

异形楼梯内力分析 及结构设计

齐志成 著

中国建筑工业出版社

常用符号

一、螺旋型楼梯常用符号

- q ——垂直于水平面荷载中心线处的竖向均布线荷载，一般沿楼梯全长取定值 (kN/m)；
- r ——楼梯中轴线水平投影半径 (m)；
- r_0 ——楼梯荷载作用线半径 (m)， $r_0 = \eta r$ ，式中 $\eta = 1 + \frac{b^2}{12r^2}$ 为荷载偏心系数；
- φ ——楼梯倾斜角 (rad)；
- m ——楼梯中轴线弧长与其水平投影弧长之比， $m = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$ ；
- t_0 ——自固定坐标原点起算的至楼梯末端的旋转角 (rad)；
- t_1 ——自固定坐标原点起算的至楼梯休息平台末端的旋转角 (rad)；
- t ——自固定坐标原点起算的至楼梯中轴线上任一动点 D 的可变旋转角 (rad)；
- h ——楼层高 (m)；
- b 、 a 、 d ——梯宽、楼梯正截面宽、楼梯正截面高 (m)；
- $x_1 \sim x_6$ ——基本体系切口 o 点处待求未知力及未知力矩矢， x_1 、 x_2 、 x_3 为沿 X 、 Y 、 Z 轴正向作用的力 (kN)， x_4 、 x_5 、 x_6 为沿 X 、 Y 、 Z 轴正向作用的力矩矢 (kN·m)；
- δ_{ij} ——基本体系 o 点处 $x_j = 1$ (广义力；力和力矩矢) 作用下，在 x_i 作用正方向上的变位 (广义变位；线位移和转角)；
- Δ_{i0} ——基本体系在外荷作用下， o 点处 x_i 作用正方向上的变位 (广义变位)；
- E_c 、 G_c ——混凝土的弹性模量和剪切模量 (kN/m²)， $G_c = 0.425 E_c$ ；
- J_x ——梯板正截面绕 x 轴的抗扭惯性矩， $J_x = \xi ad^3$ ， ξ 按表 5-1 确定；
- $J_y =$ ——梯板正截面绕 y 轴的惯性矩， $J_y = \frac{1}{12} ad^3$ ；
- $J_z =$ ——梯板正截面绕 z 轴的惯性矩， $J_z = \frac{1}{12} a^3 d$ ；
- f ——楼梯中轴线某点的 Z 轴向变位，即该点的挠度；
- l_0 ——楼梯中轴线的展开长度 (m)。

二、悬挑型楼梯常用符号 (未列出者与螺旋型楼梯相同)

- r ——休息平台半径 (m)；
- S_0 ——起始梯段或末端梯段的长度 (m)，当两段长度不等时则另加下标；
- S_1 ——三跑楼梯中间梯段切口至该梯段末端的长度 (m)，一般取等于中间梯段长度的一半，当长度不等时则另加下标；
- n ——休息平台竖向均布线荷载集度与梯级段荷载集度之比；
- t_0 ——自固定坐标原点起算的至休息平台末端的旋转角 (rad)，三跑楼梯时为休息平台的旋转角。

前 言

在高级民用建筑及公共建筑中，各种类型的螺旋楼梯和悬挑楼梯都是建筑师和结构工程师颇感兴趣、乐于采用的。近年来，设计师已不满足于只采用较常见的普通类型，有所创新的各种形式的异形楼梯不断出现在工程中，而这些异形楼梯的理论分析尚较少研究，即使是一些常见的类型，有关的参考文献也多散见在国内外期刊杂志上，计算方法及运算符号各不相同，极不便于参考采用。国内已出版的异形楼梯内力分析的专著，其内容已不适应当前设计发展的需要。作者希望能提供一本较为完整的专著。书中采用统一的基本假定、计算方法、运算过程及符号系统。在推导公式时，力求概念清楚、明确易懂。重要的概念讲解详细并突出重点，力求使读者熟悉后能熟练掌握、灵活应用。

本书第一章讨论了螺旋型楼梯的内力分析及挠度的计算。除习用的楼梯类型外尚介绍了两个不同半径相连的、中间带有休息平台的、末端带有一直线梯段的及S形螺旋楼梯的内力分析。上述特例实质上代表了三种不同的组合类型，为组合型异形楼梯的应用开拓了思路并提供了计算方法。本章也给出了楼梯为弹性支座时，以及当两个支座有已知变位时的计算原理，当支座条件与计算假定出入较大时，可以用来做近似分析以修正内力的计算结果。

第二章研究了两梯段及三梯段悬挑楼梯的内力分析。梯段间的连接适用于任意的转角。对于悬挑楼梯的分析，各文献采用了多种不同的计算简图及基本假定，分别处理不同的平面类型，计算手法也多有不同。本书给出了与螺旋型楼梯相一致的，并适用于任何平面组合的统一的计算简图和计算方法。对文献中较少研究的三梯段悬挑楼梯及其各种特例都做了讨论。

第三章讨论了组合型的异形楼梯。对本书所给出的七种不同类型的基本梯段，按照上、下段，左、右旋的任意组合，共给出了七十余种不同的组合，提供给建筑师和结构工程师在设计中选用。

第四章提出了中间加有支柱的两连跨异形楼梯的计算方法。给出了单跨楼梯及支柱的弹性常数、角变位移方程和可动结点平衡方程的求解。对于因楼梯外形复杂，楼层较高而导致内力或挠度过大时，在跨中设置支柱是一个行之有效的解决办法。本章的计算方法也适用于多个基本梯段在一点相交的组合型楼梯，因而进一步丰富了可供选择的异形楼梯类型。

