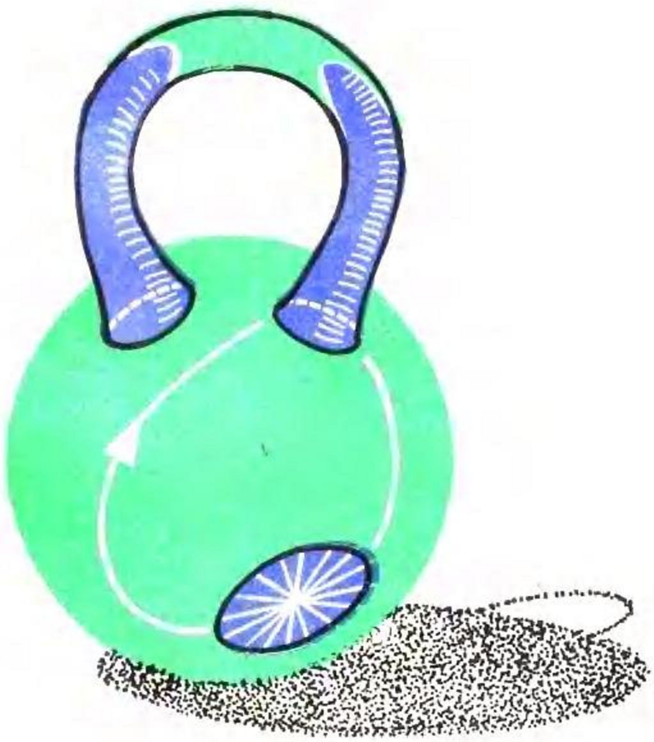
流形

徐森林　薛春华

LIU XING　LIU XING



高等教育出版社

流　形

徐森林　薛春华

高等教育出版社

内容提要

本书前三章介绍了微分流形、向量丛、切丛、张量丛、外微分形式和单位分解等近代数学的重要概念并证明Stokes定理以及一些其它的重要定理.第四章介绍了临界点、临界值、正则点、正则值、Brouwer度和向量场的指数等基本概念,证明了Sard定理和Poincaré-Hopf指数定理.第五章给出了仿紧流形的向量丛上Riemann度量的存在性定理和Riemann联络的存在唯一性定理.研究了Riemann正则子流形的第I、第II基本形式和证明了著名的Gauss定理.

本书可作为理科大学数学系和物理系有志于近代科学研究的高年级大学生和研究生的选修课教材和自学参考书.阅读全书可使读者具有良好的近代数学基础和抽象思维的能力.

流　　形

徐森林　薛春华

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 12　字数 290 000

1991 年 6 月第 1 版　1991 年 6 月第 1 次印刷

印数 0 001—1 420

ISBN7-04-003040-3/O·947

定价 5.40 元

序　言

近代科学技术的飞速发展，使得科学家，特别是数学家和物理学家急需熟悉和掌握微分流形、向量丛、向量场、张量场、外微分形式、正则值、临界值、Brouwer 度、切向量场的指数、Riemann 度量、线性联络、Riemann 联络等近代数学的基本概念，急需通晓 Stokes 定理、Sard 定理、Poincaré-Hopf 指数定理、Riemann 度量的存在性定理和 Riemann 联络的存在唯一性等定理. 这些概念和定理已成为科学家在研究和国际学术交流中不可缺少的数学语言和工具. 它的重要性已愈来愈为人们所理解并感到其紧迫性. 但是，目前国内绝大部分的大学生和研究生对这些内容了解极少，甚至一无所知. 而又不易找到深入浅出的、系统的、合适的外文参考书. 本书就是为使他们能尽快从数学分析、线性代数、点集拓扑的基础上达到具有近代数学知识的较高水平而架设的桥梁.

本书在介绍微分流形的同时，还突出使用了纤维丛、向量丛的数学术语，使读者能站在更高的观点上理解近代数学的知识. 全书反复和交替使用近代数学观点（不变观点或映射观点）和古典观点（坐标观点），可使读者既能了解以前的知识和方法又能熟悉近代数学语言. 相信读者在今后的学习和研究中，运用这些内容和方法会给他们带来巨大的益处. 书中精选了大量有用的、有趣的和具有一定难度的实例，它们能帮助读者更好地理解抽象的数学概念，增强分析思考问题的能力.

