第二十二章 波动方程的几个特殊解法.....(422)

22.1 平均值方法·泊松公式(422) 22.2 柱面波·降维法(426) 22.3\* 里曼方法(428) 22.4\* 例(432)

## 第二十三章 变分法及其应用.....(434)

23.1 泛函和泛函的极值问题(434) 23.2 泛函极值的必要条件·欧勒方程(436) 23.3 几个自变数的情形·重积分所表示的泛函的极值问题(439) 23.4 泛函的条件极值问题(441) 23.5\* 测地线问题(444) 23.6 泛函的变分·泛函的导数(446) 23.7\* 变端点问题·自然边界条件(448) 23.8 应用于本征值问题(449) 23.9\* 高阶本征值和本征函数(452) 23.10\* 应用于边值问题(455) 23.11 里兹(Ritz)方法(457) 23.12 应用举例——圆形薄膜横振动的本征频率(459)

## 索引.....(463)

## 外国人名对照索引.....(467)

## 符号索引.....(468)



# 第一部分 复变函数论及其应用

## 第一章 复数的基本概念

复变函数的理论在物理学中有广泛的应用。本书的第一部分将讨论复变函数的基本概念和理论，以及一些应用，如计算定积分，解常微分方程等；在第二部分还要用它来讨论一些特殊函数的性质和解某一类边值问题。

### 1.1 复数及其运算规则

复数是遵从一定运算规则(见下)的一对有序实数，通常用  $(a, b)$  或者  $a+bi$  表示，其中  $a$  和  $b$  是实数， $i=\sqrt{-1}$ (即  $i^2=-1$ )。

**实部和虚部**  $a$  称为复数  $\alpha=a+bi$  的实部，常用符号  $\operatorname{Re}(\alpha)$  [或  $R(\alpha)$ ] 表示； $b$  称为  $\alpha$  的虚部，用  $\operatorname{Im}(\alpha)$  [或  $I(\alpha)$ ] 表示。

**共轭复数** 复数  $a-bi$  称为  $\alpha=a+bi$  的共轭复数，通常用  $\bar{\alpha}$  (或  $\alpha^*$ ) 表示。显然， $\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$ 。

两个复数，当而且只有当它们的实部和虚部分别相等时，才是相等的。如果一个复数的实部和虚部同时为零，则称这复数等于零。

复数的基本运算规则如下：

**加法和减法：**两个复数  $\alpha_1=a_1+b_1i$ ， $\alpha_2=a_2+b_2i$  之和与差是

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i. \quad (1)$$

**乘法：** $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的乘积是

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \quad (2)$$

除法:  $\alpha_1$  被  $\alpha_2 \neq 0$  除的商是

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\alpha_1 \cdot \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 \cdot \bar{\alpha}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \quad (3)$$

从上面的运算规则看到, 复数满足下列规律: 设  $\alpha, \beta, \gamma$  是复数, 则

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad (\text{交换律}), \quad (4)$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad (\text{结合律}), \quad (5)$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad (\text{分配律}). \quad (6)$$

## 1.2 复数的几何表示

复数的几何表示对于了解复变函数理论中的一些概念, 例如多值函数, 解析开拓等, 很有帮助, 而在复变函数论的一个重要应用方面——保角映像, 复数的几何表示更是必需的.

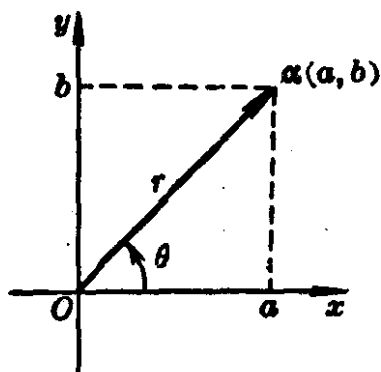


图 1

一个复数  $\alpha = a + bi$  可以用平面上的一点表示(参看图 1).

在平面上作一直角坐标系, 原点为  $O$ , 并取横轴  $Ox$  为实轴, 纵轴  $Oy$  为虚轴, 则复数  $\alpha$  就可以用横坐标等于  $a$ 、纵坐标等于  $b$  的点表示. 显然, 对于每一复数, 平面上有唯一的一个点与之相应; 反过来, 对于平面上的每一点有唯一的一个复数与之相应. 这也就是说, 复数的全体与平面上的点有一一对应的关系. 这样的平面称为复数平面.