考虑到结构工程师的任务是对任何结构进行经济、合理而有效的设计，而不是单纯的内力分析，故本书对结构设计也给予了应有的注意，如合理确定计算简图、保证设定的边界条件基本实现的措施、如何加强结构延性等设计问题都在第五章内讨论。

为加强本书的实用性，编制了各种旋转角度的螺旋楼梯和休息平台具有不同角度的两梯段悬挑楼梯各截面作用力计算表，可方便地直接查出各截面的作用力，所提供的表格已基本满足目前较普遍采用的楼梯类型及一般的设计需要。

衷心期望本书对建筑工程中异形楼梯的设计、推广和外形的不断创新有所帮助。

最后，向为本书绘制精美插图的王伯钧高级工程师、提供各截面作用力计算表电算数据的杨绍武工程师表示衷心感谢，由于他们的协助使本书生色不少。

作 者

于湖南省建筑设计院

目 录

前言

常用符号

第一章 螺旋型楼梯内力分析	1
第一节 概述	1
第二节 计算理论及基本公式	3
第三节 两端固定的对称型螺旋楼梯	10
第四节 两端半铰支承的对称型螺旋楼梯	17
第五节 一端固定、一端半铰支承或铰支的螺旋楼梯	20
第六节 支座变位和弹性支座时的变形协调方程	24
第七节 两端固定、两个不同半径相连的螺旋楼梯	27
第八节 两端固定、末端带有一直线梯段的螺旋楼梯	31
第九节 两端固定的S形螺旋楼梯	36
第十节 两端固定、中间带有休息平台的螺旋楼梯	39
第二章 悬挑型楼梯内力分析	49
第一节 概述	49
第二节 两端固定的两梯段悬挑楼梯	50
第三节 两端固定的对称型两梯段悬挑楼梯及对折式、直角式特例	62
第四节 两端固定的三梯段悬挑楼梯	70
第五节 各种特例的讨论	84
第六节 两端半铰支承的对称型悬挑楼梯	92
第七节 剪式楼梯	95
第三章 组合型楼梯	96
第一节 概述	96
第二节 螺旋梯段与直线段相连接的基本梯段	98
第三节 两端固定的组合型楼梯的计算方法	101
第四章 中间设有支柱的异形楼梯内力分析	104
第一节 前言及符号系统的规定	104
第二节 远端固定的单跨异形楼梯的弹性常数	104
第三节 支柱的弹性常数	107
第四节 角变位移方程及结点变位的求解	108
第五节 计算例题	110
第六节 简单结语	117
第五章 结构设计	118
第一节 板式螺旋楼梯的荷载计算	118
第二节 矩形截面的抗扭刚度及截面剪应力	119

第三节	计算简图边界条件的合理确定	120
第四节	实现固定端条件的构造措施	121
第五节	挠度控制	121
第六节	其他设计细节	122
第六章	常用异形楼梯截面作用力计算表	124
第一节	两端半铰支承的螺旋楼梯各截面作用力计算表及编制使用说明	124
第二节	两端固定的螺旋楼梯各截面作用力计算表及编制使用说明	126
第三节	两端固定的悬挑楼梯各截面作用力计算表及编制使用说明	128
	计算表格	131
	参考文献	177

第一章 螺旋型楼梯内力分析

第一节 概 述

螺旋楼梯外形美观新颖，既满足功能要求、又丰富了建筑造型，故高级民用及大型公共建筑中多有采用（图1-1）。

螺旋楼梯在大多数情况下是用钢筋混凝土现场浇筑成形的空间曲板。在结构形式上有梁式和板式的区别，梁式多用于梯宽不宽的、轻巧的小型楼梯，多做成单梁式。梁设在楼梯中轴线处，也可设在荷载作用线的位置。从旋转方向上又可分为左旋梯（顺时针旋升）和右旋梯（逆时针旋升）的不同（图1-2）。平面布置上也可以有不同旋转半径相结合、左右旋相结合、带有部分直线段以及带有中间休息平台等各种类型。在支承条件上有两端

半铰支承、两端固定或一端固定一端为其他任意边界条件的不同。以上各课题本章均给出了概念清楚、推导过程简单明了并易于理解的统一计算方法。



图 1-1

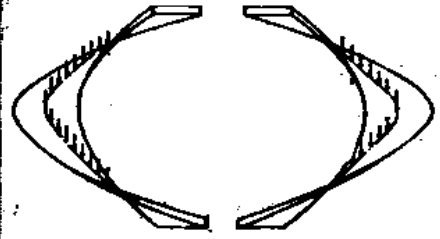


图 1-2

螺旋楼梯是多次超静定结构，内力变化比较复杂，截面上六个内力在沿中轴线不同位置处有各自不同的变化规律，并互有影响，没有明显规律可供遵循。当总旋转角不同或支座条件略有改变时，内力变化相当敏感。由于计算简图并不能完全反映并符合实际，仅有相对的准确性。这些特点都应该细致处理，并在设计时给以充分注意。

板式螺旋楼梯的计算简图是把楼梯的中轴线视为杆件计算轴线的单跨空间曲梁。本书将以矢量算法来推导不同支座条件下所需的一切计算公式。对于梁式楼梯采用以梁的中轴线做为杆件计算轴线的计算简图是符合实际情况的，而对于目前所大量采用的板式螺旋楼梯，由于板的宽度较大，内侧与外侧半径相差比较明显，以楼梯中轴线做为杆件计算轴线的假定，没有考虑到空间曲面的受力性能，对个别内力会有一些误差。国外一些学者曾用板壳理论进行内力分析，在理论上做过一些较深入的研究，但国内对此研究尚少。本书所采用