完成本书的构思是与长期受到导师、著名数学家吴文俊教授的指导和帮助密切相关的. 在吴先生即将到达70寿辰之际，作者完成此书以表达学生对老师的衷心感激. 还应特别指出的是，吉

林大学数学系的江泽坚教授热情鼓励作者完成此书，并面授许多非常宝贵的建设性意见，在此向他表示深切的谢意．科大数学系84级优秀学生周坚为书中一些重要概念的叙述，为定理和有难度例题的证明提供了许多独特的有用见解．科大研究生杨和平和陈广华阅读了全书并提出了宝贵的意见，作者对他们也表示谢意．

感谢国家自然科学基金会，意大利 ICTP 和 TWAS为完成本书提供的有效帮助和资助．

作者　徐森林　薛春华

于中国科学技术大学　1988.8.

目　录

第一章 微分流形

在研究Euclid空间中大量的光滑曲线、曲面的基础上，本章§1引进了局部坐标和微分流形的概念. 由于局部坐标的引入，使我们可以利用数学分析中微分学的知识，并在§2介绍了微分流形之间映射的可微性和浸入、嵌入、微分同胚等重要概念. §3中证明了一个紧致的n维微分流形可以嵌入(安装)到Euclid空间$\boldsymbol{R}^N$中作为它的正则子流形. 而Whitney嵌入定理指出，一个仿紧的n维微分流形可以嵌入到$\boldsymbol{R}^{2n+1}$中作为它的正则子流形. 在§3中还介绍了单位分解，并证明了仿紧n维微分流形上单位分解的存在性定理. 它在第三章定义流形上的积分，证明Stokes定理和第五章证明向量丛上Riemann度量存在性定理等起着极其重要的作用.

§1 微分流形

设$\boldsymbol{R}$为实数域，$\boldsymbol{N}$为自然数集，$n\in\boldsymbol{N}$，n维Euclid空间

$$\boldsymbol{R}^n=\{x=(x^1,\cdots,x^n)\mid x^i\in\boldsymbol{R},1\leqslant i\leqslant n\},$$

其中x^i为点x的第i个坐标. 如果$x,y\in\boldsymbol{R}^n$，我们用$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x^iy^i$和$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}$分别表示$x$，$y$的内积和距离，而$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2}$表示$x$的模.

设$U\subset\boldsymbol{R}^n$为开集，如果函数$f:U\to\boldsymbol{R}$连续，则称f是C^0类的；如果f有r阶连续偏导数，则称f是C^r类的($r\in\boldsymbol{N}$)；如果f有任意阶连续偏导数，则称f是C^∞类的；如果f是实解析函数(f在U

的每一点的某个开邻域里可展开成 n 元收敛的幂级数)，则称 f 是 C^ω 类的.

设 $f=(f_1,\cdots,f_m):U\to\boldsymbol{R}^m$ 为映射，如果 $f_1,\cdots,f_m$ 都是 C^r 类的，则称映射 f 是 C^r 类的，其中 $r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$. 记 $C^r(U,\boldsymbol{R}^m)=\{f\mid f:U\to\boldsymbol{R}^m$ 是 C^r 的$\}$，并规定 $0<1<2<3<\cdots<\infty<\omega$.

众所周知，$\boldsymbol{R}^n$ 中有整体的直角坐标. 设 p 点的直角坐标为 $x^i=x^i(p)$, $i=1,\cdots,n$, 则 $p\to p_0\Leftrightarrow x^i(p)\to x^i(p_0)$, $i=1,\cdots,n$. 那么单位球面 $S^n=\{x=(x^1,\cdots,x^{n+1})\mid\sum\limits_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是否也有整体坐标呢?换句话说，是否存在一个同胚 $\varphi:S^n\to\varphi(S^n)\subset\boldsymbol{R}^n$，使得 $x^i(p)$, $i=1,\cdots,n$ 作为 p 点的坐标. 利用 Brouwer 区域不变性定理，即设 $U\subset\boldsymbol{R}^n$ 为开集，$f:U\to f(U)\subset\boldsymbol{R}^n$ 为同胚映射，则 $f(U)$ 也为 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集，可以推出同胚 φ 是不存在的. (反证) 假设 $\varphi:S^n\to\varphi(S^n)\subset\boldsymbol{R}^n$ 为同胚，由 S^n 的每一点 p 有一开邻域 V_p 同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集和Brouwer区域不变性定理，$\varphi(V_p)\subset\varphi(S^n)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，于是 $\varphi(S^n)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集. 另一方面，因紧致集 S^n 的连续象 $\varphi(S^n)$ 是紧致集，故为闭集. 又因 $\boldsymbol{R}^n$ 连通，所以 $\varphi(S^n)=\boldsymbol{R}^n$. 从 $\boldsymbol{R}^n$ 非紧致可知 $\varphi(S^n)$ 也非紧致，这与上述 $\varphi(S^n)$ 紧致相矛盾.

