从现代数学看中学数学

孙熙椿 主编

中国林业出版社

从现代数学看中学数学

孙熙椿　主编

中国林业出版社

从现代数学看中学数学

孙熙椿 主编

中国林业出版社出版（北京西城区刘海胡同7号）

新华书店北京发行所发行 遵化人民印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 14.375 印张 322 千字

1991年7月第一版 1991年7月第一次印刷

印数1—6,000册 定价6.80元

ISBN 7-5038-0737-7/O·0020

序　言

许多从事数学教学的人都曾遇到这样的问题：高等院校数学系开设的许多现代数学课程与初等数学严重脱离，不少学生经常问：学习这么多现代数学到中学去如何用？现代数学知识对中学数学教学有多大用处？这些问题长期以来都没有得到很好解决。

的确，现代数学与初等数学不仅在内容上，而且在思维方式上都存在巨大差异。可是，大家知道，现代数学的许多分支，正是由于受到初等数学某些基本概念和问题的启示而产生发展起来的，因此在它们之间必然存在着某种联系，这是一个很值得研究的课题。为什么以前对这项研究重视不够呢？

综合性大学的一些教师虽然有较深的数学造诣，但对中学数学教学的实际情况不甚了解；而中学数学教师，由于工作关系，对于现代数学的研究现状又不太熟悉，因此双方都有一定的困难，这项任务就只有落到高等师范院校的老师们身上，因为他们既了解中学数学教学改革的实际情况，又比较熟悉现代数学的内容。江西师范大学数学系的老师们在这方面迈出了可喜的一步。他们试图用现代数学的观点去剖析初等数学的基本概念和问题，帮助读者用现代数学的知识去分析和理解中学数学教材，使他们真正觉得现代数学对中学数学教学确实有指导意义，从而站得更高，对中学数学的来龙

去脉看得更清楚。

本书由黄贤汶、肖应昆、李长明、吴东兴等教授以及其他10多位同志共同撰写，由孙熙椿同志主持编辑的。它观点新颖，很有启发性，特别是他们从高等师范院校数学系开设的现代数学课程出发，帮助读者了解现代数学与初等数学之间的联系，这是此书的特点之一，用这种观点编写的书在我国也许还是首次出现，因此，本书在帮助读者开拓视野，提高中学数学的教学质量等方面将会起到良好的作用。

这方面的工作属于数学教育的范畴，也是数学、教育学、心理学的交叉性研究。这本书的编出，不仅对中学的教学，而且对高等师范院校数学系的教学改革都将会起到促进作用，我自己也会从中得到教益和启发，谨此以为序。

王梓坤

目　录

一　平面直角坐标系下二次曲线的“三线”方程

黄　贤　汶

这里所论的“三线”是这样的三条直线：

（一）已知中点二次曲线的弦所在的直线；

（二）已知切点二次曲线的切线；

（三）已知极点二次曲线的极线——过极点作二次曲线的两条切线所得切点弦所在的直线。

“三线”方程，分别推导如下。

1．已知中点的弦所在的直线

设　$M_0(x_0,y_0)$是二次曲线

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

的一条弦的中点，并记这条弦的倾斜角为α，则这条弦所在直线以t为参数的方程是：

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$$

鉴于$M_0(x_0,y_0)$是这条弦的中点，于是反映这条弦端点坐标的两个参数t_1和t_2满足方程：

$$f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)=0$$

就是　$A(x_0+t\cos\alpha)^2+2B(x_0+t\cos\alpha)(y_0+t\sin\alpha)$

$$+C(y_0+t\sin\alpha)^2+2D(x_0+t\cos\alpha)$$
$$+2E(y_0+t\sin\alpha)+F=0$$

考虑到$M_0(x_0,y_0)$为弦的中点，因而必有：

$$t_1+t_2=0$$

也就是说，在上述关于 t 的二次方程中，t 的一次项的系数必为 0，即：

$$2Ax_0\cos\alpha+2B(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)+2Cy_0\sin\alpha$$
$$+2D\cos\alpha+2E\sin\alpha=0$$

就是 $(Ax_0+By_0+D)\cos\alpha+(Bx_0+Cy_0+E)\sin\alpha=0$

因而就决定了这条弦的斜率为：

$$k=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{Ax_0+By_0+D}{Bx_0+Cy_0+E}$$