的这种计算简图仅是目前通用而被公认、并通过多年实践已证明是安全可靠的通用做法。

推导公式时认为楼梯全长是等截面的。

本章所用符号及其代表意义将随文引出，常用符号可参见书首的摘录。

一、坐标系及作用力正负号的规定

对右旋楼梯的坐标系按右手螺旋规则确定。左旋楼梯则按左手螺旋规则确定。固定坐标系用 X 、 Y 、 Z 笛卡尔坐标。动点坐标系变换为作用在动点 D 上的 τ 、 ν 、 β 自然坐标系。外荷载、作用力和力矩矢的方向与相应坐标系正向相同者为正，反之为负。与各正号广义力相应的广义变位（两者相乘得正功）为正，反之为负。在推导公式时本书均以右旋板式螺旋楼梯为对象。对梁式的螺旋楼梯除荷载取值应按结构布置具体计算外，计算理论并无不同。当研究对象是左旋楼梯时也可简便地按一定规则直接引用所推出的公式。推导公式时外荷载均设定与 Z 轴正向相同，当荷载的实际方向与 Z 轴正向相反时，数值计算时 q 应代以负号。

本章计算方法仅适用于楼梯总旋转角小于 2π 弧度的情况，对于总旋转角大于 2π 的螺旋楼梯虽然有过按同样理论计算所建成的实例，但由于其受力更为复杂，理论及实践尚有待深入及总结。

二、参数方程及动点坐标系

做为螺旋楼梯中轴线的螺旋线，其参数方程可表示为：

$$\vec{r} = r \cdot \cos t \vec{i} + r \cdot \sin t \vec{j} + kt \vec{k} \quad (1-1)$$

式中 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 是 C - XYZ 坐标系各轴正方向上的单位矢， \vec{r} 是坐标原点 C 至曲线上任一动点 D 的矢径， r 是螺旋线水平投影的圆半径， t 是动点 D 的矢径 \vec{r} 在 XC 平面上的投影与 CX 轴的交角， k 是确定节距 H 的常数、 $k = \frac{H}{2\pi}$ 。 $\vec{\tau}$ 是曲线上 D 点切线上指向弧长 S 增长方向上的单位矢，与 Z 轴相交成等角。 $\vec{\nu}$ 是曲线 D 点主法线上的单位矢，主法线指向曲线凹侧并垂直于 Z 轴，在 Z 轴上的分量为零， $\vec{\nu}$ 的方向与主法线的指向相同。 $\vec{\beta}$ 是 D 点从法线上的单位矢，其方向按右手螺旋规则确定。 $\vec{\tau}$ 、 $\vec{\nu}$ 、 $\vec{\beta}$ 构成佛兰纳动标三面体，以 $\vec{\tau}$ 、 $\vec{\nu}$ 、 $\vec{\beta}$ 的方向做为坐标轴正向的 τ 、 ν 、 β 坐标系是用来确定螺旋楼梯正截面上作用力的自然坐标系，也称为动点坐标系（图1-3）。

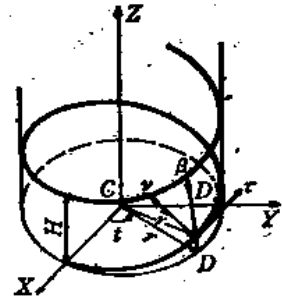


图 1-3

对于任意的总旋转角小于 2π 的螺旋楼梯，由平衡条件可得出六个平衡方程，当两端边界上未知反力及反力矩多于六时，体系是超静定的，否则是静定的。在以下各节将对各种类型及不同边界条件的螺旋楼梯计算理论给以详细的讨论。

三、力矩矢及坐标变换

为了方便阅读，先介绍以下两个概念：

1. 力 F 对于任意点 D 的力矩是一个作用于 D 点的矢量，它的方向是垂直于通过点 D 与力 F 的平面，其值等于 $M = F \cdot p$ ，式中 p 是力臂，也就是自点 D 至 F 方向的垂线。设 \vec{DO} 是自 D 点至力 F 作用点 O 的矢径，乘积 $F \cdot p$ 等于矢量 \vec{DO} 和力矢 \vec{F} 所构成的平行四边形的面积（ p 是平行四边形的高），因此力矩矢可写为 $\vec{M} = \vec{DO} \times \vec{F}$ （图1-4），即力矩矢 \vec{M} 等于矢径 \vec{DO} 与力矢 \vec{F} 的矢性积。由矢径 \vec{DO} 沿最短路线旋转至力矢 \vec{F} 时，按坐标系是按照

右手螺旋规则确定、抑或是按左手螺旋规则来确定力矩矢 \overline{M} 的方向，因此力矩矢是伪向量，其方向与坐标系的选择有关。

当向量用其在各坐标轴上的同名分量表示时，矢性积可用以下三阶行列式表示：

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1-2)$$

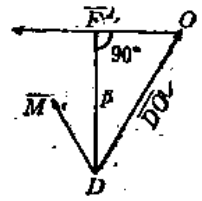


图 1-4

2. 坐标变换

设在原坐标系中，某一矢量的分量为 a_1, a_2, \dots, a_n ，改变坐标系以后，在新坐标系中为 b_1, b_2, \dots, b_n ，这个向量在原坐标系中可表示成矩阵 \overline{a}

$$\overline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

而在新坐标系中，该向量将表示成矩阵 \overline{b}

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

在向量 \overline{a} 和 \overline{b} 各分量间存在如下的齐次线性关系

$$a_i = \sum_{k=1}^n T_{ik} b_k$$

或

$$\overline{a} = T \overline{b}$$

矩阵 T 即是坐标变换矩阵，元素 T_{ik} 表示沿新轴 k 的单位矢量在原坐标系任一轴 i 上的相应分量。已知某一矢量在原坐标轴的各分量时，则该矢量在新坐标轴上的各分量将由下式确定