因此，我们只能降低要求，看能否使 S^n 的每一点有一个开邻域与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的某个开集同胚(局部欧). 例如，从 $U_1=S^n-\{(0,\cdots,0,-1)\}$ 到 $\boldsymbol{R}^n=\{(x^1,\cdots,x^n,0)\mid x^i\in\boldsymbol{R}\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 作南极投影 $\varphi_1:U_1\to\boldsymbol{R}^n$，使 $\varphi_1(p)$ 为 p 和南极 $(0,\cdots,0,-1)$ 连线与 $\boldsymbol{R}^n$ 的交点. 类似地，从 $U_2=S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 作北极投影 $\varphi_2:U_2\to\boldsymbol{R}^n$，使 $\varphi_2(p)$ 为 p 和北极 $(0,\cdots,0,1)$ 连线与 $\boldsymbol{R}^n$ 的交点，于是，S^n 是由两个局部欧的开集粘起来的(见 8 页图 2).

从上面这具体例子，就产生了拓扑流形这个近代数学中极其

重要和基本的概念.

定义 1 设M为T_2(Hausdorff)空间. 如果对任何$p\in M$，都存在p在M中的开邻域U和同胚$\varphi:U\to\varphi(U)$，其中$\varphi(U)\subset \mathbf{R}^n$为开集(局部欧)，则称$M$为 **$n$ 维拓扑流形或 C^0 流形.**

(U,φ)称为**局部坐标系**(坐标卡，图片)，U称为**局部坐标邻域**，φ称为**局部坐标映射**，$x^i(p)=(\varphi(p))^i$，$1\leqslant i\leqslant n$为$p\in U$的**局部坐标**，简记为$\{x^i\}$，有时也称它为局部坐标系. 如果记$\mathscr{D}^0$为局部坐标系的全体，那末，拓扑流形就是由$\mathscr{D}^0$中的图片粘成的图册. 如果$p\in U$，则称(U,φ)为 **p 的局部坐标系.**

设$(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}^0$，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，称$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$和$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$为**坐标变换**. 对实函数$f:M\to\mathbf{R}$，如果$f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\mathbf{R}$是$C^r$类的$(r\geqslant 1)$，$f\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\mathbf{R}$不一定是$C^r$类的. 但是，当$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$是$C^r$类时，$f\circ\varphi_\beta^{-1}=(f\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})$也是$C^r$类的. 由此引导我们定义下面$C^r$微分流形的概念.

定义 2 设$(M,\mathscr{D}^0)$为n维拓扑流形，Γ是指标集，如果$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}\subset\mathscr{D}^0$满足:

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha=M$;

(2) 相容性: 如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}$，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$是$C^r$类的，$r\in\{1,2,\cdots,\infty,\omega\}$(由对称性，当然$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$也是$C^r$类的)，即

$$\begin{cases}y^1=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_1(x^1,\cdots,x^n)\\ \cdots\\ y^n=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_n(x^1,\cdots,x^n)\end{cases}$$

是C^r类的;

(3) 最大性: $\mathscr{D}$关于(2)是最大的，也就是说，如果$(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0$，且它与任何$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$是$C^r$相容的，则$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 它等价于，如

果$(U,\varphi)\overline{\in}\mathscr{D}$，则$(U,\varphi)$必与某个$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$不是$C^r$相容的.

我们称$\mathscr{D}$为M上的 **C^r 微分构造**或 **C^r 构造**，$(M,\mathscr{D})$为M上的 **C^r 微分流形**或 **C^r 流形**. 当$r=\omega$时，称$(M,\mathscr{D})$为**实解析流形**(图 1).