因此，这条弦所在直线的普通方程是：

$$y-y_0=-\frac{Ax_0+By_0+D}{Bx_0+Cy_0+E}(x-x_0)$$

$$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+Dx+Ey$$
$$-(Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0)$$
$$=0$$

就是 $$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x_0+x)$$
$$+E(y_0+y)+F-(Ax_0^2+2Bx_0y_0$$
$$+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F)=0$$

最后便可得到一个已知中点弦所在直线的带规律性的方程：

$$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x_0+x)$$
$$+E(y_0+y)+F=f(x_0,y_0)$$

为了熟记规律，可首先将二次曲线方程的左端写成：

$$Axx+B(yx+xy)+Cyy+D(x+x)$$
$$+E(y+y)+F$$

其次于上式中每项的第一个流动坐标以中点M_0的同名坐标代换，就有：

$$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x_0+x)$$
$$+E(y_0+y)+F$$

最后写出方程，使它的右端为函数 $f(x, y)$在点$M_0(x_0,y_0)$的值 $f(x_0,y_0)$。

例 1 判定点$M_0(1,1)$对于二次曲线

$$f(x,y)=5x^2+8xy+5y^2-18x-18y$$
$$+9=0$$

的位置关系，并求出有关"三线"中"一线"的方程和图象。

解 由于二次曲线方程的二次项系数满足

$$5\times5-\left(\frac{8}{2}\right)^2=9>0$$

故知方程的曲线为椭圆。

鉴于 $f(1,1)=-9<0$

故知$M_0(1, 1)$为椭圆的内点。因此，以M_0为中点的弦所在直线的方程是：

$$5x+4(x+y)+5y-9(1+x)-9(1+y)+9=-9$$

就是 $0x+0y=0$

这反映过点$M_0(1, 1)$的直线在椭圆内部的线段均为椭圆的直径，也就是说，点M_0为椭圆的中心，如果将曲线方程标准化，那末同样可以说明这一事实。

鉴于曲线方程中x和y互换位置，方程保持不变，故知方程的曲线关于直线

$$y=x$$

对称。由此，将原坐标轴旋转45°的角，便将坐标变换公

式：

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases}$$

代入曲线的原方程，使得曲线在新坐标系下的方程为：

$$5\left[\frac{1}{2}(x'-y')^2+\frac{1}{2}(x'+y')^2\right]$$
$$+8\left[\frac{1}{2}(x'^2-y'^2)\right]$$
$$-18\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'+x'+y')\right]+9=0$$

化简后可得曲线在新坐标系下的标准方程：

$$\frac{(x'-\sqrt{2})^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

可见点$(\sqrt{2},\ 0)$是椭圆在新坐标系下的中心，它在原坐标系下的坐标是：

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (\sqrt{2}-0)=1 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (\sqrt{2}+0)=1 \end{cases}$$

很明显，点$M_0(1,1)$就是椭圆在原坐标系下的中心。因此，过中心M_0的任一条弦（如图 1.1）中的AB都是椭圆的直径。

2. 已知切点的切线

如果对中点弦所在直线作平行移动，并且始终保持M_0为动弦的中点，那末这样一序列平行直线中必至少有一条（对

于无心的二次曲线)至多有两条(对于有心的二次曲线)会成为二次曲线的切线，而这时M_0就成了切点$T_0(x_0,y_0)$。因此，必然使我们想到，以$T_0(x_0, y_0)$为切点的二次曲线的切线方程也必具有以$M_0(x_0,y_0)$为中点的二次曲线的弦所在直线方程的形式，即对于二次曲线

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx$$
$$+2Ey+F=0$$

以$T_0(x_0, y_0)$为切点的切线方程是：

$$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x_0+x)$$
$$+E(y_0+y)+F$$
$$=f(x_0,y_0)$$

考虑到切点$T_0(x_0, y_0)$是曲线上的点，故知：

$$f(x_0,y_0)=0$$

从而可知切线方程是：

$$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x_0+x)$$
$$+E(y_0+y)+F=0$$

