

[苏] П·А·盖达耶夫



测量控制网 的 数学处理

〔苏〕П·А·盖达耶夫

测量控制网 的数学处理

章书寿 蒋先致 译
史树森
宁津生 校

测绘出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了测量控制网的概算、平差计算和最后计算,其中也包含了三角高程测量的成果处理。书中还探讨了诸如坐标系统的建立、各坐标系统间的关系、外业成果的归算以及其它问题。考虑到电子计算机的应用,书中特别强调了非对数计算。本书理论叙述和实际应用并重。

本书可供广大测量专业人员使用,也可作为测量院校学生的教材和参考书。

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

МОСКВА «НЕДРА» 1977

测量控制网的数学处理

〔苏〕П. А. 盖达耶夫

章书寿 蒋先致 史树森 译
宁津生 校

测绘出版社出版

山西新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32·印张 $12\frac{1}{2}$ ·插页1·字数280千字

1982年9月第一版·1982年9月第一次印刷

印数1—5,000册·定价1.30元

统一书号:15039 新226

科技新书目(31—223)

前 言

当研究测量控制网的数学处理问题时，必须看到目前对这些网的精度要求是相当高的。既要顾及国民经济的需要，又要考虑科学上的用途。例如，只有在大大提高现有国家大地网精度的条件下，才能保证在广大区域研究地壳水平位移的要求。对于一些特殊网，如为了研究局部地震区的地壳运动而扩建的网，甚至要提出非常高的精度要求，其目的是为了预报地震。

由于对现代测量控制网的精度提出了很高的要求，这些网的数学处理就应按 $\Phi \cdot H \cdot$ 克拉索夫斯基和 $M \cdot C \cdot$ 莫洛琴斯基拟定的投影法来进行，以便保证可以大大削弱起始数据误差对网中平差元素的影响。还应该看到，使参考坐标系与地心坐标系尽可能一致，对于宇宙大地测量的解算任务将会容易一些。另一方面，宇宙大地测量手段的应用也将大大加快地心坐标系的建立。

我们认为，对于那些用经典的地面方法建立的控制网，提高其精度是完全可能的。这种可能性不仅体现于运用现代化的测量仪器设备，也有赖于这些网的合理的数学处理。

在阐述控制网平差方法的过程中，将向读者介绍控制测量数据处理的一些基本理论。

书中某些章节是和下列人员共同编著的。第三章为 $\Phi \cdot B \cdot$ 安德列耶夫；第四章为 $T \cdot K \cdot$ 科列维德；第五章 § 25 为 $I \cdot B \cdot$ 科列斯尼柯夫；第八章 § 37 和 § 39 为 $H \cdot A \cdot$ 达拉尼切夫和 $D \cdot B \cdot$ 西多洛夫。

对上列同志的帮助表示感谢！

衷心感谢 E·Γ·波依哥教授对原稿提出了一系列有价值的意见。

目 录

第一章 绪 论	(1)
§ 1. 基本概念和解决问题的步骤	(1)
§ 2. 历史概况	(5)
第二章 概 算	(8)
§ 3. 概算的任务和内容	(8)
§ 4. 计算技术简介	(9)
§ 5. 测站角度平差	(11)
§ 6. 外业资料的复核和按字母序列编制 点号目录	(26)
§ 7. 关于概算的精度	(27)
§ 8. 二、三、四等补充网边长和测站坐标 近似值的计算, 略图的编制	(29)
§ 9. 观测方向的测站归心和化算至平面	(37)
§ 10. 将角度观测值化算到参考椭球体坐标系	(44)
§ 11. 观测距离化算至椭球面和平面	(62)
§ 12. 外业计算成果的检核和取舍及其 精度评定	(73)
第三章 三角高程测量	(79)
§ 13. 概 述	(79)
§ 14. 平 差	(89)
第四章 天文大地垂线偏差的内插	(103)
§ 15. 莫洛琴斯基方法	(103)
§ 16. 利用垂直角内插垂线偏差。结语	(108)

第五章	测量控制网平差的总则和基本运算	(115)
§ 17.	总 则	(115)
§ 18.	平差方法	(120)
§ 19.	应用联系数法进行三角网平差	(121)
§ 20.	联系数法的一些演变	(148)
§ 21.	用参数法平差测量控制网	(152)
§ 22.	定向方向的平差	(166)
§ 23.	三、四等典型图形平差的实例	(172)
§ 24.	在电子计算机上平差定向方向	(221)
§ 25.	用联系数法在电子计算机上平差 独立自由网	(227)
§ 26.	有关三角测量平差的一些结论性意见	(236)
第六章	边角网和测边网平差	(242)
§ 27.	一般原理	(242)
§ 28.	导线测量平差	(246)
§ 29.	边角综合网的平差	(262)
§ 30.	三边测量的计算	(270)
第七章	标准控制网的布设、平差和精度估算	(283)
§ 31.	概 述	(283)
§ 32.	角度观测	(283)
§ 33.	角度观测纲要、平差和精度估算	(291)
第八章	坐标系统的建立及各坐标系统间的关系	(306)
§ 34.	概 述	(306)
§ 35.	参考坐标系的建立	(308)
§ 36.	用地面测量方法建立地心坐标系	(312)
§ 37.	建立全球测量控制网以确定地心坐标系	(314)