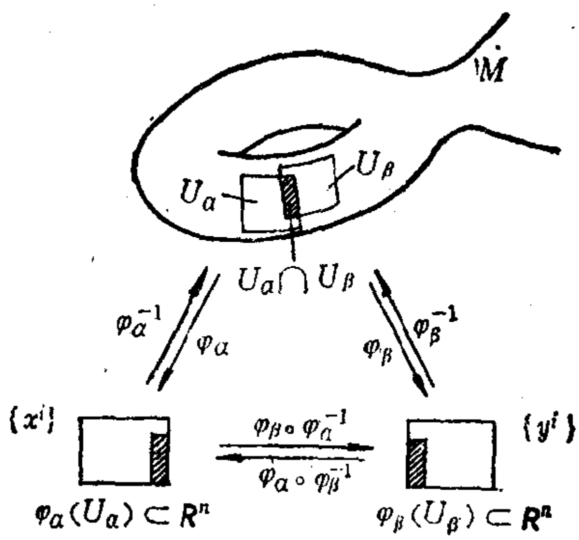


图 1

类似于拓扑流形，C^r微分流形就是由$\mathscr{D}$中图片光滑(C^r, $r\geqslant 1$)粘成的图册.

如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$和$(U_\beta,\varphi_\beta)$，$\{y^i\}\in\mathscr{D}$为$p$的两个局部坐标系，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则由 Jacobi 行列式的等式

$$1=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\cdot\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$$

可知，在$\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$中，

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\neq 0.$$

一般说来，要得到$\mathscr{D}$中所有的图片是困难的，下面定理指出，只要得到满足定义 2 中(1)和(2)的$\mathscr{D}'$就可唯一确定$\mathscr{D}$了. 我们称$\mathscr{D}'$为微分构造$\mathscr{D}$的一个**基**. 这就给出了具体构造微分流形的方法，它与线性代数中由基生成向量空间以及点集拓扑中由拓扑基生成拓扑的想法是完全类似的.

设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0$，如果对任何$(V,\psi)\in\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$，$\psi\circ\varphi^{-1}$和$\varphi\circ\psi^{-1}$是$C^r$类的，则称$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'$是$C^r$相容的.

定理 1 1° 设$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$满足定义 2 中条件(1)和(2)，则它唯一确定了一个C^r微分构造$(r\geqslant 1)$ $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0\,|\,(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^r$相容$\}$;

2° 设$\mathscr{D}'_1,\mathscr{D}'_2\subset\mathscr{D}^0$满足定义 2 中条件(1)和(2)且彼此的元素$C^r$相容，则它们所确定的$C^r$微分构造是相同的，即$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

证明 1°由条件(2)和$\mathscr{D}$的定义，$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$，故$\mathscr{D}$满足条件(1). 设$(U,\varphi),(V,\psi)\in\mathscr{D}$，若$p\in U\cap V$，则存在$p$的局部坐标系$(W,\theta)\in\mathscr{D}'$使在$U\cap V\cap W$中，$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$是$C^r$类的，因此，$\mathscr{D}$满足条件(2). 设$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}C^r$相容，由$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$可知$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^r$相容，即$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 因此，$\mathscr{D}$满足条件(3). 这就证明了$\mathscr{D}$为$C^r$微分构造.

2°设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$，对任何$(V,\psi)\in\mathscr{D}'_2$，若$p\in U\cap V$，则存在$p$的局部坐标系$(W,\theta)\in\mathscr{D}'_1$，使在$U\cap V\cap W$中，$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$和$\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\psi^{-1})$是$C^r$类的，所以$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2$，$\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}_2$. 同理，$\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$. 这就证明了$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$. #

引理 1 设$k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$k<r$，则存在$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使$f$是$C^k$类但不是$C^r$类的.