例 2　判定点$T_0(0,3)$对于椭圆

$$f(x,y)=5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$$

的位置关系，并求出有关“三线”中“一线”的方程和图象。

解　鉴于$f(0, 3)=0$，故知$T_0(0, 3)$为椭圆上的点。因此，以T_0为切点的切线(如图1.1中的P_0T_0)方程是：

$$4(3)x+5(3)y-9x-9(3+y)+9=0$$

就是

$$x+2y-6=0$$

3. 已知极点的极线

设$P_0(x_0,y_0)$是二次曲线

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx$$
$$+2Ey+F=0$$

外的一点，过它作二次曲线的两条切线 P_0T_1 和 P_0T_2，$T_1(x_1,y_1)$和$T_2(x_2,y_2)$为切点，则根据已知切点切线方程的规律，我们可以分别写出两条切线 P_0T_1 和 P_0T_2 的方程：

$$Ax_1x+B(y_1x+x_1y)+Cy_1y+D(x_1+x)$$
$$+E(y_1+y)+F=0$$
$$Ax_2x+B(y_2x+x_2y)+Cy_2y+D(x_2+x)$$
$$+E(y_2+y)+F=0$$

由于两条切线P_0T_1和P_0T_2相交于极点$P_0(x_0,y_0)$，因而可以得到两个等式：

$$Ax_1x_0+B(y_1x_0+x_1y_0)+Cy_1y_0+D(x_1+x_0)$$
$$+E(y_1+y_0)+F=0$$
$$Ax_2x_0+B(y_2x_0+x_2y_0)+Cy_2y_0+D(x_2+x_0)$$
$$+E(y_2+y_0)+F=0$$

从以上两个等式的结构可以看出，$T_1(x_1,y_1)$和$T_2(x_2,y_2)$的坐标都满足直线方程：

$$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x_0+x)+$$
$$E(y_0+y)+F=0$$

这就是说，上列方程就是以 $P_0(x_0, y_0)$ 为极点的二次曲线 $f(x,y)=0$ 的极线T_1T_2 的方程。

例 3　判定点$P_0(4,1)$对于椭圆

$$f(x,y)=5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$$

的位置关系，并求出有关“三线”中“一线”的方程和图象。

解　鉴于 $f(4, 1)>0$，故知 $P_0(4, 1)$ 为椭圆的外点，因此，以P_0为极点的极线(如图 1.1 中的 T_0T_1)方程是：

$$20x+4(x+4y)+5y-9(4+x)-9(1+y)+9=0$$

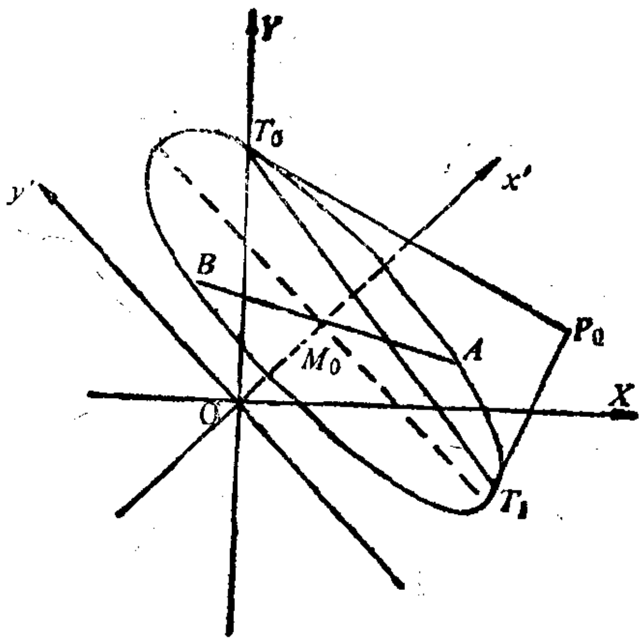

图 1.1

就是 $$5x+4y=12$$

4. “三线”方程的联系

推导二次曲线的“三线”方程，是以求出它们的斜率为起点的。考虑到“三线”斜率的一致性，因而只须着眼于求切线的斜率，这样用高等数学观点处理，更为简便。

对于二次曲线方程

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2Ax+2By+2D$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2Bx+2Cy+2E$$

然而 $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

因而，曲线上任意一点(x,y)处的切线的斜率可表示为：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big/\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$=-\frac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}$$