$$\overline{b} = T^{-1} \overline{a} \quad (1-3)$$

当新旧坐标系均为由正交坐标轴组成的坐标系时，则定义为正交变换。当为正交变换时， T^{-1} 极易求得。此时矢量在坐标变换时长度不变。任一矢量的长即模的平方在旧坐标系时为 $\overline{a}' \overline{a}$ ，而在新坐标系时为 $\overline{b}' \overline{b}$ ，但 $\overline{a} = T \overline{b}$ ，故 $\overline{a}' = \overline{b}' T'$ ，由此可得 $\overline{a}' \overline{a} = \overline{b}' T' T \overline{b} = \overline{b}' \overline{b}$ ，故知 $T' T = [1]$ ，即 $T' = T^{-1}$ ，也就是正交变换的坐标变换矩阵 T 的逆矩阵 T^{-1} 与它的转置矩阵 T' 相同，正交变换的逆矩阵可按照其转置矩阵直接写出。

第二节 计算理论及基本公式

一、变形协调方程

对于两端固定的螺旋楼梯，总旋转角为 t_0 ，楼层高为 h ，当承受任意外荷 $q(s)$ 时，每个固定端有三个未知反力和三个未知反力矩，故体系是六次超静定的。在楼梯下端 O 点处

切断，使成为一个静定的空间悬臂曲梁，以此作为求解的基本静定体系。用力法求解各赘余未知力。列出下端O点处的变形协调方程，即O点处在待求未知力、力矩及荷载作用下，切口处变位应等于零，其表达式为：

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\ \cdot & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\ \cdot & \cdot & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{55} & \delta_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{1q} \\ \Delta_{2q} \\ \Delta_{3q} \\ \Delta_{4q} \\ \Delta_{5q} \\ \Delta_{6q} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

式中 $x_1 \sim x_6$ ——切口O点处待求未知力及未知力矩。 x_1, x_2, x_3 为沿X、Y、Z轴正向作用的力， x_4, x_5, x_6 为沿X、Y、Z轴正向作用的力矩矢；

δ_{ij} ——在O点处 $x_j = 1$ （广义力：力和力矩矢）作用下，在 x_i 作用正方向上的变位（广义变位：线位移和转角）。根据马氏互等定理 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ；

Δ_{iq} ——基本静定体系在荷载 $q(s)$ 作用下，在切口处 x_i 作用正方向上的变位（广义变位）。

求得各单位力及荷载变位后，代入(1-4)式，即可求得 $x_1 \sim x_6$ 之值

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\ \cdot & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\ \cdot & \cdot & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{55} & \delta_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta_{1q} \\ \Delta_{2q} \\ \Delta_{3q} \\ \Delta_{4q} \\ \Delta_{5q} \\ \Delta_{6q} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

二、各单位力及荷载作用下各截面作用力

将固定坐标系移至楼梯下端O点处（图1-5），此时螺旋楼梯中轴线的曲线方程(1-1)式应改写为：

$$\bar{r} = r \cdot \sin t \bar{i} + r(1 - \cos t) \bar{j} + kt \bar{k} \quad (1-6)$$

式中 \bar{r} 为由新的坐标原点O至曲线上任一动点D的矢径（即矢量 \overline{OD} ）。

为了计算单位力变位 δ_{ij} 及荷载变位 Δ_{iq} ，并为以后计算曲线上任一动点D正截面上的作用力，必须首先计算 x_1 至 $x_6 = 1$ 及荷载作用下任一动点D正截面上所受之力。

1. O点处沿x轴正向作用的单位力 $x_1 = 1$ 对动点D的作用力

当动点坐标系平行于O-XYZ时， $x_1 = 1$ 对动点D所产生的力矩矢按(1-2)式应等于

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \overline{DO} \times \bar{x}_1 = - \overline{OD} \times \bar{x}_1 = - \bar{r} \times \bar{x}_1 \\ &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -r \cdot \sin t & -r(1 - \cos t) & -kt \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

或将此力矩矢按X、Y、Z轴的同名分量表示成矩阵形式

$$\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -kt \\ r(1 - \cos t) \end{bmatrix}$$

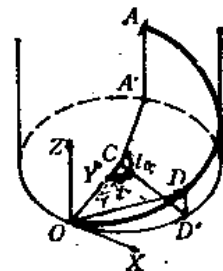


图 1-5

M_{x_1} 、 M_{y_1} 、 M_{z_1} 为 $x_1 = 1$ 在动点 D 所产生的沿 X 、 Y 、 Z 轴向上的力矩矢分量。

将 D - XYZ 坐标系变换成 D - $\tau\nu\beta$ 自然坐标系(也就是动点坐标系), 首先将原坐标系绕 Z 轴逆时针旋转 t 的座标变换 T_1 , 再做绕 Y 轴逆时针旋转 φ (φ 为楼梯中轴线倾斜角, $\text{tg}\varphi = \frac{H}{2\pi r} = \frac{h}{t_0 r}$)的座标变换 T_2 , 其变换矩阵为:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

将原坐标系各力的分量进行 T_1^{-1} 的变换, 再进行 T_2^{-1} 的变换, 即进行 $T_2^{-1} \cdot T_1^{-1}$ 的变换, 因 T_1 、 T_2 均为正交变换, 故 $T_2^{-1} \cdot T_1^{-1} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} = (T_1 \cdot T_2)'$, 即 $T_1 \cdot T_2$ 的逆等于 $T_1 \cdot T_2$ 的转置

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{bmatrix} \cos t \cdot \cos\varphi & -\sin t & -\cos t \cdot \sin\varphi \\ \sin t \cdot \cos\varphi & \cos t & -\sin t \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

$$(T_1 \cdot T_2)' = \begin{bmatrix} \cos t \cdot \cos\varphi & \sin t \cdot \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t \cdot \sin\varphi & -\sin t \cdot \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