证明 如果$0\leqslant k<\infty$，则

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

为所求函数. 如果$k=\infty$，$r=\omega$，则

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

为所求函数. 事实上，由归纳法和L'Hopital(洛比塔)法则可

知，

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0 & ,x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $p_n(u)$ 为 u 的多项式，这就证明了 f 是 C^∞ 类的．但它不是 C^ω 类的．（因为，若 f 是 C^ω 类的，则存在 $\delta>0$，使 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=0, x\in(-\delta,\delta)$，这与 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}>0, x\in(0,\delta)$ 相矛盾．　#

更进一步，我们可以构造一个处处 C^∞ 但无处解析的函数．为此，令 $\varphi(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0 & ,x\leqslant 0,\end{cases}$ $\psi_n(x)=\varphi(x)\varphi\left(\frac{1}{2^n}-x\right)$，$n\in N$．显然，在 $x=0$，$\frac{1}{2^n}$ 处，$\psi_n(x)$ 的各阶导数为0．以 $\frac{1}{2^n}$ 为周期将 $\psi_n\Big|_{[0,\frac{1}{2^n}]}$ 延拓到整个 R 上得 $\varphi_n(x)$．易见 $\varphi_n(x)$ 为 C^∞ 函数，且当 $x\neq\frac{k}{2^n}$（整数集 $Z\ni k$）时解析．令 $0<a_n<\frac{1}{2^n}(\sup_{x\in R}\{|\varphi_n(x)|, |\varphi'_n(x)|, \cdots, |\varphi_n^{(n)}(x)|\})^{-1}$ 和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x).$$

由 a_n 的取法易知 f 是 C^∞ 类的．但 $f(x)$ 在 $x=\frac{k}{2^m}(k\in Z, m\in N)$ 处不解析．事实上，不妨设 k 为奇数（否则约分），则 $\psi_l(x)$ 在 $\frac{k}{2^m}$ 处解析（$l=0,1,\cdots,m-1$）．但当 $n\geqslant m$ 时，$\psi_n^{(s)}\left(\frac{k}{2^m}\right)=\psi_n^{(s)}\left(\frac{k}{2^n}\right)=0$，$s=0,1,2,\cdots$，故 $\sum_{n=m}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ 在 $\frac{k}{2^m}$ 处各阶导数为0，但在 $\frac{k}{2^m}$ 附近非恒为

0，故不解析．这就证明了$f(x)=\sum_{l=0}^{m-1}a_l\varphi_l(x)+\sum_{n=m}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$在$\frac{k}{2^m}$处不解析．但$\left\{\frac{k}{2^m}\mid k\in\mathbf{Z},\ m\in\mathbf{N}\right\}$在$\mathbf{R}$上稠密，故$f(x)$无处解析．

定理 2 设k，$r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$k<r$．$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$满足定义 2 中的条件(1)和(2)．由$\mathscr{D}'$唯一确定的$C^r$微分构造$\mathscr{D}^r=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0\mid(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^r$相容$\}$．如果将$\mathscr{D}'$的$C^r$相容自然视作$C^k$相容，而由$\mathscr{D}'$唯一确定的$C^k$构造$\mathscr{D}^k=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0\mid(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^k$相容$\}$．则$\mathscr{D}^r\subsetneqq\mathscr{D}^k$．

证明 因$k<r$，故(U,φ)与$\mathscr{D}'C^r$相容也是C^k相容，这就推出了$\mathscr{D}^r\subset\mathscr{D}^k$．

再证$\mathscr{D}^r\neq\mathscr{D}^k$．设$f$为引理 1 中的$f$，如果$k>0$，令$g(x)=x+f(x)$，则$g'(0)=1+f'(0)=1$；如果$k=0$，令$g(x)=x^{\frac{1}{3}}$．于是，存在$\delta>0$，使$g$在$(-\delta,\delta)$内严格递增．设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}^r$，$p\in U$，令$\theta(x)=x-\varphi(p)$为平移；$(-\delta,\delta)^n=\{x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbf{R}^n\mid|x^i|<\delta\}$，$\eta:(-\delta,\delta)^n\to\mathbf{R}^n$，$\eta(x)=(g(x^1),x^2,\cdots,x^n)$．则存在$p$的开邻域$V\subset U$，且$0\in\theta\circ\varphi(V)\subset(-\delta,\delta)^n$．于是，

$$(\eta\circ\theta\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}=\eta\circ\theta$$

是C^k类但不是C^r类的，这就证明了$(V,\ \eta\circ\theta\circ\varphi)$和$(U,\ \varphi)$是$C^k$相容但不是$C^r$相容的，即$(V,\eta\circ\theta\circ\varphi)\in\mathscr{D}^k$但$(V,\eta\circ\theta\circ\varphi)\overline{\in}\mathscr{D}^r$．#