对于以$T_0(x_0,\ y_0)$为切点，以$P_0(x_0,\ y_0)$为极点以及以$M_0(x_0,\ y_0)$为弦的中点，相应的切线，极线以及中点弦所在的直线的斜率均为：

$$k=-\frac{Ax_0+By_0+D}{Bx_0+Cy_0+E}$$

这与用初等方法所求出的二次曲线的“三线”的斜率必然是一模一样的。

这里推导二次曲线的“三线”方程，有一个先后顺序，即先有中点弦所在直线的方程，然后才有已知切点的切线方程；又以切线的方程为桥梁，最后才推出已知极点的极线方程。

“三线”方程在形式上是大同小异的，但在内容上却有本质的区别。对于中点弦，(x_0,y_0)是弦的中点的坐标；对于切线，$(x_0,\ y_0)$是切点的坐标；对于极线，$(x_0,\ y_0)$是极点的坐标。

应该注意到，$M_0(x_0,y_0)$是二次曲线的内点，$T_0(x_0,y_0)$是二次曲线上的点，$P_0(x_0,y_0)$是二次曲线外的点，各有所属，不能张冠李戴，应用时要心手相应。

在方程的形式上，前“二线”的右端都是：

$$f(x_0,y_0)=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$$

不过对于中点弦所在直线的方程，右端的为：

$$f(x_0,\ y_0)\neq 0$$

而对于切线的方程，右端的为：

$$f(x_0,y_0)=0$$

至于后“二线”方程的右端，就不提什么函数 $f(x, y)$在点(x_0,y_0)的值 $f(x_0,y_0)$，而都写上 0 就行了。

通过对二次曲线的“三线”方程的研究，而且考虑到二次曲线的直径是一序列平行弦的中点的集合，这使我们有理由作出一个结论：

“二次曲线直径的延长线必定通过产生直径的诸平行弦的极点”。

为了简化证明所作结论的运算过程，这里只对标准方程下的椭圆和抛物线来研究所提出的命题。

(1) 设椭圆的标准方程为：

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

它的一条弦的两个端点为 $T_1(x_1,y_1)$ 和 $T_2(x_2,y_2)$，则两端点处的切线方程是：

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$$
$$b^2x_2x+a^2y_2y=a^2b^2$$

因此，以 T_1T_2 为极线关于椭圆的极点$P_0(x_0,y_0)$的坐标，可以通过求上述两条切线的交点的坐标得到，就是：

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} a^2b^2 & a^2y_1 \\ a^2b^2 & a^2y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2x_1 & a^2y_1 \\ b^2x_2 & a^2y_2 \end{vmatrix}}=\frac{a^2(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1}$$

$$y_0=\frac{\begin{vmatrix} b^2x_1 & a^2b^2 \\ b^2x_2 & a^2b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2x_1 & a^2y_1 \\ b^2x_2 & a^2y_2 \end{vmatrix}}=\frac{b^2(x_1-x_2)}{x_1y_2-x_2y_1}$$

就是 $P_0(x_0, y_0) \equiv P_0\left(\dfrac{a^2(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1}, \dfrac{b^2(x_1-x_2)}{x_1y_2-x_2y_1}\right)$

设切点弦 T_1T_2 的中点为 $M_0(X, Y)$，则：

$$M_0(X,Y) \equiv M\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right]$$

鉴于椭圆的直径是一条通过它的中心 O 的线段，因此，要证明所作结论的正确性，只须证明 O、M_0、P_0 三点共线，即证明 $\triangle OM_0P_0$ 的面积 S 为 0。事实上：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} X & Y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2(x_1y_2-x_2y_1)}\begin{vmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ a^2(y_2-y_1) & b^2(x_1-x_2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2(x_1y_2-x_2y_1)}[(b^2x_1^2+a^2y_1^2)-(b^2x_2^2 \\ &\qquad +a^2y_2^2)] \\ &= \frac{1}{2(x_1y_2-x_2y_1)}(a^2b^2-a^2b^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

这就反映了 S 的值为 0，即 O、M_0、P_0 三点共线，因此，所作结论成立，如图 1.2 (a)。

(2) 设抛物线的标准方程为：

$$y^2 = 2px$$

它的一条弦的两个端点为 $T_1(x_1, y_1)$ 和 $T_2(x_2, y_2)$，则两端处的切线方程是：

$$y_1y = p(x_1+x)$$
$$y_2y = p(x_2+x)$$

因此，以 T_1T_2 为极线关于抛物线的极点 $P_0(x_0, y_0)$ 的坐标，可以通过求上述两条切线的交点的坐标得到。就是：