**模与辐角** 除了直角坐标, 一个复数  $\alpha$  还可以用极坐标  $(r, \theta)$  表示(参看图 1):

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} (\geq 0), \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}, \quad (1)$$

其中  $\theta$  以逆时针方向为正向, 即  $\theta$  增加的方向.  $r$  称为  $\alpha$  的模,  $\theta$  称为  $\alpha$  的辐角; 前者又常用  $|\alpha|$  表示, 后者常用  $\arg \alpha$  表示, 即

$$r = |\alpha|, \quad \theta = \arg \alpha. \quad (2)$$

与直角坐标表示不同, 用极坐标表示一个复数时, 辐角  $\arg \alpha$  之值不是唯一的, 可以加上  $2\pi$  的任意整数倍<sup>①</sup>. 通常称满足

$$-\pi < \arg \alpha \leq \pi \quad (3)$$

的  $\arg \alpha$  之值为辐角的主值.

又, 由于  $\arctan \frac{b}{a}$  是多值的, (1) 式中比值  $\frac{b}{a}$  与  $\theta$  之间的对应关系需要确定. 若规定

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{b}{a} < \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

则当  $\alpha = a + bi$  时,

$$\left. \begin{aligned} & \text{在第一、四象限内, } \theta = \arctan \frac{b}{a}, \\ & \text{在第二象限内, } \theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}, \\ & \text{在第三象限内, } \theta = -\pi + \arctan \frac{b}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

用极坐标表示复数  $\alpha = a + bi$  时, 因  $a = r \cos \theta$ ,  $b = r \sin \theta$ , 故有

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (6)$$

这是复数的三角函数表示.

引进纯虚数指数函数<sup>②</sup>

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (7)$$

① 复数 0 (即原点) 的极坐标表示较为特殊, 其模为零, 辐角不确定.

② 关于复数指数函数的普遍定义见 3.2 节和 5.4 节.

后, 复数  $\alpha$  又可表示为

$$\alpha = re^{i\theta}. \quad (8)$$

由(7)式可以证明指数函数的下列性质:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (9)$$

证明如下:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

在复数的乘、除、开方等运算中用(8)式的表示最方便. 例如两复数  $\alpha_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $\alpha_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  的乘积是

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (10)$$

即两复数的乘积之模等于两者的模的乘积, 乘积的辐角则等于两者的辐角之和. 类似地, 有

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (r_2 \neq 0). \quad (11)$$

**加法的几何表示** 从 1.1 节(1)式可以看出, 复数的加法与平面矢量的加法一样. 复数的实部和虚部分别与矢量在直角坐标系中的两个分量相应. 因此, 常用平面上的矢量  $\overrightarrow{O\alpha}$  (图 2) 表示复数  $\alpha$ . 当然, 用矢量表示一个复数  $\alpha$  时, 矢量的起点不必一定在原点  $O$ , 终点也不必一定在  $\alpha$  点, 只要矢量在实轴  $Ox$  和虚轴  $Oy$  方

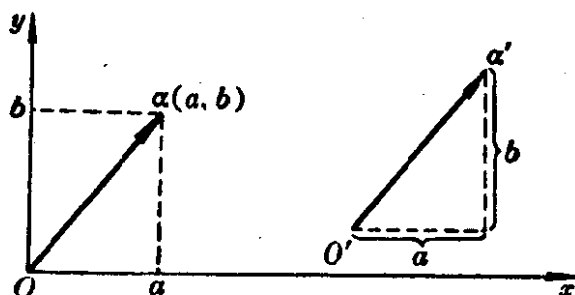


图 2

向上的分量分别等于  $\alpha$  的实部和虚部即可, 例如图 2 中的矢量  $\overrightarrow{O\alpha}$  和  $\overrightarrow{O'\alpha'}$  都代表同一复数  $\alpha$ .

因此, 复数的加法可用平行四边形作图法表示如图 3(a), 也可以用三角形作图法表示如图 3(b). 在图 3(b) 中  $\overrightarrow{\alpha_1\alpha_2} = \overrightarrow{O\alpha_2}$ .