从这个定理可知，当$k<r$时，如果加进与C^r流形$(M,\mathscr{D}^r)C^k$相容的所有图片，它就可成为一个C^k流形$(M,\mathscr{D}^k)$，此时，$\mathscr{D}^k$的图片确实比$\mathscr{D}^r$的图片严格增多了．以后，当$k<r$时，凡是C^r流形，总是按上述理解，它也是一个C^k流形．

有了上述定理，我们就可构造各种各样的流形了．

例 1 设M为$\mathbf{R}^n$中的开集，$\mathscr{D}'=\{(M,\ \mathrm{Id}_M)\mid\mathrm{Id}_M:M\to M,\ \mathrm{Id}_M(p)=p,p\in M\}$，则由$\mathscr{D}'$唯一确定了一个$C^\omega$流形(由定理 2，它

也唯一确定了一个 C^r 流形，$r\in\{0,1,2,\cdots,\infty\}$，但当 r 增大时，图片严格减少）. 它就是通常所指的流形. 称 Id_M 为 M 上的恒同映射.

例 2 设 $(M,\mathscr{D}_M)$ 为 n 维 C^r 流形，$U\subset M$ 为开集，$\mathscr{D}_M=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in\Gamma\}$，令

$$\mathscr{D}_U=\{(U\cap U_\alpha,\varphi_\alpha|U\cap U_\alpha)\,|\,U\cap U_\alpha\neq\varnothing,\alpha\in\Gamma\},$$

易证 $(U,\ \mathscr{D}_U)$ 也是一个 n 维 C^r 流形，称为 $(M,\ \mathscr{D}_M)$ 的 **C^r 开子流形**.

例 3 S^n 为 n 维 C^ω 流形.

设 $p\in S^n\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$，它的直角坐标为 $(x^1,\ \cdots,\ x^{n+1})$. 如果将 $\boldsymbol{R}^n=\{(x^1,\cdots,x^n,\ 0)\,|\,x^i\in\boldsymbol{R},\ 1\leqslant i\leqslant n\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 与 $\{(x^1,\ \cdots,\ x^n)\,|\,x^i\in\boldsymbol{R},1\leqslant i\leqslant n\}$ 视作相同，则从图 2容易算出

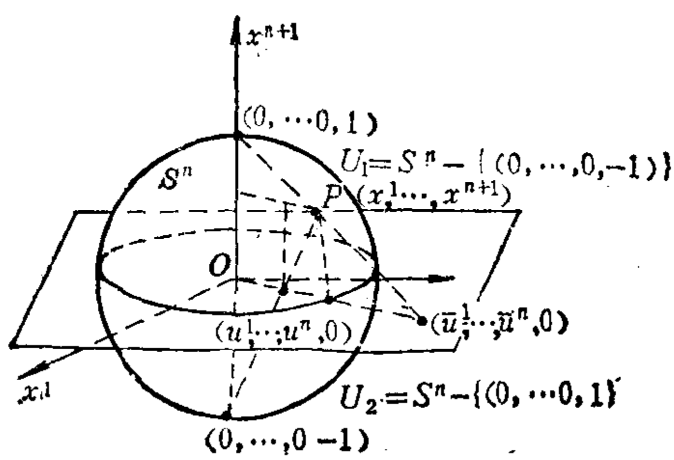


图 2

$$\varphi_1: U_1\longrightarrow \boldsymbol{R}^n,$$

$$(u^1,\cdots,u^n)=\varphi_1(x^1,\cdots,\ x^{n+1})=\left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right),$$

$$(x^1,\cdots,x^{n+1})=\varphi_1^{-1}(u^1,\cdots,u^n)$$

$$=\left(\frac{2u^1}{1+\sum\limits_{i=1}^n(u^i)^2},\ \cdots,\frac{2u^n}{1+\sum\limits_{i=1}^n(u^i)^2},\ \frac{1-\sum\limits_{i=1}^n(u^i)^2}{1+\sum\limits_{i=1}^n(u^i)^2}\right),$$