经以上变换后, 即可求得 $x_1 = 1$ 在动点 D 的 τ 、 ν 、 β 轴向上的各力矩分量为

$$\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} M_{\tau 1} \\ M_{\nu 1} \\ M_{\beta 1} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -kt \\ r(1 - \cos t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kt \cdot \sin t \cdot \cos\varphi + r(1 - \cos t) \sin\varphi \\ -kt \cdot \cos t \\ kt \cdot \sin t \cdot \sin\varphi + r(1 - \cos t) \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

经同样变换, 求得 $x_1 = 1$ 在动点 D 的 τ 、 ν 、 β 轴向上各力分量为

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} P_{\tau 1} \\ P_{\nu 1} \\ P_{\beta 1} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \cdot \cos\varphi \\ -\sin t \\ -\cos t \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (1-11a)$$

2. O 点处沿 Y 轴正向作用的单位力 $x_2 = 1$ 对动点 D 的作用力
当动点坐标系平行于 O - XYZ 时

$$\bar{M}_2 = \overline{DO} \times \bar{x}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -r \sin t & -r(1 - \cos t) & -kt \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

即

$$\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} M_{x_2} \\ M_{y_2} \\ M_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kt \\ 0 \\ -r \cdot \sin t \end{bmatrix}$$

经同样变换得 $x_2 = 1$ 在动点 D 的 τ 、 ν 、 β 轴向上的各力矩分量及各力分量为

$$\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} M_{r2} \\ M_{\varphi 2} \\ M_{\beta 2} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} kt \\ 0 \\ -r \cdot \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kt \cdot \cos t \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin t \cdot \sin \varphi \\ -kt \cdot \sin t \\ -kt \cdot \cos t \cdot \sin \varphi - r \cdot \sin t \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

$$\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} P_{r2} \\ P_{\varphi 2} \\ P_{\beta 2} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \cdot \cos \varphi \\ \cos t \\ -\sin t \cdot \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (1-12a)$$

3. O点处沿Z轴正向作用的单位力 $x_3 = 1$ 对动点D的作用力
当动点坐标系平行于O-XYZ时

$$\bar{M}_3 = \overline{DO} \times \bar{x}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \cdot \sin t & -r(1 - \cos t) & -kt \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

即

$$\bar{M}_3 = \begin{bmatrix} M_{x3} \\ M_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r(1 - \cos t) \\ r \cdot \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

经同样变换得 $x_3 = 1$ 在动点D的 r 、 ν 、 β 轴向上的各力矩分量及力分量为

$$\bar{M}_3 = \begin{bmatrix} M_{r3} \\ M_{\nu 3} \\ M_{\beta 3} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} -r(1 - \cos t) \\ r \cdot \sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(1 - \cos t) \\ r \cdot \sin t \\ -r \cdot \sin \varphi(1 - \cos t) \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

$$\bar{P}_3 = \begin{bmatrix} P_{r3} \\ P_{\nu 3} \\ P_{\beta 3} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1-13a)$$

4. O点处沿X轴正向作用的单位力矩矢 $x_4 = 1$ 对动点D的作用力

$$\bar{M}_4 = \begin{bmatrix} M_{r4} \\ M_{\nu 4} \\ M_{\beta 4} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \cdot \cos \varphi \\ -\sin t \\ -\cos t \cdot \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

O点处单位力矩矢对动点D仅有力矩矢作用，无力矢产生。

5. O点处沿Y轴正向作用的单位力矩矢 $x_5 = 1$ 对动点D的作用力

$$\bar{M}_5 = \begin{bmatrix} M_{r5} \\ M_{\nu 5} \\ M_{\beta 5} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \cdot \cos \varphi \\ \cos t \\ -\sin t \cdot \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

6. O点处沿Z轴正向作用的单位力矩矢 $x_6 = 1$ 对动点D的作用力

$$\bar{M}_6 = \begin{bmatrix} M_{r6} \\ M_{\nu 6} \\ M_{\beta 6} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

7. \widehat{OD} 段上竖向均布荷载对D点的作用力

当 \widehat{OD} 段上荷载 \bar{q} 为竖向并沿线长度均布时，其合力等于 $t \cdot r_0 \cdot \bar{q}$ ，荷载的方向在推

导公式时认为与Z轴的正向相同，合力的作用点N位于t角的平分线上， \overline{CN} 在水平面上投影之长等于（见图1-6）

$$CN = \frac{\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} r_a \cdot \cos \alpha \cdot r_a \cdot da}{\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} q \cdot r_a \cdot da} = \frac{2r_a}{t} \sin \frac{t}{2}$$

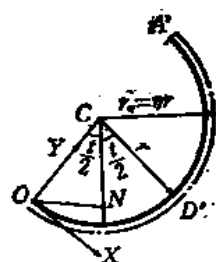


图 1-6

(1-17)

由此得到

$$\overline{ON} = \frac{2r_a}{t} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \overline{i} + \left(r - \frac{r_a}{t} \sin t \right) \overline{j} \quad (1-17a)$$

故

$$\overline{DN} = \overline{ON} - \overline{OD} = \left[\frac{2r_a}{t} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) - r \cdot \sin t \right] \overline{i} + \left(r \cdot \cos t - \frac{r_a}{t} \sin t \right) \overline{j}$$

式中 r_a 为螺旋楼梯的荷载作用线半径， $r_a = \eta \cdot r$ ， $\eta = 1 + \frac{b^2}{12r^2}$ 为荷载偏心系数； b 为梯宽。