§ 38.	在各种坐标系中算得的基本控制网 之间的关系.....	(320)
第九章	归算问题	(321)
§ 39.	归算的误差.....	(321)
§ 40.	莫洛琴斯基建议的实质和用近似方法 实现这个建议.....	(331)
§ 41.	一等枢纽锁的概略多边形平差.....	(334)
§ 42.	在一等三角锁中坐标增量的精度评定.....	(338)
第十章	几个补充问题	(347)
§ 43.	论平差控制网的精度评定.....	(347)
§ 44.	按利萨夫法对自由网作正形变换.....	(350)
§ 45.	法方程式的组成.....	(356)
§ 46.	法方程式的约化和算例.....	(360)
附 录		(386)
参考文献		(391)
译者的话		(394)

第一章 绪 论

§ 1 基本概念和解决问题的步骤

所有的大地、天文和重力测量都与地面上的实际重力场有关，这就是说，上述测量工作是在与铅垂线相关联的站心坐标系中进行的。因为对实际重力场无法作精确的数学描述，所以在不同点求得的大地测量成果，严格地说是不能共同平差的。因此，高精度大地网的数学处理任务之一，就是将观测成果加以改正，以使这些成果化算到统一的坐标系。此时必须注意，只有利用现有的天文和重力测量资料，才能对测量成果进行化算。在建立地心坐标系时，宇宙大地测量将起重要作用。

在测量控制网的平差计算中，控制测量数据处理的理论明显地起着决定性的作用，而当平差大规模控制网时，就得应用电子计算机。

如前所述，点上的大地、天文和重力测量是在站心坐标系中进行的，铅垂线是该坐标系的主轴线，通过与地球旋转轴相平行的铅垂线的天文子午面就应是基本坐标面。

设计一个大地坐标系作为公共坐标系，大地测量成果化算到这一坐标系中之后才能进行整体平差。地球椭球面上的地理纬度 B 和地理经度 L 就是所设计的大地坐标。同时假定，椭球体内的质量分布应服从一定的数学规律。化算至这一椭球面的方位角就称为大地方位角，并用 A 表示。

为使测量控制网的应用方便，以及使控制网的数学处理

容易一些，测量成果和最终的平差成果都应化算到高斯投影面上来。在高斯投影中，每一投影带具有各自的坐标系统。虽然各投影带的坐标系也有很好的联系，但高斯投影带的实际应用毕竟有某些不便。

有了设计的坐标（纬度和经度或纵、横坐标），就可确定坐标面上的点位。为了确定分布在地球自然表面上的点位，还需要知道点位在所采用的地球椭球面上的高度，这个高度称为大地高，常用 H 表示。

实际上，大地高是正常高 H^* 和高程异常 ζ 之和。

所谓正常高，是在似大地水准面上的高程。似大地水准面是一种数学上不规则的曲面，按照莫洛琴斯基的理论，这是假想一个平均海洋面延伸到整个大陆所形成的曲面^①。必须指出：各国采用的作为平均海水面的起算面是用一个高程原点来表示的，这些起算面之间是不完全一致的，因此，各个国家正常高差值的范围约为0.5米。苏联采用喀琅斯塔德验潮标尺的零点作为高程原点。

所谓高程异常系指似大地水准面相对于所采用的参考椭球面的高度。

对测量控制网的数学处理来说，需要大地高。为了解决几乎所有的工程任务，或应用正常高，或用经过改正的动力高，对于解决水利工程或其它工程任务，动力高是最合适的，因为对于同一个水准面，动力高具有固定的数值。

在一切地形图上和大地点成果表中，通常是给出正常高。

① 我们认为：正确地说，正常高就是地形高。

随着宇宙大地测量的发展，与地球的质心及其旋转轴、以及格林尼治子午面有联系的三维笛卡尔坐标系得到了发展。必须看到，三维坐标 x, y, z 与大地坐标，即纬度 B 、经度 L 和大地高 H 有着精确的数学关系。正常高 H' 则与三维坐标系没有关系。