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

$$(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n) = \varphi_2(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right),$$

$$(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \varphi_2^{-1}(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$$

$$= \left(\frac{2\bar{u}^1}{1+\sum_{i=1}^{n}(\bar{u}^i)^2}, \cdots, \frac{2\bar{u}^n}{1+\sum_{i=1}^{n}(\bar{u}^i)^2}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{u}^i)^2-1}{1+\sum_{i=1}^{n}(\bar{u}^i)^2}\right),$$

且

$$(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n) = \left(\frac{u^1}{\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2}, \cdots, \frac{u^n}{\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2}\right),$$

$$(u^1, \cdots, u^n) = \left(\frac{\bar{u}^1}{\sum_{i=1}^{n}(\bar{u}^i)^2}, \cdots, \frac{\bar{u}^n}{\sum_{i=1}^{n}(\bar{u}^i)^2}\right).$$

于是，$\mathscr{D}_1' = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$满足定义1中条件(1)：$S^n = U_1 \cup U_2$和(2)：$\mathscr{D}_1'$中元素是$C^\omega$相容的（$\{u^i\}$和$\{\bar{u}^i\}$彼此可表示为实有理函数，由于实变量的有理函数自然可延拓为复变量的有理函数. 再由求导的加减乘除法则，后者关于复变量是可导的，故解析，于是它在每一点的一个开邻域内可展开成收敛的幂级数. 如果再限制到实变量，它在每一实点的一个实开邻域内展开成收敛的幂级数. 因此，实有理函数是实解析的. 应用[I. M. 菲赫金哥尔茨，445页]的方法也可证明上述结论.）. 根据定理 1，$\mathscr{D}_1'$ 确定了 S^n 上的一个 C^ω 微分构造 $\mathscr{D}_1 = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi)$与$\mathscr{D}_1' C^\omega$ 相容$\}$，而 $\mathscr{D}_1'$ 是 C^ω 微分构造 $\mathscr{D}_1$ 的一个基. 通过计算得到 Jacobi 行列式为

$$J_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} = -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2\right)^n}.$$

如果将局部坐标$\{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3, \cdots, \bar{u}^n\}$换成$\{\bar{u}^2, \bar{u}^1, \bar{u}^3, \cdots, \bar{u}^n\}$，则相应

的 Jacobi 行列式就大于 0.

下面我们换一种方式来给出 S^n 的 C^∞ 微分构造的另一个基. 为此, 对任何 $i=1,\cdots,n+1$, 令

$$U_i^+=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n \mid x^i>0\},$$

$$U_i^-=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n \mid x^i<0\},$$

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm\to\varphi_i^\pm(U_i^\pm)=\{(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}) \mid \sum_{j\neq i}(x^j)^2<1\},$$

$$\varphi_i^\pm(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}),$$

称 $\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}\}$ 为 $U_i^\pm$ 中的局部坐标, 其中 $\hat{x}^i$ 表示删去 x^i.

容易看出, $\mathscr{D}_2'=\{(U_i^\pm,\varphi_i^\pm) \mid i=1,\cdots,n+1\}$ 满足定义 1 中的 (1): $S^n=\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}(U_i^+\cup U_i^-)$ 和 (2): $\mathscr{D}_2'$ 中的元素是 C^∞ 相容的. 例如,

$$\varphi_2^+\circ(\varphi_1^-)^{-1}(x^2,\ \cdots,\ x^{n+1})=\varphi_2^+(x^1,\ \cdots,\ x^{n+1})=(x^1,x^3,\cdots,x^{n+1})$$

$$=\left(-\sqrt{1-\sum_{i=2}^{n+1}(x^i)^2}\ ,x^3,\cdots,x^{n+1}\right)$$ 是 C^∞ 类的 (利用 $\sqrt{1-u}$ 在 0 的开邻域 $(-1,\ 1)$ 中可展开成收敛的幂级数和 [*I. M.* 菲赫金哥尔茨, *p*438] 证明或直接用 ε-N 方法证明). 根据定理 1, $\mathscr{D}_2'$ 确定了 S^n 上的一个 C^∞ 微分构造 $\mathscr{D}_2=\{(U,\varphi) \mid (U,\varphi)$ 与 $\mathscr{D}_2'\ C^\infty$ 相容$\}$, 而 $\mathscr{D}_2'$ 是 C^∞ 微分构造 $\mathscr{D}_2$ 的一个基. 通过计算得到 Jacobi 行列式为 $J_{\varphi_j^\pm\circ(\varphi_i^\pm)^{-1}}=(-1)^{i+j}\dfrac{x^j}{x^i}$. 如果取 $(-1)^{i+1}\{x^1,\ \cdots,\hat{x}^i,\cdots,\ x^{n+1}\}$ 为 U_i^+ 的局部坐标 ($(-1)^{i+1}\{x^1,\ \cdots,\ \hat{x}^i,\ \cdots,\ x^{n+1}\}$ 表示将坐标 $\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}\}$ 作 $i+1$ 次对换), 取 $(-1)^i\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}\}$ 为 U_i^- 的局部坐标, 则相应的 Jacobi 行列式就大于 0.