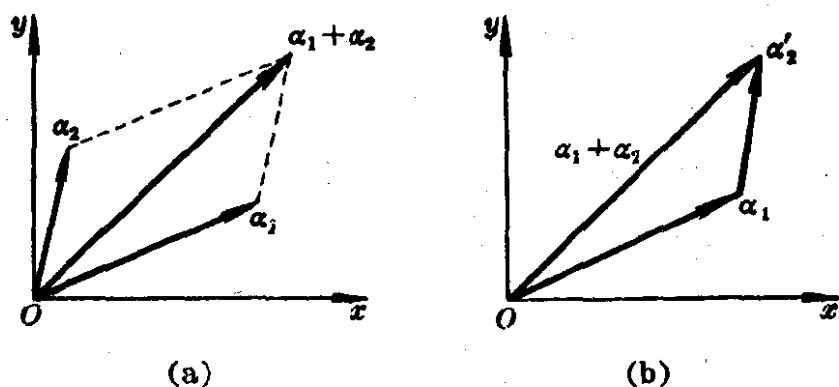


图 3

应当指出, 复数的加法虽然与平面矢量的加法一样, 复数的乘法与平面矢量的乘法(无论是标积或矢积)却是完全不同的.

由几何作图法易证下列重要不等式:

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|, \quad (12)$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \left| |\alpha_1| - |\alpha_2| \right|. \quad (13)$$

### 1.3 复数序列·极限的概念

复数  $z_n = x_n + iy_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 的全体称为一复数序列, 用  $\{z_n\}$  表示.

**聚点(或极限点)** 给定序列  $\{z_n\}$ , 如果存在复数  $z$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 恒有无穷个  $z_n$  满足  $|z_n - z| < \varepsilon$ , 则  $z$  称为  $\{z_n\}$  的一个聚点(或极限点).

一个序列可以有不止一个聚点, 例如序列  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots$  就有两个聚点, 即 0 和 1.

**极限** 给定序列 $\{z_n\}$ , 如果存在复数 $z$ , 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 总能找到 $N(\varepsilon) > 0$ , 使当 $n > N$ 时有 $|z_n - z| < \varepsilon$ , 则 $z$ 称为序列 $\{z_n\}$ 的极限, 或者说序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z$ , 而写成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

一个序列的极限必定是这序列的聚点, 而且是唯一的聚点.

**有界序列和无界序列** 给定序列 $\{z_n\}$ , 如果存在一个正数 $M$ , 使对于所有的 $n$ 都有 $|z_n| < M$ , 则序列称为有界的; 如果对于任何正数 $M$ , 总有一个 $n$ 使 $|z_n| > M$ , 则 $\{z_n\}$ 称为无界的.

**玻-外(Bolzano-Weierstrass)定理** 一个有界的(无穷)序列至少有一个聚点.

这定理的证明与实数情形类似, 也是用区间套的方法, 这里从略.

**序列收敛的判据——科希(Cauchy)充要条件** 一个序列 $\{z_n\}$ 收敛的充要条件是: 任意给定 $\varepsilon > 0$ , 存在正整数 $N(\varepsilon)$ , 使对于任意正整数 $p$ 有

$$|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon.$$

证明如下: 条件是必要的, 因为若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ , 则对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 必存在 $N(\varepsilon)$ , 使 $|z_N - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|z_{N+p} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 因此有

$$|z_{N+p} - z_N| = |z_{N+p} - z + z - z_N| \leq |z_{N+p} - z| + |z_N - z| < \varepsilon,$$

其中 $p$ 是任意正整数.

要证明条件是充分的, 以 $z_N$ 为圆心,  $\varepsilon$ 为半径, 作一圆. 既然不论 $p$ 是什么正整数都有 $|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon$ , 故在所作的圆内有 $\{z_n\}$ 的无穷个点, 而在圆外只能有 $\{z_n\}$ 的有限个点. 因此,  $\{z_n\}$ 是有界序列. 按玻-外定理,  $\{z_n\}$ 至少有一个聚点, 且位于圆内. 现在证

明,在这种情形下,  $\{z_n\}$  只能有一个聚点, 因而是收敛的. 设  $\{z_n\}$  有两个聚点  $A$  和  $B$ , 则因  $A$  和  $B$  都在所说圆内, 故  $\overline{AB} < 2\epsilon$ , 或者  $\epsilon > \frac{1}{2}\overline{AB}$ , 而这是与  $\epsilon$  为任意正数相矛盾的.

练习题 1. 证明: 如果  $z_n = x_n + iy_n$  而  $\{z_n\}$  收敛于  $z = x + iy$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ; 反之亦然(由此可见一个复数序列的收敛问题与两个实数序列的收敛问题等价).