由天文观测求得的，即站心坐标系中的纬度 φ 、经度 λ 和方位角 α 称为天文坐标，这些坐标以希腊字母表示，以别于用拉丁字母表示的大地坐标。天文坐标和大地坐标之间以及方位角之间的关系将在下一章讨论。

测量控制网的严格数学处理，包括测量成果化算至统一的大地坐标系，就称为投影法的处理。

当控制网的精度要求不高时，可采用展开法进行计算。在这种方法中，观测成果不是归算到椭球面上，而是归算到海洋水准面，即大地水准面上^①，然后进行平差。此时假定，大地水准面与数学上规则的参考椭球面重合。必须充分估计到，大地水准面可能偏离椭球面达几十米，而铅垂线与椭球面法线间的夹角可达几十秒。

在国家控制网中，观测了有关点的天文坐标，有关方向的方位角，以及水平角、垂直角和边长等。此外，根据相应的纲要进行重力测量。国家网中水平角和边长的观测精度在细则〔12〕中已明确规定。点上折光曲线的垂直角，其测定误差约为 $1'' \sim 2''$ 。与观测点的纬度有关的天文纬度、经度和方位角的测定精度详见 С.С. 乌拉洛夫 (Уралов) 的论述〔21〕。至于重力网，为了大地测量的目的，应着重考虑网的

① 在以后的叙述中，我们将似大地水准面简称为大地水准面。

建立纲要和方案，以及网的密度。对于解决测量问题来说，现代重力测量的精度是完全够用了。

利用控制网的观测成果可以求得网中任意两点间方向线的边长和方位角。为了计算网中各点的坐标，应该有一个以上的起始点。

一、二等网是发展低精度网的基础。一等多边形网首先是将统一坐标系扩展到全国范围内。在用二等全面网填满一等多边形网之后，则二等全面网可以大大提高在所取坐标系中边的定向精度和点位精度。如前所述，只有用投影法对网进行正确的数学处理，控制网才有可能达到很高的精度。应用这一方法时，大地天文和大地重力测量起着主要的作用。

天文观测可求得铅垂线相对于地球旋转轴和起始子午面的位置。

重力测量资料有可能将各种站心坐标系的成果化算到地球椭球体的统一坐标系中，而后者是用以建立近似重力场的。

宇宙大地测量能有效地确定外部重力场的行星特征和远区域的重力影响。在建立地心坐标系中，宇宙大地测量有着相当重要的作用。

在控制网中除了必需的观测值外，总是有一些多余观测值，这就产生了闭合差。根据闭合差可进行最可靠的检核和评定测量精度，以及很好地来确定权。

在着手解决控制网的数学处理任务时，首先应该确定必需而足够的小数位，如计算过程中应取几位小数，计算成果中应包含几位小数。为此总的要求是：与测量误差的影响相较，计算中的凑整误差影响最后应该是忽略不计的。然而在

理论上这个问题很复杂，用蒙杰-卡尔洛 (Монте-Карло) 的方法，即数学模型和统计检验的方法能合理地解决这一问题。在此必须注意，包含过多的小数会使计算显著地复杂。

测量控制网的数学处理由以下几个步骤组成：

- 1) 概算；
- 2) 平差计算；
- 3) 最终计算。

概算的目的在于：将测量成果化算到测站中心，以及化算到椭球面和平面上去；测量成果的检核和淘汰以及成果的精度评定；用于平差的外业测量资料的准备工作。

平差的任务是按最小二乘法消除闭合差。

最终计算的目的是检核和评定平差成果的精度，以及将这些成果化为便于实际应用的形式。

§ 2 历史概况^①

自从 A·勒让德和 K·高斯创立最小二乘法以来，在十八世纪末至十九世纪初，测量控制网的数学处理实际上就打下了实用而严密的科学基础。

Л·埃列尔、И·兰勃特，И·拉普拉斯以及其他科学家也早已提出处理测量成果的各种方法，由于这些方法较复杂而未能得到实际应用。应该承认，直至目前为止，无论谁还没有提出在科学论证的严谨和实用合理性方面能与高斯-勒让德法相比拟的方法。高斯在研究测量资料数学处理方法的运算方面作出了巨大贡献。

① 译者注：本节内容冗繁，又无多大意义，故略。

Φ·白塞尔、Φ·赫尔默特、O·史赖伯，Л·克吕格等成功地拟定了平差计算的各种方法。

二十世纪前后，俄国科学家在最小二乘法、概率论的理论研究和实际应用方面作了大量工作。作者本人于二十世纪初编写和出版了《实用大地测量指南》，书中反映了大地测量现状，其中包括控制网平差方法以及其它方面的内容。