因为 $\{x^1,\cdots,x^{n+1}\}$ 与 $\{u^1,\cdots,u^n\}$ (或 $\{\bar{u}^1,\cdots,\bar{u}^n\}$) 彼此可以表示出来, 且 $\mathscr{D}_1'$ 与 $\mathscr{D}_2'$ 中的元素是 C^∞ 相容的, 由定理 1 可知, $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

应该指出的是, 紧致集 S^n 不能与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集同胚, 所以 S^n

不是局部坐标邻域.

此外,对于 S^2,球面坐标系 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$,它是局部坐标系而不是整体坐标系,其中

$$\varphi^{-1}:(0,\pi)\times(0,2\pi)\to U=\varphi^{-1}((0,\pi)\times(0,2\pi))\subset S^n,$$

$$\varphi^{-1}(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cdot\cos\varphi,\sin\theta\cdot\sin\varphi,\cos\theta).$$

对于 S^1,令

$$\psi_1:S^1-\{e^{i0}\}\to(0,2\pi)\subset\boldsymbol{R}^1,$$

$$\psi_1(e^{i\theta})=\theta,\theta\in(0,2\pi),$$

$$\psi_2:S^1-\{e^{i\pi}\}\to(\pi,3\pi)\subset\boldsymbol{R}^1,$$

$$\psi_2(e^{i\eta})=\eta,\eta\in(\pi,3\pi).$$

显然,在 $S^1-\{e^{i0},e^{i\pi}\}$ 中,$e^{i\theta}=e^{i\eta}\Leftrightarrow$

$$\eta=\theta+2k\pi=\begin{cases}\theta+2\pi, & \theta\in(0,\pi)\\ \theta, & \theta\in(\pi,2\pi).\end{cases}$$

于是 η 是 θ 的 C^∞ 函数,θ 也是 η 的 C^∞函数. 由定理 1,$\mathscr{D}_3'=\{(S^1-\{e^{i0}\},\psi_1),(S^1-\{e^{i\pi}\},\ \psi_2)\}$确定了一个 1 维 C^∞ 微分构造$\mathscr{D}_3$. 易见 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2=\mathscr{D}_3$. 同样值得注意的是,$\theta$ 是局部坐标系而不是整体坐标系.

例 4 n 维实射(投)影空间 $P^n(\boldsymbol{R})$.

设 $x=(x^1,\cdots,x^{n+1}),y=(y^1,\cdots,y^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$. $x\sim y\Leftrightarrow x=\lambda y,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq0$. $x\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$ 的等价类 $[x]=\{y\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}\mid y\sim x\}$,等价类的全体为

$$P^n(\boldsymbol{R})=(\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\})/\sim=\{[x]\mid x\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}\}.$$

投影 $\pi:R^{n+1}-\{0\}\to P^n(\boldsymbol{R})$, $\pi(x)=[x]$. 设 $R^{n+1}-\{0\}$的拓扑为 τ,易证$\tau'=\{U\mid\pi^{-1}(U)\in\tau\}$为 $P^n(\boldsymbol{R})$上的一个拓扑,于是$(P^n(\boldsymbol{R}),\tau')$为$(\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\},\tau)$的商拓扑空间,称为 n 维实射影空间. 下面我们可以证明 $P^n(\boldsymbol{R})$为 n 维 C^∞ 流形. 对任何$[x]$, $[y]\in P^n(\boldsymbol{R})$, $[x]\neq[y]$,则存在含 $\pi^{-1}([x])$的以原点为心的去心开锥体 V_x和含