因荷载竖向作用，求矩时N点与竖向位置的选择无关，故k轴分量可取为零，将 r_a 以 $\eta \cdot r$ 代入， \overline{OD} 段上荷载对D点之矩等于

$$\overline{M}_q = \overline{DN} \times t \cdot \eta \cdot r \cdot \overline{q} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{2\eta r}{t} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) - r \cdot \sin t & r \cdot \cos t - \frac{\eta r}{t} \sin t & 0 \\ 0 & 0 & t \eta r q \end{vmatrix}$$

即

$$\overline{M}_q = \begin{bmatrix} M_{xq} \\ M_{yq} \\ M_{zq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot \cos t - \eta \cdot \sin t \\ t \cdot \sin t - 2\eta \cdot \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \eta q r^2$$

变换为对D点自然坐标系的各力矩分量为

$$\begin{aligned} \overline{M}_q &= \begin{bmatrix} M_{xq} \\ M_{yq} \\ M_{zq} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} t \cdot \cos t - \eta \cdot \sin t \\ t \cdot \sin t - 2\eta \cdot \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \eta q r^2 \\ &= \begin{bmatrix} -\cos \varphi (\eta \cdot \sin t - t) \\ \eta (1 - \cos t) \\ \sin \varphi (\eta \cdot \sin t - t) \end{bmatrix} \eta q r^2 \end{aligned} \quad (1-18)$$

经同样变换得

$$\overline{P}_q = \begin{bmatrix} P_{xq} \\ P_{yq} \\ P_{zq} \end{bmatrix} = (T_1 \cdot T_2)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \eta q r = \begin{bmatrix} t \cdot \sin \varphi \\ 0 \\ t \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \eta q r \quad (1-18a)$$

公式(1-18)、(1-18a)是对沿线长度竖向均布荷载的情况推导的,对于其他类型的荷载也可用同样方法导出,因工程设计时应用较少,故不再对其他荷载推导通式。以后如不另加说明,荷载 q 都是竖向均布线荷载。

三、基本体系的单位力变位及荷载变位

忽略轴力及剪力对变形影响的各单位力变位 δ_{ij} 及荷载变位 Δ_{iq} 按下式计算

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} &= \int \frac{M_{\tau i} M_{\tau j} ds}{G_c J_{\tau}} + \int \frac{M_{\nu i} M_{\nu j} ds}{E_c J_{\nu}} + \int \frac{M_{\beta i} M_{\beta j} ds}{E_c J_{\beta}} \\ \Delta_{iq} &= \int \frac{M_{\tau i} M_{\tau q} ds}{G_c J_{\tau}} + \int \frac{M_{\nu i} M_{\nu q} ds}{E_c J_{\nu}} + \int \frac{M_{\beta i} M_{\beta q} ds}{E_c J_{\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

$i = 1 \sim 6, j = 1 \sim 6$

式中 E_c 为混凝土的弹性模量; G_c 为混凝土的剪切模量, $G_c = 0.425E_c$; J_{τ} 为绕 τ 轴的抗扭惯性矩, $J_{\tau} = \xi ad^3$; J_{ν} 为绕 ν 轴的惯性矩, $J_{\nu} = \frac{1}{12} ad^3$; J_{β} 为绕 β 轴的惯性矩, $J_{\beta} = \frac{1}{12} a^3 d$ 。以上各式 a 为梯板正截面宽, d 为梯板正截面高度, ξ 值按第五章第二节表5-1确定。

将公式(1-11)至(1-18)代入(1-19)式,即可求得各 δ_{ij} 及 Δ_{iq} 之值。

四、赘余力及各截面作用力的计算

求得基本静定体系的单位力变位及荷载变位,代入下端切口 O 点处的变形协调方程,即可求得切口处赘余未知力 $x_1 \sim x_6$ 之值。螺旋楼梯中轴线上任一动点 D 正截面上所受之力自应等于

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_D &= \sum_{i=1}^6 x_i \bar{M}_i + \bar{M}_q \\ \bar{P}_D &= \sum_{i=1}^6 x_i \bar{P}_i + \bar{P}_q \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

式中 \bar{M}_i 及 \bar{P}_i 、 \bar{M}_q 及 \bar{P}_q 为切口处单位力 $x_i = 1$ 及荷载对动点 D 的沿 τ 、 ν 、 β 轴向的作用力及力矩矢,按(1-11)至(1-18a)计算。

五、加于支承结构的作用力

为了计算支承结构的需要,须求出螺旋楼梯末端在支承结构主轴 X 、 Y 、 Z 轴向上加给支承结构的作用力。一般情况均使楼梯末端与支承结构正交,为此仅需将楼梯中轴线端点 A 的 $A-\tau\nu\beta$ 自然坐标系绕 ν 轴顺时针旋转 φ 角化成 $A-XYZ$ 坐标系。将 τ 、 ν 、 β 轴向各力经座标变换 T_2 (1-8)式化为 X 、 Y 、 Z 轴向各力即可

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_A &= \begin{bmatrix} M_{A\tau} \\ M_{A\nu} \\ M_{A\beta} \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} M_{AX} \\ M_{AY} \\ M_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AX} \\ M_{AY} \\ M_{AZ} \end{bmatrix} \\ \bar{P}_A &= \begin{bmatrix} P_{A\tau} \\ P_{A\nu} \\ P_{A\beta} \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} P_{AX} \\ P_{AY} \\ P_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{AX} \\ P_{AY} \\ P_{AZ} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

支承结构的座标轴按图1-7a确定。

当楼梯末端与支承结构不正交,而是楼梯末端 A 点 ν 轴与支承结构 Y 轴间有一顺时针 θ 角时(图1-7b),则经 T_2 变换后,尚应做绕 Z 轴顺时针旋转 θ 角的座标变换 T_1 (公式1-7