1917年以前，在俄罗斯通常是先进行局部的三角测量，然后用交会法建立补充网。这些网的数学处理比较简单。直至二十世纪初，根据 И·И·鲍米兰切夫、Н·Я·金格尔、В·В·维特柯夫斯基等科学家的倡议，最先试图利用联合平差的方法来建立俄国欧洲部分一等三角的统一系统。但是，这次平差未能达到应有的精度，所得成果只能用于地形测量。然而通过这次工作为制定进一步发展三角网和水准网的计划和方案作出了贡献。

在社会主义建设时期，苏联的大地测量工作呈现出空前未有的规模。遍布全国广大地区的天文大地网的严密联合平差的重要任务摆在苏联大地测量工作者面前。为了联合平差全苏联的天文大地网，必须选定新的参考椭球体。曾用以计算过旧三角网的白塞尔椭球体，不论就其大小，或就其在大地球体内的定向而言，都不能认为是满意的。若考虑到网的规模很大，就必须制定足够严密同时又相当简单的天文大地网数学处理的方法。在解决大规模天文大地网的联合数学处理任务，以及为此目的选取最合适的椭球体方面，苏联的大地测量学家科学院通讯院士 Φ·Н·克拉索夫斯基、М·С·莫洛琴斯基和 Н·А·乌尔马也夫教授都做出了巨大的贡献。

苏联的数学家、天文学家和测量学家创立了一所先进的

计算学校，为解决苏联大规模控制网的计算任务培养了大批人材。

现代电子计算机的出现，开创了发展平差计算方法的新途径，同时也对测量工作者提出了新的任务。但是，电子计算机的存在并不意味着现在制定新的或改善旧的控制网平差方法就没有必要了。在此情况下，为了更有效地应用电子计算机，必须考虑能将其分成多次重复的简单动作的平差计算方法，以便简化电子计算机的程序和操作。因此，为了使电子计算机广泛应用于平差计算，应找出一种趋近的方法。

第二章 概 算

§ 3 概算的任务和内容

进行概算是为了检查观测成果的质量和为平差准备外业资料。为此需进行下列工作：

- 1) 测站平差；
- 2) 复查外业测量成果和按字母序列编制测站目录；
- 3) 计算边长、测站坐标的近似值和绘制网的略图；
- 4) 编制观测方向和距离的卡片；
- 5) 观测方向和距离的归心计算；
- 6) 将方向、方位角和距离化算至椭球面；
- 7) 检核计算和按闭合差处理成果。

在完成前五项工作之后，就可着手三角高程测量的成果处理，从而求得正常高（为此应有由几何水准测量求得的高程控制点）和测站的竖直折光系数，在全面网中，应计算每一方向的折光系数。三角高程测量的计算将在第三章中论述。必要时，要进行天文大地垂线偏差的内插，这将在第四章讨论。此后应着手将方位角、方向和距离化算到椭球面上，相应的成果记在第六项的概算表中。

当在小型台式计算机上平差时，以及为了计算资用坐标，还应将方向归算到高斯平面上。在电子计算机上平差时，这一归算应先列于程序中。

至于概算，由于下列原因在电子计算机上进行是不合适的。概算要解决两个任务：1) 分析、检核和处理外业测量

成果；2)为平差准备外业资料。这两个任务是彼此紧密相连的，应合在一起解决。为了进行外业测量的检核，必须首先把这些观测成果进行测站归心，并化算到椭球面上。当发现闭合差超限时，还要重新检查相应的外业手簿、归心计算用纸和其它外业资料，将其与闭合差进行分析比较等等。在适当的组织大地测量工作时，概算应在外业期间进行。经仔细分析，当发现不合格的测量成果时，立即在现场改正。所有这些工作都需要外业作业员参加，要顾及测量工作者的实践经验，要工作人员深入现场，在电子计算机上单凭程序是无法解决这一任务的。电子计算机只有用在测量控制网的平差和最终计算上才能显出效果。

§ 4 计算技术简介

在着手控制网的处理之前，必须具备下列资料和用具：起算控制网的测站坐标明细表；外业测量资料（手簿、归心计算纸等）；控制网略图；必需的表格；台式计算机；计算尺；量角器；直尺；三角板和绘图仪（后者用于绘制略图和总结图）；计算用的米厘纸和计算纸；大地水准面高度图（当量测距离时）；在高山地区还需要知道起算点的垂线偏差。

起始数据通常由成果表中摘抄，由未经正式登记的资料中取用的数据应与原始资料校对。抄录的全部起始数据应由抄录人员和计算人员确证无误后才能应用。

当在台式计算机上平差计算三、四等控制网时，采用六位三角函数表和对数表，以及某些专用表。一、二等网通常在电子计算机上进行平差。专用网则按相应的技术指示进行计算。