练习题 2. 证明下列定理: 若  $\{z_n\}$  和  $\{z'_n\}$  都收敛, 则

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n,$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n / \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \quad (\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \neq 0).$$

## 1.4 无穷远点

根据上节柯希充要条件知道, 一个无界序列不可能是收敛的. 因为如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  (有限), 则对于任意给定的  $\epsilon > 0$ , 总存在正数  $N$ , 使当  $n > N$  时  $|z_n - z| < \epsilon$ , 故一定能找到一个正数  $M$ , 例如  $M$  等于  $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_N|$  和  $|z| + \epsilon$  中的最大者, 使对于所有的  $n = 1, 2, \dots$  都有  $|z_n| < M$ , 而这与序列是无界的相矛盾.

一个无界序列, 如果在有限处没有聚点, 则说这序列的极限为无穷, 而写成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty.$$

也就是说, 对于任意给的正数  $M$ , 总可以找到  $N > 0$ , 使当  $n > N$  时  $|z_n| > M$ .

在复变函数理论中常把无穷也了解为复数平面上的一个“点”, 其模大于任何正数, 辐角不定. 包括无穷远点在内的复数平面称为扩充了的复数平面.

在平面上用一个点来代表无穷是比较难于直观地理解的。因

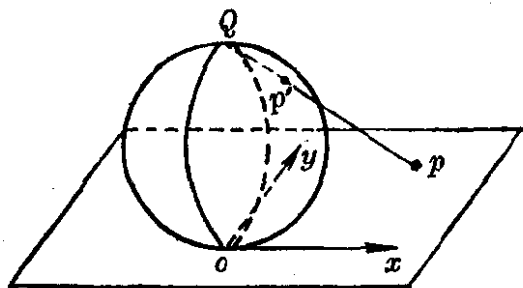


图 4

此对于包括无穷在内的几何图象，也用复数球面的表示法：在复数平面上作一任意半径的球面与平面上的坐标原点  $O$  相切(图4). 从  $O$  引垂直于平面的直线，与球面交于  $Q$  点。对于复数平面上的

每一点  $P$  (代表一复数  $z$ ) 作直线  $PQ$  交球面于  $P'$  点 (测地投影)。于是，对于每一复数  $z$  都有球面上的一点  $P'$  与之相应。因此，这球面也可用来表示复数的全体。现在如果让  $P$  点以任何方式无限地远离原点  $O$ ，则相应的  $P'$  点将无限地趋近球面的顶点  $Q$ 。这样， $Q$  就可以看作无穷远的代表点，而整个球面就把无穷远点包括在内。这样的球面称为复数球面或者里曼(Riemann)球面。



## 第二章 解析函数

### 2.1 复变函数·区域的概念·连续和一致连续

设有复数平面(或者球面,下同)上的一个点集 $E$ (复数的集合),复变数 $z=x+iy$ 可以取 $E$ 中每一点的复数值.如果对于 $E$ 中的每一个 $z$ 值,都有一个或多个复数值 $w=u+iv$ ( $u$ 和 $v$ 为实数)与之相应,则 $w$ 称为 $z$ 的函数——复变函数,定义域为 $E$ ,用符号

$$w=f(z), z \in E$$

表示.因 $z=x+iy$ ,故 $u$ 和 $v$ 都是 $x$ 和 $y$ 的实函数,即

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \quad (1)$$

这表明,一个复变函数无非是两个二元实变函数的有序组合.

但在复变函数论中要研究的不是这么普遍的复变函数,而是研究一类具有特殊性质的复变函数——解析函数(见2.3节).

**区域的概念** 在解析函数论中,函数的定义域不是一般的点集,而是满足一定条件的特殊点集,称为区域,常用 $G$ 来表示.

为了说明区域的概念,先解释什么叫做点集的内点.点集的内点是这样的点,以它为圆心作一圆,只要半径足够小,则圆内所有的点均属于该点集.

**区域**是满足下列两个条件的点集:

- a) 全由内点组成;
- b) 具有连通性,即点集中的任何两个点都可以用一条折线连接起来,折线上的点全属于这点集.

区域常用不等式表示.例如 $|z|<r$ 表示圆心在原点、半径为 $r$ 的圆内区域; $a<|z-c|<b$ 表示一环形区域,环形的内外圆心均