式中 t 改为 θ), 即进行 $T_1 \cdot T_2$ (公式1-9式中 t 改为 θ) 的变换

$$\begin{aligned} \bar{M}_A &= \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} = T_1 \cdot T_2 \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi & -\sin\theta & -\cos\theta \cdot \sin\varphi \\ \sin\theta \cdot \cos\varphi & \cos\theta & -\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} \\ \bar{P}_A &= \begin{bmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ P_{Az} \end{bmatrix} = T_1 \cdot T_2 \begin{bmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ P_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi & -\sin\theta & -\cos\theta \cdot \sin\varphi \\ \sin\theta \cdot \cos\varphi & \cos\theta & -\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ P_{Az} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-22) \bullet$$

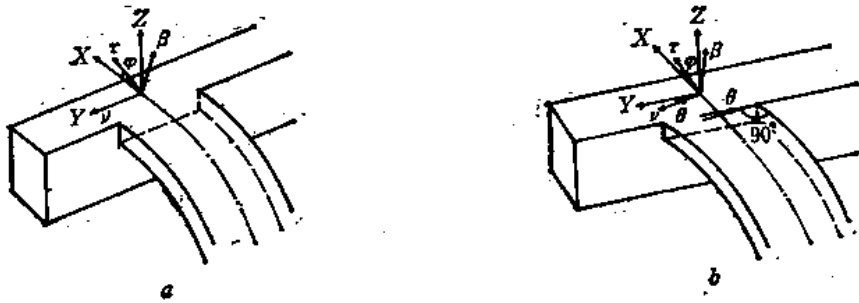


图 1-7

用以上公式求得的各作用力即可做为计算支承结构之用。应注意, 以上各力是位于楼梯计算截面中轴线端点 A 位置处 A - XYZ 轴向, 与支承结构的主轴线一般并不重合。故计算支承结构时尚应考虑 \bar{P} 作用点对支承结构主轴线的偏心, 而有附加的偏心弯矩产生。以下各章节均用(1-21)、(1-22)式确定楼梯加于支承结构的作用力, 不另做重复说明。

六、各种不同情况时的特定坐标系

本节公式是以右旋楼梯、固定坐标系位于下端切口处的情况推导的。起点处的固定坐标系、动点 D 的自然坐标系、其坐标轴正向按图1-8a确定, D 点处正截面切法及各正号力方向按图1-9a确定。当固定坐标系位于上端切口处时, 按图1-8b及1-9b确定。对右旋楼梯坐标系按右手螺旋规则确定。当为左旋楼梯时, 如固定坐标系位于下端切口处, 按图1-8c

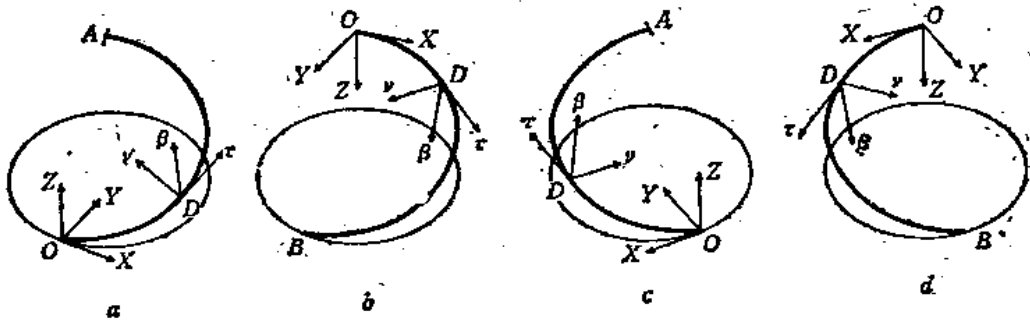


图 1-8

● 当 θ 角按绕 Z 轴逆时针方向确定时, 公式中用 $-\theta$ 代替 θ 。

及1-9c确定。固定坐标系位于上端切口处则按图1-8d及1-9d确定。对左旋楼梯坐标系按左手螺旋规则确定。在按以上所选的特定坐标系下，不难一一验证，曲线方程及座标变换矩阵的公式均完全相同。本书各章节中所推导的全部计算公式，虽然是针对右旋楼梯、固用坐标系位于下端切口的情况推导的，但对上述四种情况均可通用。左旋楼梯计算支座作用力时 θ 角按逆时针度量为正、反之为负。

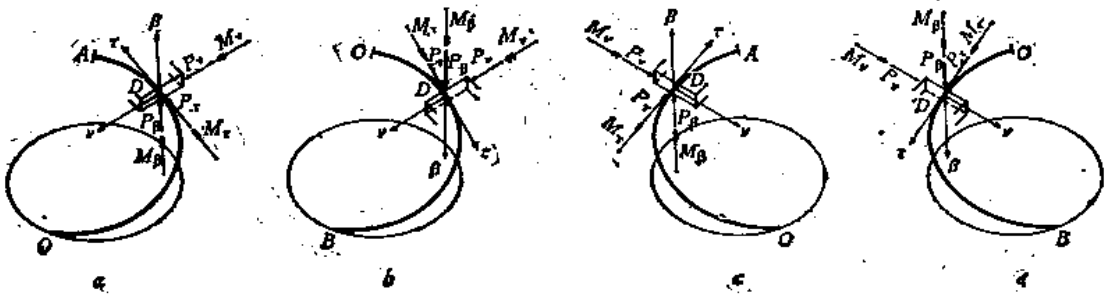


图 1-9

七、小结

本节推导了螺旋楼梯的基本计算公式和计算理论，对每一个具体情况并不是六个赘余未知量都同时存在，可根据实际边界条件以及结构及荷载的对称或反对称性能来减少赘余未知量，并可以巧妙的对不同情况采用不同的特定坐标系使计算公式通用，并使理论分析和具体计算得到充分简化。但首先导出计算六个赘余未知量所需的全部公式，除了由于推导方法的一致便于说明外，对以下章节中各种边界条件的具体应用，论述上也将带来一定方便。

应该注意，计算结果是否正确，对超静定结构不能靠支座反力与荷载的平衡条件来校核。平衡条件是容易求得的，只要把按自然坐标系求得的A点的作用力和力矩，经 $T_1 \cdot T_2$ 变换后化为与O点固定座标轴同轴向的力和力矩分量，反号后做为支座的反作用力，就不难通过已求得的赘余未知力及荷载建立平衡方程。但平衡方程的满足仅说明A点及支座反力的求解数字运算上没有错误，并不能说明赘余力的求解是否正确。这是显而易见的，因为中轴线任一动点D正截面作用力的计算，也包括末端支座反力的计算本身，就是根据力的平衡求得的，故平衡条件并不能做为校核之用。计算结果的校核应通过另一端支座的变形协调来保证，按上述理论分析的方法不难加以校核，但需要进行较多的附加运算。仅仅为了校核而花费太多的工作量并不合宜，且实际意义不大，故不再详细讨论。由于赘余力的计算相当繁复、容易出错，且无法简单校核，故应计算仔细。

第三节 两端固定的对称型螺旋楼梯

一、对称性的利用

两端固定螺旋楼梯的计算理论如上节所述，因每个固定端有三个未知反力和三个未知反力矩，故体系是六次超静定的。如果螺旋楼梯荷载对称、或仅承受竖向均布线荷载时，则利用对称性可使赘余未知力大为减少。在中轴线的中点O处切断，使成为两个静定的空

间悬臂曲梁，以此做为求解的基本静定体系（图1-10）。由于结构和荷载的对称性，在O点处除 x_2 、 x_5 外，其余各力均等于零。由于在各种不同情况下判断各赘余力何者为零对简化结构计算极为重要，故将由内力和变位两种论点来加以判断说明，由此来体会恰当地确定坐标系及合理确定基本体系切口位置的重要作用。

1. 如前所述，在中轴线的中点O处切断，并设O-XYZ固定坐标系于O点处。对上半段上端固定情况，固定坐标系如图1-8a，对下半段下端固定时，固定坐标系如图1-8b。在所选特定坐标系下，曲线方程及座标变换矩阵的公式两者完全相同，并均按上节公式计算。由于赘余未知力及荷载计算时设定其均沿O-XYZ轴正向作用，因此通过计算，对上段任一动点D所求得的作用力如为正号，并沿自然坐标系D- $\tau\nu\beta$ 轴的正向作用，则对下段由于荷载q的正、负号与上段相反（上段q实际方向与Z轴正向相反，数值计算时取负值，下段q实际方向与Z轴正向相同，数值计算时取正值），故下段与动点D相应位置处的作用力与上半段求得者应等值反号，即当上段为正时，下段应等值负号，并沿下段座标轴的负向作用，如图1-11所示。由此看出，O点处仅 x_2 、 x_5 有可能存在，而其余各力必等于零。与中点O对称诸点， M 、 P 是对称的、其余各力是反对称的，并在中点为零。

2. 在中点O处切断，并在切断处作用以成对的赘余未知力 $x_1 \sim x_6$ ，并设定力的方向对上半段而言为正（图1-12）。下段赘余力的正负号则根据上段赘余力的设定方向按平衡条件确定下段力的方向后，视其与下段座标轴正向是否一致而定（同向为正、反之为负）。对上下段分别采用前述的特定坐标系，按（1-19）式计算基本体系的各单位力变位及荷载变位，如上半段所求得的 δ_{ij} 及 Δ_{iq} 均为正值，即变位方向与假定未知力的作用方向一致。对下半段由于 x_2 、 x_5 沿轴负向作用及q上下段亦不同号（上段为负、下段为正），故计算下半段变位时，凡下标带有一个字符为2、5或q的变位均应与上段同值反号，即上段为正时下段为负，其变位方向与各相应作用力的方向相反。当下标两个字符均为2、5或q，或不含有2、5或q时，计算结果与上端等值同号，其变位方向与各相应作用力的方向相同。按上述判断可知，如下所列的切口处各相对变位（即上下两段切口处变位之和） δ_{12} 、 δ_{15} 、 δ_{23} 、 δ_{24} 、 δ_{20} 、 δ_{35} 、 δ_{45} 、 δ_{56} 及 Δ_{1q} 、 Δ_{3q} 、 Δ_{4q} 、 Δ_{6q} 均等于零，其余各变位则为按上段求得之值的一倍。

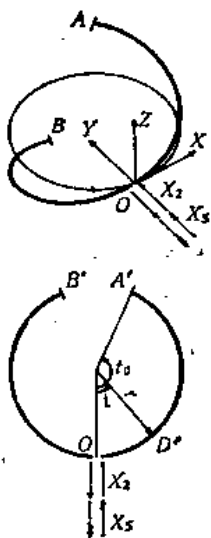


图 1-10

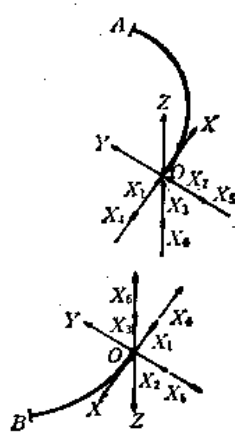


图 1-11

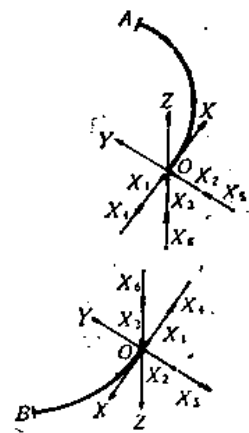


图 1-12